Anna Lachowska



# Analyse II – Commentaire Série 2

**Exercice 5.** (Disjonction des cas)

Démontrer les propositions suivantes par disjonction des cas. Essayez d'écrire votre argument avec clarté et concision, sous forme de phrases complètes:

*i*) Soient $n$ un nombre entier qui n'est pas divisible par 5. Alors le nombre $n^4 + 14$ est divisible par 5.
*Les cas sont:*
*(1)* $n \equiv 1 \pmod 5$. *Alors* $n^4 + 14 = (n^2)^2 + 14 \equiv 1^2 + 14 \equiv 0 (\text{mod } 5)$
*(2)* $n \equiv 2 \pmod 5$. *Alors* $n^4 + 14 = (n^2)^2 + 14 \equiv 4^2 + 14 \equiv 1 + 14 \equiv 0 (\text{mod } 5)$
*(3)* $n \equiv 3 \pmod 5$. *Alors* $n^4 + 14 = (n^2)^2 + 14 \equiv 9^2 + 14 \equiv 1 + 14 \equiv 0 (\text{mod } 5)$
*(4)* $n \equiv 4 \pmod 5$. *Alors* $n^4 + 14 = (n^2)^2 + 14 \equiv 16^2 + 14 \equiv 1 + 14 \equiv 0 (\text{mod } 5)$.
*Dans chaque cas on obtient que* $n^4 + 14$ *est divisible par* 5.

*ii*) Soient $x, y, z, v$ des nombres naturels tels que

$$x^2 + y^2 + z^2 = v^2.$$

Alors $v$ est pair $\quad \Leftrightarrow \quad$ tous les trois nombres $x, y, z$ sont pairs.
*L'implication* $\Leftarrow$ *est claire. Pour démontrer* $\Rightarrow$*, on considère les cas suivants: (1)* $x, y, z$ *tous les trois sont pairs; (2) exactement un d'entre* $x, y, z$ *est impair; (3) exactement deux d'entre* $x, y, z$ *sont impairs; (4) tous les trois sont impairs. Evidemment (2) et (4) impliquent que* $v$ *est impair. Le cas difficile est (3). Mais dans ce cas en écrivant* $x = 2n + 1$, $y = 2m + 1$, $z = 2k$, *on obtient que l'expression* $x^2 + y^2 + z^2$ *est divisible par 2, mais pas par* 4 *et donc cette expression ne peut pas être le carré d'un nombre naturel. On utilise ici la factorisation de* $v$ *en produit de nombres premiers.*

**Exercice 6.** (Implications)

Dans les énoncés suivants, remplacer "??" par une des implications $\Leftarrow, \Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$ pour obtenir des propositions vraies. Démontrer les propositions obtenues.

*i*) On considère l'équation $x^2 + ax + b = 0$, où $a, b \in \mathbb{C}$.
Proposition $P$ : *il existe* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $z$ *et* $\overline{z}$ *sont les seules solutions de l'équation donnée.*
Proposition $Q$ : *Les nombres* $a$ *et* $b$ *sont réels.*
$P \quad \Rightarrow \quad Q$
On a:

$$0 = (x - z)(x - \overline{z}) = x^2 - (z + \overline{z})x + z\overline{z} = x^2 - 2\text{Re}(z)\, x + |z|^2 = x^2 + ax + b.$$

Alors $a = -2\text{Re}(z) \in \mathbb{R}$ et $b = |z|^2 \in \mathbb{R}$.
La réciproque est fausse: par exemple l'équation $x^2 - 3x + 2 = 0$ a les racines $x_1 = 1$ et $x_2 = 2$, qui ne sont pas des nombres conjugués, $\overline{x_1} \neq x_2$.

*ii*) Soient $A, B$ deux sous-ensembles bornés de $\mathbb{R}$. $\qquad A = B \quad \Leftrightarrow \quad A \setminus B = B \setminus A$
*L'implication* $\Rightarrow$ *est claire. Pour démontrer* $\Leftarrow$*, on remarque que* $A \setminus B = B \setminus A$ *est équivalent à* $A \setminus B \subset B \setminus A$ *et* $B \setminus A \subset A \setminus B$. *Soit* $x \in \mathbb{R}$. *Si* $x \in A \setminus B$, *alors* $x \in B \setminus A$. *En déduire que* $A \setminus B = \emptyset$ *et donc* $A \subset B$. *D'une façon similaire,* $B \setminus A = \emptyset$, *d'où* $B \subset A$. *Finalement,* $A = B$.