# Série 1

**Exercice 7.**

*i)* Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $0 \leq x \leq 2$. On a $-x^3 + 4x + 1 = x(-x^2 + 4) + 1 = x(2 - x)(2 + x) + 1$. Puisque $x$ est tel que $0 \leq x \leq 2$, on a $x(2 - x)(2 + x) \geq 0$, et donc $-x^3 + 4x + 1 = x(2 - x)(2 + x) + 1 \geq 1 > 0$.

*ii)* Soit $n \in \mathbb{N}_+$. Soient aussi $s \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{N}_+$. On va démontrer que si $\log_{11} n = \frac{s}{t}$ est un nombre rationnel, alors il est un nombre entier. On a

$$\log_{11} n = \frac{s}{t} \quad \Leftrightarrow \quad 11^{\frac{s}{t}} = n \quad \Leftrightarrow \quad 11^s = n^t \in \mathbb{N}_+.$$

D'après le théorème fondamental de l'arithmétique, tout entier positif possède une unique décomposition en produit de facteurs premiers. Donc $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m}$, où $p_1, p_2, \dots p_m$ sont des nombres premiers distincts, et $k_1, k_2 \dots k_m \in \mathbb{N}$. Alors on a

$$11^s = p_1^{tk_1} p_2^{tk_2} \dots p_m^{tk_m}.$$

Puisque la décomposition en facteurs premiers est unique, on obtient $p_1 = 11$, $tk_1 = s$ et $k_2 = k_3 = \dots = k_m = 0$. Alors

$$11^s = 11^{tk_1} \quad \Leftrightarrow \quad s = tk_1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s}{t} = k_1 \in \mathbb{N}$$

Donc $\frac{s}{t} = \log_{11} n \in \mathbb{N}$.

Alors on a deux cas: soit $\log_{11} n$ est irrationnel, soit il est rationnel, dans ce cas il est entier.

**Exercice 8.**

*i)* La somme d'une série est par définition la limite de la suite des sommes partielles $S_n = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i$. On calcule:

$$S_{2n} = \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i = (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + 1 = 1;$$

$$S_{2n+1} = \sum_{i=0}^{2n+1} (-1)^i = (1 - 1) + \dots + (1 - 1) = 0.$$

La suite $S_n$ donnée par $S_{2n} = 1$, $S_{2n+1} = 0$ n'a pas de limite, donc la série $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i$ diverge. La faute dans l'argument donné est dans le regroupement de termes

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots$$

dans une somme infinie. On prétend ici que le "dernier" terme est connu d'être $-1$, ce qui n'est pas justifié. La bonne méthode est de considérer la limite de la suite des sommes partielles.

*ii)* $(a - b)(a + b) = (a - b)b$ implique $a + b = b$ si et seulement si $a \neq b$.

*iii)* $P \Rightarrow Q \Rightarrow R$ n'implique pas $R \Rightarrow P$. Par exemple, la proposition fausse "$\sqrt{3}$ est rationnel" implique $(\sqrt{3})^2 = 3$ est rationnel, ce qui est vrai.