Analyse II

Questions à Choix Multiples

Extrait du cours de Prof. Anna Lachowska - BA2 IN / SC

Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : L'équation différentielle $2y \cdot y' = 4x^3$ avec la condition initiale $y(0) = 0$ possède

- ☐ Une seule solution sur $\mathbb{R}$
- ☐ 2 solutions sur $\mathbb{R}$
- ■ 4 solutions sur $\mathbb{R}$
- ☐ Pas de solutions sur $\mathbb{R}$

Question 2 : Quel type d'équation : EDVS, EDL1, ni l'un ni l'autre ?

(a) $(e^y)' \cdot e^x = x$

(b) $3x(y' + 5x) = 2y$

(c) $(y + e^y)e^x = (1 + e^{-x})y'$

(d) $y' = 4x^2 + 4xy + y^2$

- ☐ 2 EDVS, 2 ni l'un ni l'autre
- ☐ 2 EDVS, 2 EDL1
- ■ 2 EDVS, 1 EDL1, 1 ni l'un ni l'autre
- ☐ 4 EDVS

Question 3 : Soit $y'' - \dfrac{2}{x}y' + \dfrac{2}{x^2}y = 0$ une EDL2 homogène, $x \in \mathbb{R}^*_-$ et $\mathbb{R}^*_+$.

$v_1(x) = x$ est une solution. Une autre solution linéairement indépendante est

- ■ x^2
- ☐ $\dfrac{1}{x}$
- ☐ $\dfrac{1}{x^2}$
- ☐ $e^{\frac{1}{x}}$

Question 4 : La solution générale de l'équation $y'' + 2y' - 3y = xe^{2x}$ est

- ☐ $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} - \frac{1}{5}xe^{2x} - \frac{4}{25}e^{2x}$
- ☐ $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} + \frac{6}{5}xe^{2x} - \frac{18}{25}e^{2x}$
- ☐ $y(x) = C_1e^{-x} + C_2e^{3x} + \frac{1}{5}xe^{2x} - \frac{7}{25}e^{2x}$
- ■ $y(x) = C_1e^{x} + C_2e^{-3x} + \frac{1}{5}xe^{2x} - \frac{6}{25}e^{2x}$

Question 5 : Soient A et B deux sous-ensembles ouverts non vides de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \backslash B = \{\overline{x} \in \mathbb{R}^n : \overline{x} \in A \text{ et } \overline{x} \notin B\}$ non vide.

- ■ $A\backslash B$ peut être ouvert, fermé, ou ni ouvert ni fermé
- ☐ $A\backslash B$ est soit ouvert, soit fermé
- ☐ $A\backslash B$ ne peut pas être ouvert
- ☐ $A\backslash B$ ne peut pas être fermé

Question 6 : $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$. Alors S est

- ☐ compact
- ☐ ouvert et borné
- ☐ fermé et non borné
- ☐ ouvert et non borné
- ■ ni ouvert, ni fermé et non borné
- ☐ ni ouvert, ni fermé et borné

Question 7 : $f(x, y) = \dfrac{\cos(xy)(x^2 \sin(y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $f(x, y) = 0$ autrement,

$g(x, y) = \dfrac{x^2 + y^4}{y^2 + x^4 + x^6}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, $g(x, y) = 0$ autrement.

- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}^*$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ n'existe pas
- ■ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$

Question 8 : $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{y^2}}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$ $\qquad g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{x^3}}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = \alpha \in \mathbb{R}^*$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ n'existe pas
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y)$ n'existe pas
- ■ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x, y) = 0$

Question 9 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \sin|y|}{\sqrt{3x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

Alors la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant $\overline{v} = (\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$:

- ☐ vaut $\frac{1}{2}$
- ☐ vaut $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- ■ vaut $-\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- ☐ vaut $-\frac{2}{\sqrt{3}}$
- ☐ n'existe pas

Question 10 : Soit S la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \cos(\pi y) + z^2 x + e^{xy} + yz = 1 + e\}$. Alors l'équation du plan tangent à S au point $(x_0, 2, 0)$ est

- ☐ $x + \frac{1}{4}y + \frac{z}{e} = \frac{1}{2}$
- ■ $ex + \frac{1}{4}ey + z = e$
- ☐ $x + y + \frac{2z}{e} = \frac{5}{2}$
- ☐ $2ex + \left(\frac{1}{2}e - \pi\right) y + 2z = 2(e + \pi)$

Question 11 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot \sin|y|}{\sqrt{3x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$

- ☐ f n'est pas continue en (0,0)
- ☐ f est continue en (0,0), mais $\nabla f(0,0)$ n'existe pas
- ■ f est continue, $\nabla f(0,0)$ existe, mais f n'est pas dérivable
- ☐ f est continue et dérivable en (0,0)

Question 12 : $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^p}{(x^2+y^2)^q} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ 0 \text{ autrement} \end{cases}$ où $p, q \in \mathbb{N}$

- ☐ Si $p > q$, alors $f(x,y)$ est continue en (0,0)
- ☐ $\forall p, q \in \mathbb{N}$ on a $\nabla f(0,0) = (0,0)$
- ■ Si $p > 2q$, alors $f(x,y)$ est dérivable en $(0,0)$
- ☐ Si $p < q$, alors $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ n'existe pas

Question 13 : Soit $E = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0\}$, et soit $g : E \to E$ tel que $g(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{u}{v} \end{pmatrix}$.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\mathcal{J}_{(f \circ g)}(u,v) = \left(\left(u + \frac{1}{v}\right) e^{uv}, \left(\frac{u^2}{v} - \frac{u}{v^2}\right) e^{uv} \right)$ pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2_+$.

Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ vaut

- ■ $2e$
- □ e
- □ 0
- □ $\frac{1}{\sqrt{2}}e$
- □ $\sqrt{2}e$

Question 14 : Soit $F :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par :

$$\int_{3t}^{t^2} \frac{\ln(1 + \sin(tx))}{x} dx$$

Alors

- □ $F'(1) = 2\ln(1 + \sin 1) - 3\ln(1 + \sin 3)$
- □ $F'(1) = 2\ln(1 + \sin 1) - \ln(1 + \sin 3)$
- ■ $F'(1) = 3\ln(1 + \sin 1) - 2\ln(1 + \sin 3)$
- □ $F'(1) = \ln(1 + \sin 1)$

Question 15 : Soit $f(x,y) = \dfrac{1}{\sin(x+y)}$.
Le coefficient de $(x - \frac{\pi}{2})^2 \cdot y^2$ dans le polynôme de Taylor d'ordre 4 autour de $(x,y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$ est

□ $\dfrac{1}{24}$ ■ $\dfrac{5}{4}$ □ $\dfrac{5}{24}$ □ $\dfrac{5}{6}$

Question 16 : L'équation $F(x,y) = \sin(x+y)\cos(x-y) - \dfrac{1}{2} = 0$ définit au voisinage de $(x,y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)$

- □ une fonction $y = g(x)$ avec la tangente $y = -x + \frac{3\pi}{4}$ en $x = \frac{\pi}{2}$
- ■ une fonction $x = h(y)$ avec la tangente $x = \frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{4}$
- □ une fonction $y = g(x)$ avec la tangente $y = x - \frac{\pi}{4}$ en $x = \frac{\pi}{2}$
- □ une fonction $x = h(y)$ avec la tangente $x = y + \frac{\pi}{4}$ en $y = \frac{\pi}{4}$

Question 17 : Soit $f(x,y) = \ln(x+y^2) - y^2 - x^2$.
Sur son domaine de définition, la fonction possède exactement

- [ ] 4 points stationnaires
- [ ] 1 point de maximum local et 1 point de minimum local
- [x] 2 points de maxima locaux
- [ ] 3 points selles

Question 18 : Soit une famille de propositions $\{P(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie alors $P(n+4)$ est vraie. Alors

- [ ] $P(6)$ et $P(8)$ ne peuvent pas être toutes les deux vraies.
- [ ] si $P(19)$ est vraie, alors $P(7)$ est vraie.
- [ ] $P(2)$ et $P(10)$ sont soit toutes les deux vraies, soit toutes les deux fausses.
- [x] si $P(21)$ est fausse, alors $P(9)$ est fausse.

Question 19 : Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$. Alors

- [x] $\iint_E \cos(x^2y^2)\sin(xy)dxdy = 0$
- [ ] $\iint_E \cos(x^2y^2)\cos(xy)dxdy = 0$
- [ ] $\iint_E \sin(x^2y^2)\cos(xy)dxdy = 0$
- [ ] $\iint_E \cos(x)\sin(y^2)dxdy = 0$
- [ ] Aucune de ces réponses

Question 20 : L'aire du domaine D entre les courbes $y = -x^2+2x+1$ et $y = 1-x$ est donnée par l'intégrale

- [ ] $\int_{-2}^{2} dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx$
- [x] $\int_{1}^{2} dy \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} dx + \int_{-2}^{1} dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx$
- [ ] $\int_{-2}^{1} dy \int_{1-y}^{2-2\sqrt{y}} dx$
- [ ] $\int_{1}^{2} dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx + \int_{-2}^{1} dy \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} dx$

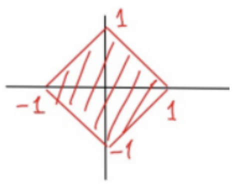
Question 21 : L'intégrale qui donne le volume d'une sphère solide de rayon R est

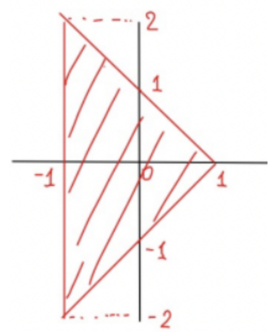
- [ ] $\int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dz$
- [ ] $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} dz$
- [x] $\int_{-R}^{R} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz$
- [ ] $\int_{-R}^{R} dy \int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2-z^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-z^2}} dz$
- [ ] Toutes ces réponses

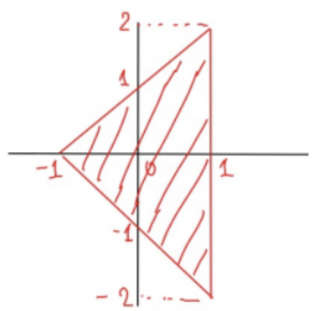
Question 22 : Soit $f(x,y) = 2x + 3y$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0, \ y > 0, \ 1 < x^2 + y^2 < 4\}$
Alors $\iint_D f(x,y)dxdy$ vaut

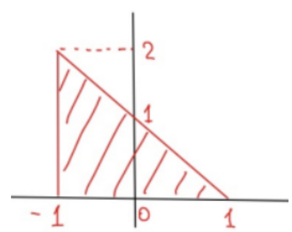
☐ $\frac{8}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{4}{3}$ ■ $\frac{7}{3}$

Question 23 : Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x \geq -1, \ |y| \leq 1 - x\}$. Alors D est de la forme

☐ 

■ 

☐ 

☐ 

Question 24 : L'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} r \ dr$$

exprime l'aire d'un(e)

☐ secteur circulaire

■ triangle

☐ rectangle

☐ tranche d'un cercle