$\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\bar{y} = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

(3) Cauchy-Schwartz: $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$

Dém: Soit $\lambda \in \mathbb{R}$; $0 \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i \lambda + y_i)^2}_{\sum (x_i^2 \lambda^2 + 2\lambda x_i y_i + y_i^2)} = \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)}_{a} \lambda^2 + \underbrace{\left(2 \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)}_{b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)}_{c} \geq 0$

$\Rightarrow a\lambda^2 + b\lambda + c \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ le discriminant de cette équation quadratique est ≤ 0

$\Rightarrow b^2 - 4ac \leq 0 \quad \Rightarrow 4 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \right)^2}_{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2} - 4 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)}_{\|\bar{x}\|^2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \right)}_{\|\bar{y}\|^2} \leq 0$

$\Rightarrow \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 \leq \|\bar{x}\|^2 \cdot \|\bar{y}\|^2 \underset{\|\bar{x}\| \geq 0,\ \|\bar{y}\| \geq 0}{\Longrightarrow} |\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|. \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n$ ▨