Analyse II — Méthodes de Démonstration
Prof. Lachowska Anna — EPFL

Notes par Joachim Favre

Bachelor d'informatique — Semestre 2
Printemps 2022

J'ai fait ce document pour mon usage, mais je me suis dit que des notes dactylographiées pouvaient intéresser d'autres personnes. Ainsi, je l'ai partagé (à vous, si vous lisez ces lignes !) ; puisque cela ne me coûtait rien. Je vous demande simplement de garder en tête qu'il y a des erreurs, c'est impossible de ne pas en faire. Si vous en trouvez, n'hésitez pas à me les partager (les erreurs de grammaires et de vocabulaires sont naturellement aussi bienvenues). Vous pouvez me contacter à l'adresse e-mail suivante :

`joachim.favre@epfl.ch`

Si vous n'avez pas obtenu ce document par le biais de mon repo GitHub, vous serez peut-être intéressé par le fait que j'en ai un sur lequel je mets mes notes dactylographiées. Voici le lien (allez regarder dans la section "Releases" pour trouver les documents compilés) :

`https://github.com/JoachimFavre/EPFLNotesIN`

Notez que le contenu ne m'appartient pas. J'ai fait quelques modifications de structure, j'ai reformulé certains bouts, et j'ai ajouté quelques notes personnelles ; mais les formulations et les explications viennent principalement de la personne qui nous a donné ce cours, et du livre dont elle s'est inspirée.

Je pense qu'il est intéressant de préciser que, pour avoir ces notes dactylographiées, j'ai pris mes notes en LaTeXpendant le cours, puis j'ai fait quelques corrections. Je ne pense pas que mettre au propre des notes écrites à la main est faisable niveau quantité de travail. Pour prendre des notes en LaTeX, je me suis inspiré du lien suivant, écrit par Gilles Castel. Si vous voulez plus de détails, n'hésitez pas à me contacter à mon adresse e-mail, mentionnée ci-dessus.

`https://castel.dev/post/lecture-notes-1/`

Je tiens aussi à préciser que les mots "trivial" et "simple" n'ont, dans ce cours, pas la définition que vous trouvez dans un dictionnaire. Nous sommes à l'EPFL, rien de ce que nous faisons n'est trivial. Quelque chose de trivial, c'est quelque chose que quelqu'un pris de manière aléatoire dans la rue serait capable de faire. Dans notre contexte, comprenez plutôt ces mots comme "plus simple que le reste". Aussi, ce n'est pas grave si vous prenez du temps à comprendre quelque chose qui est dit trivial (surtout que j'adore utiliser ce mot partout hihi).

Puisque vous lisez ces lignes, je vais me permettre de vous donner un petit conseil. Le sommeil est un outil bien plus puissant que ce que vous pouvez imaginer, donc ne négligez jamais une bonne nuit de sommeil au profit de vos révisions (particulièrement la veille de l'examen). Je vais aussi me permettre de paraphraser mon enseignante de philosophie du gymnase, Ms. Marques, j'espère que vous vous amuserez en faisant vos examens !

Version 2022–07–14

Table des matières

Liste des cours

Chapitre 1

Résumé par cours

- Introduction et définition des concepts de proposition, démonstration et axiomes.
- Explication de la méthode de démonstration dite de la démonstration directe, et celle dite du raisonnement par contraposée.

- Explication de la méthode de démonstration par disjonctions de cas.
- Explication de la méthode de démonstration pour les preuves si et seulement si.

- Explication de la méthode de démonstration dite par l'absurde.

- Explication du principe des tiroirs et des chaussettes de Dirichlet.

- Explication de la méthode de démonstration dite par récurrence.
- Explication de la méthode de démonstration dite par récurrence généralisée.

- Explication de la méthode dite de récurrence forte.
- Résumé des trois méthodes de récurrence que nous avons vues.

- Explication de la méthode de récurrence sur deux variable dite du carré.
- Explication de la méthode de récurrence sur deux variable dite de la diagonale.

- Résumé des différentes méthodes que nous avons vues.

Chapitre 2

Démonstrations à connaître

Théorème : Existence et unicité d'une solution des EDVS

Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$, et soit $g : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Existence : Alors, pour tout couple (x_0, b_0) où $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$, l'équation

$$f(y)y' = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \mapsto I$ vérifiant la condition initiale.
Unicité : Si $y_1 : J_1 \mapsto I$ et $y_2 : J_2 \mapsto I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors :

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \forall x \in J_1 \cap J_2$$

Preuve

Nous allons seulement montrer l'existence de la solution.
Soit la fonction suivante :

$$F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)dt$$

On sait que $F(y)$ est dérivable par le théorème fondamental du calcul intégral. De plus, on sait que $F'(y) = f(y) \neq 0$ sur I, donc $f(y)$ ne change pas pas de signe et donc $F(y)$ est monotone. Puisque $F(y)$ est continue et monotone, on sait qu'elle est inversible sur I.
Soit aussi la fonction suivante :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, on sait aussi que $G(x_0) = 0$ et que G est dérivable sur J.
Définissons aussi la fonction suivante dans un voisinage de x_0 (on sait que F est inversible sur I, et $F^{-1}(G(x_0)) = b_0 \in I$) :

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Nous allons démontrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y)y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et qu'elle satisfait $y(x_0) = b_0$.
En manipulant notre définition, on obtient que, dans un voisinage de $x_0 \in J$:

$$F(y(x)) = G(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\Longrightarrow} F'(y(x))y'(x) = G'(x) \implies f(y)y'(x) = g(x)$$

De plus, nous savons par la définition de G et F que $G(x_0) = 0$ et $F(b_0) = 0$, donc :

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0$$

$\square$

Idée de la preuve

Nous partons de notre équation :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Et, notre théorème nous dit que c'est plus ou moins équivalent à :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \iff F(y) = G(x)$$

Proposition pour les EDL1

Soient $p, f : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation suivante :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

Alors, la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

Preuve

Nous allons montrer que toute solution de cette équation est de la forme $v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.

Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On a aussi que $v_0(x)$ est une solution de la même équation.

Alors, d'après le principe de superposition de solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Ainsi, $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation homogène :

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

Cependant, c'est une EDVS, donc nous savons que la solution générale de cette équation homogène est :

$$v(x) = Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraire}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I.

On en déduit qu'il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$. Ainsi, on obtient que la solution $v_1(x)$ est de la forme :

$$v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$$

Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, nous obtenons que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in I$$

Donc, par définition, $v(x)$ est la solution générale.

□

Proposition pour le Wronskien

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ (EDL2 homogène).

$v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

Preuve $\Longleftarrow$

Démontrons ce point par la contraposée. Nous voulons donc montrer que les solutions sont linéairement dépendantes implique qu'il existe $x \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x) = 0$.

Puisque nos deux solutions sont linéairement dépendantes, nous pouvons prendre sans perte de généralité qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = cv_2(x)$ (si plutôt $v_2(x) = cv_1(x)$, nous pourrions juste échanger les noms, d'où le “sans perte de généralité”).

Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} W[v_1, v_2](x) &= \det\begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} \\ &= cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) \\ &= 0, \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé que le Wronskien est nul pour tout x sur cet intervalle, donc il existe bien un x pour lequel il est égal à 0.

Preuve $\implies$

Prouvons aussi cette affirmation par la contraposée. Nous voulons donc montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x_0) = 0$, alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes.

Puisqu'il existe un tel $x_0 \in I$, nous savons que :

$$\det\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, le kernel de cette matrice est est non-trivial (il n'est pas de dimension 0), donc il existe un vecteur non nul $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} av_1(x_0) + bv_2(x_0) = 0 \\ av_1'(x_0) + bv_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit $v(x) = av_1(x)+bv_2(x)$. Alors, $v(x)$ est une solution de l'équation donnée par la superposition des solutions. De plus, par le système d'équations que nous venons de trouver, nous avons $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'équation $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) = 0$, cette équation admet une seule solution satisfaisant $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. Puisque la solution triviale $y(x) = 0\ \forall x \in I$ satisfait l'équation et les conditions initiale, alors nécessairement :

$$v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Puisque a et b ne sont pas les deux nuls, soit nous avons $v_1(x) = \frac{-b}{a}v_2(x)$ pour tout $x \in I$, soit nous avons $v_2(x) = -\frac{a}{b}v_1(x)$ pour tout $x \in I$ (soit les deux).

Nous avons donc bien trouvé que $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes sur I.

$\square$

Idée de la preuve

On démontre que $Q \implies P$ et $P \implies Q$ par la contraposée car P et Q sont des propositions “négatives” : il est beaucoup plus simple d'avoir une fonction qui est parfois égale à 0, ou deux fonctions qui sont linéairement dépendantes.

Théorème : Forme des solutions aux EDL2 homogènes

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.
Alors, la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Preuve

Soit $\widetilde{v}(x)$ une solution quelconque de l'équation donnée, et soit $x_0 \in I$. Soient aussi $a_0 \in \mathbb{R}$ et $b_0 \in \mathbb{R}$ tels que $\widetilde{v}(x_0) = a_0$ et $\widetilde{v}'(x_0) = b_0$.

Par hypothèse, nous avons deux solutions linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$. Ainsi, par la caractérisation, nous savons que $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui implique que $W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$.

Or, quand le déterminant d'une matrice est non-nul (la matrice est dite *non-dégénérée*), nous savons qu'une équation l'utilisant a une solution unique. Ainsi, nous savons qu'il existe d'uniques constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} C_1 v_1(x_0) + C_2 v_2(x_0) = a_0 \\ C_1 v_1'(x_0) + C_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$. Nous pouvons voir deux informations. La première est que $v(x)$ est une solution de l'équation (puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions). La deuxième est que $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$.

Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution des EDL2 homogènes satisfaisant des conditions initiales données $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$, on a $\widetilde{v}(x) = v(x)$ pour tout $x \in I$. Nous avons donc bien montré que notre solution de départ est de la bonne forme.

□

Proposition : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Pour tout $\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$|\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \rangle| \leq \|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\| \cdot \|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\|$$

Preuve

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la somme $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2$.

Nous savons que $\sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 \geq 0$, puisque c'est une somme de termes positifs :

$$0 \leq \sum_{i=1}^n (\lambda x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\lambda^2 x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2\right)$$

Et donc :

$$0 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{a} \lambda^2 + 2\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)}_{b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}_{c}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Nous avons obtenu une équation quadratique selon λ qui est toujours positive. Ainsi, on remarque qu'il est impossible que cette équation ait deux racines, sinon, par le théorèmes des valeurs intermédiaires, elle serait négative en certains points. Nous savons donc qu'elle a un discriminant négatif :

$$b^2 - 4ac \leq 0 \implies 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i\right)^2}_{=\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \rangle^2} - 4\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)}_{=\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\|^2}\underbrace{\left(\sum_{i=1}^n y_i^2\right)}_{=\|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\|^2} \leq 0$$

Ce qui implique que :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right\|^2 \cdot \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\right\|^2 \geq \left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \right\rangle^2 \implies \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\right\| \geq \left|\left\langle \overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \right\rangle\right|$$

Puisque $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right\|$ et $\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{y}}\right\|$ sont positifs, nous pouvons enlever leur valeur absolue. Cependant, nous ne pouvons pas enlever celle du produit scalaire, car elle peut être négative (enfin nous pourrions, puisque $|x| \geq x$, mais nous perdrions de l'information).

□

Théorème : Lien entre les suites dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right\} \subset E$ d'éléments de E qui converge a pour limite un élément de E.

Preuve $\implies$ Nous supposons que $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.

Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right\} \subset E$ d'éléments de E qui converge et qui a pour limite $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \notin E$. Ainsi, on sait que $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in CE$, qui est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ (puisque E est fermé par hypothèse). Puisque cet ensemble est ouvert nous savons, par définition, que $\exists \delta > 0$ tel que :

$$B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \delta\right) \subset CE$$

Or, cela implique que :

$$\underbrace{\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\ \forall k \in \mathbb{N}\right\}}_{\subset E} \cap \underbrace{B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \delta\right)}_{\subset CE} = \varnothing$$

En d'autres mots, aucun élément de la suite ne fait partie de cette boule ouverte.

De l'autre côté, puisque $\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x}}$, nous avons qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$:

$$\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} \in \overline{B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \frac{\delta}{2}\right)} \subset B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \delta\right)$$

En d'autres mots, pour $k \geq k_0$, $\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}$ fait partie de notre boule ouverte. Ceci entre en contradiction avec ce que nous avions vu ci-dessus.

□

Preuve $\impliedby$ Nous allons démontrer notre proposition par la contraposée : nous voulons montrer que si $E \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas fermé, alors il existe une suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} \subset E\right\}$ d'éléments de E qui converge et qui a pour un limite un élément qui n'est pas dans E.

Puisque nous savons que E n'est pas fermé, nous savons que CE n'est pas ouvert. Ainsi, $\exists \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in CE$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \varepsilon\right) \cap E \neq \varnothing$$

Plus précisément, on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{k}$, ce qui nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}_+,\ B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \frac{1}{k}\right) \cap E \neq \varnothing$$

Ceci implique que, pour tout k, on sait qu'il existe un $\overrightarrow{\boldsymbol{y_k}}$ tel que $\overrightarrow{\boldsymbol{y_k}} \in B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \frac{1}{k}\right)$ et $\overrightarrow{\boldsymbol{y_k}} \in E$. Ceci nous donne une suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{y_k}}\right\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset E$ telle que $\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{\boldsymbol{y_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in CE$, et donc $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \notin E$.

□

Théorème : Caractérisation des limites à partir des suites convergentes

Une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$ si et seulement si *pour toute* suite d'éléments $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\}$ de $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in E \text{ tel que } \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\}$, qui converge vers $\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$, la suite $\left\{f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right)\right\}$ converge vers ℓ. En d'autres mots :

$$\left(\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \ell\right) \iff \left(\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) = \ell,\ \forall\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\} \text{ telle que } \lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right)$$

Preuve $\implies$

Nous savons par hypothèse que $\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) = \ell$. Ainsi, par la définition de la limite, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$0 < \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta \implies \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Soit une suite arbitraire $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\}$ telle que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$. Puisque la définition des limites pour les suites marche pour tout $\widetilde{\varepsilon}$, nous pouvons prendre $\widetilde{\varepsilon} = \delta$. Ainsi, par définition, pour $\widetilde{\varepsilon} = \delta > 0$, nous savons que $\exists k_0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta$$

Or, puisque $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right\} \subset E \setminus \left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x}}_0\right\}$, nous savons que $\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \geq k_0$, $0 < \left\|\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta$. Cependant, cela implique par la première implication que :

$$\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Ainsi, nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe k_0 tel que pour tout $k \geq k_0$ on a $\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$. En d'autres mots, nous avons montré que :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a_k}}\right) = \ell$$

Preuve $\impliedby$

Nous allons faire cette preuve par la contraposée. Ainsi, nous supposons par hypothèse que $\lim_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \to \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right) \neq \ell$.

Par la définition de la limite, on obtient que $\exists\varepsilon > 0$ tel que $\forall\delta > 0$, $\exists\overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}}$ tel que :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \delta \quad \text{et} \quad \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_\delta}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$$

Puisque c'est vrai pour tout δ, alors c'est aussi vrai pour le cas particulier où $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$. Ainsi, pour le ε dont nous connaissons l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il existe $\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} \in E$ tel que :

$$\left\|\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} - \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}\right\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad \left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$$

On obtient la suite $\left\{\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ qui est telle que, par la définition, $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{\boldsymbol{x_k}} = \overrightarrow{\boldsymbol{x_0}}$. Cependant, cette suite est aussi telle que $\left|f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) - \ell\right| > \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, ce qui implique que :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x_k}}\right) \neq \ell$$

□

Théorème du min et du max sur un compact

Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum, i.e. :

$$\exists \max_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in E} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right), \quad \exists \min_{\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in E} f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}\right)$$

Preuve $f(E)$ est borné

Nous voulons commencer par montrer que $\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right)\right\}_{\overrightarrow{x} \in E}$ est borné.

Supposons par l'absurde que $f(E)$ n'est pas borné, c'est à dire que pour tout $k \geq 0$, il existe un $\overrightarrow{x_k} \in E$ tel que $\left|f\left(\overrightarrow{x_k}\right)\right| \geq k$. Ceci nous donne une suite $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\} \in E$.

Puisque E est un ensemble compact, nous savons qu'il est borné, et donc $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\}$ est bornée. Ainsi, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons trouver une sous suite convergente $\left\{\overrightarrow{x_{k_p}}\right\}$, qui a pour limite un vecteur $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Puisque E est compact (et donc fermé), nous savons que $\overrightarrow{x_0} \in E$.

Puisque f est continue, nous savons que :

$$\lim_{p \to \infty} f\left(\overrightarrow{x_{k_p}}\right) = f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \in \mathbb{R}$$

Mais, par construction, $\left|f\left(\overrightarrow{x_k}\right)\right| \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui est notre contradiction. Nous en concluons que f est bornée sur E.

Preuve f atteint ses extremum

Nous voulons montrer que f atteint son minimum et son maximum sur E.

Par ce que nous venons de démontrer, nous savons que $f(E)$ est un sous-ensemble borné. Ainsi :

$$\exists M = \sup\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right), \overrightarrow{x} \in E\right\}, \quad \exists m = \inf\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right), \overrightarrow{x} \in E\right\}$$

Par la définition du supremum et de l'infimum, nous pouvons nous en rapprocher arbitrairement, donc cela implique qu'il existe deux suites $\left\{\overrightarrow{a_k}\right\}, \left\{\overrightarrow{b_k}\right\} \in E$ telles que :

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{a_k}\right) = m, \quad \lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{b_k}\right) = M$$

Or, puisque $\left\{\overrightarrow{a_k}\right\}, \left\{\overrightarrow{b_k}\right\} \in E$ (qui est borné), ce sont des suites bornées, et donc il existe des sous-suites convergentes. En d'autres mots :

$$\overrightarrow{a_{k_p}} \to \overrightarrow{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{b_{k_p}} \to \overrightarrow{b} \in \mathbb{R}^n$$

De plus, puisque E est compact (et donc fermé), nous savons que $\overrightarrow{a} \in E$ et $\overrightarrow{b} \in E$. Ainsi, par la continuité de f :

$$m = \lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{a_k}\right) = \lim_{p \to \infty} f\left(\overrightarrow{a_{k_p}}\right) = f\left(\overrightarrow{a}\right)$$

$$M = \lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{b_k}\right) = \lim_{p \to \infty} f\left(\overrightarrow{b_{k_p}}\right) = f\left(\overrightarrow{b}\right)$$

Ainsi, nous savons qu'il existe $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in E$ tels que :

$$f\left(\overrightarrow{a}\right) = m = \min_{\overrightarrow{x} \in E} f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

$$f\left(\overrightarrow{b}\right) = M = \max_{\overrightarrow{x} \in E} f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

□

Proposition : Hypothèses équivalentes pour le théorème de la condition suffisante pour un extremum local quand $n = 2$

Dans le cas où $n = 2$, nous pouvons réécrire les conditions de notre théorème.

Notre matrice Hessienne est donnée par :

$$\mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Nous avons les équivalences suivantes :

1. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff \det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) > 0$ et $r > 0$
2. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff \det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) > 0$ et $r < 0$
3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \iff \det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) < 0$

Preuve

Pour commencer, nous savons que le déterminant et la trace d'une matrice sont des invariants de conjugaisons. Ainsi, si on a :

$$O\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}O^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = O^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}O$$

Alors, on obtient :

$$rt - s^2 = \det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \det(O)\lambda_1\lambda_2 \det\left(O^{-1}\right) = \lambda_1\lambda_2$$

$$r+t = \mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \mathrm{Tr}\left(ODO^{-1}\right) = \mathrm{Tr}\left(O^{-1}OD\right) = \mathrm{Tr}(D) = \lambda_1+\lambda_2$$

Preuve point 1 $\implies$

Commençons par montrer la direction $\implies$. Ainsi, nous supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Alors, clairement, $\det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Aussi, nous voyons que :

$$\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0 \implies rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$$

donc r et t sont de même signe.

Nous pouvons aussi voir que :

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \underbrace{\lambda_1}_{>0} + \underbrace{\lambda_2}_{>0} = r + t > 0$$

donc r et t doivent être les deux strictement positifs, puisqu'ils ont le même signe.

Nous en déduisons bien que $\det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) > 0$ et $r > 0$.

Preuve point 1 $\impliedby$

Supposons que $\det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) > 0$ et $r > 0$.

Alors, puisque $\det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, nous en déduisons que λ_1 et λ_2 sont de même signe. De plus, nous voyons aussi que $rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$.

Ainsi, puisque $rt > 0$ et $r > 0$, nous obtenons que $t > 0$. De plus, cela implique que :

$$\mathrm{Tr}\,\mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = \underbrace{r}_{>0} + \underbrace{t}_{>0} > 0$$

Puisque λ_1 et λ_2 sont de mêmes signes, et $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, nous en déduisons bien que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

Preuve point 2 $\implies$

Commençons par montrer la direction $\implies$. Ainsi, nous supposons que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

Alors, clairement, $\det \mathrm{Hess}_f\left(\overrightarrow{\boldsymbol{a}}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Aussi, nous voyons que :

$$\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0 \implies rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$$

donc r et t sont de même signe.

Nous pouvons aussi voir que :

$$\operatorname{Tr}\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = \underbrace{\lambda_1}_{<0} + \underbrace{\lambda_2}_{<0} = r + t < 0$$

donc r et t doivent être les deux strictement négatifs, puisqu'ils ont le même signe.

Nous en déduisons bien que $\det\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) > 0$ et $r < 0$.

Preuve point 2 $\Longleftarrow$

Supposons que $\det\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) > 0$ et $r < 0$.

Alors, puisque $\det\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, nous en déduisons que λ_1 et λ_2 sont de même signe. De plus, nous voyons aussi que $rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$.

Ainsi, puisque $rt > 0$ et $r < 0$, nous obtenons que $t < 0$. De plus, cela implique que :

$$\operatorname{Tr}\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = \underbrace{r}_{<0} + \underbrace{t}_{<0} < 0$$

Puisque λ_1 et λ_2 sont de mêmes signes, et $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, nous en déduisons bien que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

Preuve point 3

Nous voyons que :

$$\det\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 < 0 \iff \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont de signes opposés}$$

Note personnelle

La démonstration de ce théorème peut sembler très longue et compliquée, mais elle ne l'est pas ! À partir du moment où on sait que le déterminant est donné par $ad - bc$ et que la trace est donnée par la somme des éléments diagonaux, il suffit de poser nos hypothèses et de simplement voir ce que nous pouvons en déduire, en gardant en tête où nous voulons aller.

Théorème : Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte quand $n = 2$

Soit l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ et soient les fonctions $f, g : E \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^1. Supposons que $f(x, y)$ admette un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$, et que $\nabla g(a, b) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$.

Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé le **multiplicateur de Lagrange**, tel que :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Preuve

Nous savons que $\nabla g(a, b) \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$, donc au moins l'une des dérivées partielles est non-nulle. Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a, b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a, b) \neq 0$ est similaire).

Nous avons $g(a, b) = 0$ puisque (a, b) satisfait la contrainte $g(x, y) = 0$. Ainsi, par le TFI, il existe une fonction $y = h(x)$ de classe C^1 au voisinage de $x = a$ telle que :

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))}, \quad \text{avec } g(x, h(x)) = 0$$

Aussi, pour (x, y) satisfaisant notre contrainte $g(x, y) = 0$, nous pouvons remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x, y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable :

$$f(x, y) \overset{\text{si } g(x,y) = 0}{=} f(x, h(x))$$

Nous savons que les extrema de cette fonction, respectent :

$$f'(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x))h'(x) = 0$$

Par hypothèse, (a, b) est un point d'extremum, et il respecte la contrainte $g(a, b) = 0$, donc les hypothèses de l'équation que nous venons d'obtenir sont bien respectées, ce qui nous permet de trouver que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h'(a)$$

Pour résumer, nous avons trouvé jusque là que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)h'(a), \quad h'(a) \overset{\text{TFI}}{=} -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$$

Ceci implique que :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{v_1} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{v_2} \frac{\overbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}^{u_1}}{\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}_{u_2 \neq 0}}$$

Séparons notre preuve en différents cas. Si $u_1 = 0$, alors $v_1 = 0$ et donc $\nabla f(a, b) = (0, v_2)$ et $\nabla g(a, b) = (0, u_2)$. Ceci implique bien qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = \lambda \underbrace{u_2}_{\neq 0}$ et donc :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Sinon (si $u_1 \neq 0$), alors, en définissant $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R}$, nous trouvons :

$$(v_1, v_2) = \lambda(u_1, u_2) \iff \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

□

Intuition de la preuve

Nous trouvons $f(x, y)$ sous la forme d'une fonction d'une seule variable et la dérivons, puis nous utilisons le théorème des fonctions implicites, ce qui nous permet de trouver un lien entre les dérivées de f et celles de g.

Chapitre 3

Méthodes de démonstration et raisonnement mathématique

3.1 Introduction

Définition de proposition Une **proposition** est un énoncé qui est vrai ou faux.

Exemple Considérons les phrases suivantes :

1. Il existe une infinité de nombres premiers.
2. $\cos(0) = 0$
3. Ouvrez la porte !

On a alors :

1. C'est une proposition vraie, démontrée par Euclid (et j'aime beaucoup sa preuve).
2. C'est une proposition fausse (on sait tous que $\cos(x) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$).
3. Ce n'est pas une proposition.

Définition de démonstration Une **démonstration** est une suite d'implications logiques qui sert à dériver la proposition en question à partir des **axiomes** (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenues.

Exemple 1 Soient $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geq 0$. Alors :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

Notez que ceci est l'inégalité AM-GM, et elle est très puissante.

Démonstration Partons de ce que nous voulons démonter :

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \implies a+b \geq 2\sqrt{ab} \implies (a+b)^2 \geq 4ab$$

Ce qui implique que :

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies (a-b)^2 \geq 0$$

Or, nous savons que pour tout $x \in \mathbb{R}$, nous avons $x^2 \geq 0$, donc notre proposition est vraie.

Cependant, ceci n'est pas une vraie preuve, nous avons utilisé un argument frauduleux ce qui la rend fallacieuse. En effet, si P et Q

sont deux propositions sont telles que $P \implies Q$, et si nous savons que Q est vraie, alors cela n'implique pas nécessairement que P soit vraie. Nous allons voir un exemple d'utilisation de cet argument à tort après la vraie démonstration de ce théorème.

Vraie démonstration Tout ce qu'on a fait n'est cependant pas à jeter, nous pouvons, dans notre cas, faire le chemin dans l'autre sens.
Soient $a, b \in \mathbb{R}$ où $a, b \geq 0$. Nous avons que $(a-b)^2 \geq 0$ puisque $x^2 \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors :

$$(a-b)^2 \geq 0 \implies a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \implies a^2 + 2ab + b^2 \geq 4ab$$

Ce qui implique que :

$$(a+b)^2 \geq 4ab \overset{a,b \geq 0}{\implies} (a+b) \geq 2\sqrt{ab} \implies \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

□

Note personnelle Je préfère personnellement faire cette preuve en commençant par $\left(\sqrt{a} - \sqrt{b}\right)^2 \geq 0$, mais l'argument est le même.

Exemple Disons que nous voulons montrer que $-5 = 0$. Ceci est clairement faux, mais utilisons le même argument fallacieux :

$$-5 = 0 \overset{\cdot 0}{\implies} 0 = 0$$

Note personnelle Le problème est que nous voulons non pas montrer que $-5 = 0 \implies 0 = 0$, mais $0 = 0 \implies -5 = 0$. Cependant, même si partir de là où on veut arriver peut nous donner un chemin, il faut refaire ce chemin dans l'autre sens pour avoir une preuve formelle. Parfois, nous ne pouvons pas faire ce chemin dans l'autre sens, comme dans ce cas puisqu'il nous faudrait diviser par 0. Il faut aussi faire attention quand on met les deux côté de notre équation au carré puisqu'on la fonction $f(x) = x^2$ n'est pas bijective, donc :

$$a = b \implies a^2 = b^2$$

alors que l'inverse ne tient pas. Si nous voulons que les deux sens fonctionnent, alors nous avons besoin de valeurs absolues :

$$|a| = |b| \iff a^2 = b^2$$

3.2 Méthodes de démonstration

Méthode 1 : Démonstration directe Nous partons de nos conditions données P, nous utilisons des implications logiques, des axiomes et des propositions connues, puis nous arrivons à notre proposition désirée Q.

Méthode 2 : Raisonnement par contraposée On utilise que $P \implies Q$ est équivalent à $\neg Q \implies \neg P$ (où $\neg$ veut dire “non”).

Exemple Disons que nous voulons montrer que si $r \in \mathbb{R}$ est irrationnel (P), alors $\sqrt{r}$ est aussi irrationnel (Q).

Démonstration Nous voulons montrer ça par la contraposée. La contraposée de notre proposition est que si $\sqrt{r}$ est rationnel ($\neg Q$), alors r est rationnel ($\neg P$).
Ainsi, puisque $\sqrt{r}$ est rationnel, on sait que :

$$\sqrt{r} = \frac{p}{q}, \quad \text{où } p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$$

On sait que $\sqrt{r} > 0$, donc on a bien que $p, q \geq 0$.
Continuous notre démonstration :

$$\sqrt{r} = \frac{p}{q} \implies r = \frac{p^2}{q^2}$$

qui est rationnel puisque $p^2, q^2 \in \mathbb{N}, q^2 \neq 0$.
Par contraposée, cela implique donc que, si $r \in \mathbb{R}_+$ est irrationnel, alors $\sqrt{r}$ l'est aussi.

□

Preuve frauduleuse Nous cherchons l'erreur dans l'argument suivant :

$$3 > 2 \iff 3\ln\left(\frac{1}{2}\right) > 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right) > \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right) \iff \frac{1}{8} > \frac{1}{4}$$

L'erreur est courante lorsqu'on manipule des inégalités : il faut changer le signe de l'implication quand on multiplie par un nombre négatif. Or, on sait que :

$$\ln(x) < 0, \forall x \in \left]0, 1\right[\implies \ln\left(\frac{1}{2}\right) < 0$$

Lundi 28 février 2022 — **Cours 3 : Dsiijonctions de cas**

Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas Soient P, Q deux propositions. Pour montrer que $P \implies Q$, on sépare l'hypothèse de P de départ en différents cas possibles et on montre l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer tous les cas possibles.

Exemple 1 Soit $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $n^2 \geq n$.

Preuve Nous savons que :

$$n^2 \geq n \iff n(n-1) \geq 0$$

Nous pouvons donc démontrer la deuxième propriété pour démontrer la première.
Premièrement, considérons $n \geq 1$. Alors.

$$\underbrace{n}_{>0}\underbrace{(n-1)}_{\geq 0} \geq 0$$

Deuxièmement, prenons $n \leq 0$:

$$\underbrace{n}_{\leq 0}\underbrace{(n-1)}_{<0} \geq 0$$

Or, on sait bien que :

$$\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} \cup \{n \in \mathbb{Z} : n \leq 0\}$$

Tout ceci nous permet de conclure que notre inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

□

Exemple 2 Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$t = \frac{nm(n-m)(n+m)}{3} \in \mathbb{Z}$$

Preuve

1. On remarque que pour $n = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, on voit clairement que $t \in \mathbb{Z}$.
2. De manière similaire, si $m = 3k$, $k \in \mathbb{Z}$, alors $t \in \mathbb{Z}$.
3. Nous considérons que ni m ni n n'est divisible par 3. Nous pouvons maintenant considérer deux sous cas :
   (a) Supposons que m et n ont les même restes de division par 3. Alors, $n - m = 3k$, donc $t \in \mathbb{Z}$.
   (b) Supposons que les restes de division par 3 de n m sont différents. Alors, $n + m = 3k, k \in \mathbb{Z}$ donc $t \in \mathbb{Z}$.

Nous avons démontré tous nos cas, ce qui conclut notre preuve.

□

Méthode 4 : Démonstrations ssi Nous cherchons à démontrer les propositions de la forme :

$$P \iff Q$$

La première méthode consiste à démontrer que :

$$P \implies Q \quad \text{et} \quad Q \implies P$$

Plus rarement, on peut aussi faire une suite d'équivalences entre P et Q :

$$P \iff R_1 \iff \ldots \iff R_n \iff Q$$

Pour cette deuxième méthode, il faut faire attention au fait que chaque implication est une équivalence.

Exemple 1 Soient $a, b \in \mathbb{N}$. Alors :

$$ab + 1 = c^2, c \in \mathbb{N}^* \iff a = b \pm 2$$

Preuve Regardons la suite d'équivalence suivante :

$$ab + 1 = c^2 \iff ab = c^2 - 1 \iff ab = (c-1)(c+1)$$

Ce qui est équivalent à soit $a = c - 1$ et $b = c + 1$, soit l'inverse. Dans le premier cas, $a = b - 2$, dans le deuxième $a = b + 2$.

En fait, cette dernière phrase est fausse, on pourrait avoir $ab = 4 \cdot 9$ avec $a = 2$ et $b = 18$. En fait, l'affirmation que nous voulions montrer est uniquement vraie pour $\impliedby$. On peut par exemple trouver le contre-exemple $a = 3$ et $b = 8$.

Preuve correcte Nous voulons montrer que :

$$a = b \pm 2 \implies ab + 1 = c^2, c \in \mathbb{N}$$

Partons du début de notre implication :

$$\begin{aligned} & a = b \pm 2 \in \mathbb{N} \\ \implies & ab + 1 = b(b \pm 2) + 1 = b^2 \pm 2b + 1 = (b \pm 1)^2 = c^2 \\ \implies & c = b \pm 1 \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

□

Exemple 2 Soient $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$. Nous prenons les propositions suivantes :

$$P : \left\{z^2 \in \mathbb{R}^*\right\}, \quad Q : \left\{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Nous nous demandons quelle proposition implique laquelle. Nous allons montrer que c'est un si et seulement si.

Preuve $\Longleftarrow$ Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ où $\varphi = \frac{k\pi}{2}$. Ainsi :

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\frac{k\pi}{2}} = \rho^2 e^{i\pi k} = \rho^2(\cos(\pi k) + i\sin(\pi k)) = \rho^2(\pm 1) \in \mathbb{R}^*$$

Preuve $\Longrightarrow$ Soit $z = \rho e^{i\varphi}$ tel que $z^2 \in \mathbb{R}^*$. Alors :

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 \left(\cos(2\varphi) + i\underbrace{\sin(2\varphi)}_{=0}\right) \in \mathbb{R}^*$$

La partie imaginaire, le sinus, est nulle par hypothèse. Ainsi :

$$\sin(2\varphi) = 0 \implies 2\varphi = k\pi \implies \varphi = \frac{k\pi}{2}$$

où $k \in \mathbb{Z}$.

□

Mercredi 9 mars 2022 — **Cours 6 : Le meilleur mathématicien**

Méthode 5 : Démonstration par l'absurde Pour démontrer une proposition P, on essaie de démontrer que $\neg P$ implique une proposition fausse bien connue F. En d'autres mots, on obtient $\neg P \implies F$ qui est contradictoire aux axiomes, ou aux propositions vraies préalablement établies.

Comparaison avec la contraposée Par la contraposée, on démontre que $\neg Q \implies \neg P$, qui est équivalent à $P \implies Q$.

Par l'absurde, on démontre qu'une proposition P est fausse, en montrant que $\neg P \implies F$ est évidemment fausse. Notez que, pour une démonstration par l'absurde, nous n'avons pas besoin d'avoir un théorème sous la forme d'une implication $P \implies Q$.

Exemple 1 Il existe une infinité de nombres premiers.
La démonstration qui suit a été imaginée par Euclid (le best).

Preuve Supposons par l'absurde qu'il existe seulement un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de nombres premiers : $p_1, \ldots, p_n$.
Considérons le nombre $K = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$. On remarque que $K > p_i$ pour tout $p_i \in \{p_1, \ldots, p_n\}$, ainsi $K \neq p_i$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Nous pouvons déduire de ce fait que K n'est pas un nombre premier car il est plus grand que 1 par construction, et ne fait pas partie de la liste. Ainsi, par définition des nombres premiers, cela implique que K est divisible par un nombre premier, disons p_i.

Clairement, $p_1 p_2 \cdots p_n$ est aussi divisible par p_i. Ainsi, $K - p_1 p_2 \cdots p_n$ est aussi divisible par p_i. Cependant, $K - p_1 p_2 \cdots p_n = 1$, mais 1 n'est divisible par aucun nombre premier, ce qui est notre contradiction.

□

Exemple 2 $\sqrt{3}$ est irrationnel.
La démonstration qui suit a aussi été imaginée par Euclid (le best, ça change pas).

Preuve Supposons par l'absurde que $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ où $p, q \in \mathbb{N}, q \neq 0$, tel que q est le plus petit possible (on utilise l'axiome de bon ordre : tout sous-ensemble non-vide de $\mathbb{N}$ possède un plus petit élément, ici les dénominateur des fractions forment un sous-ensemble, donc nous pouvons appliquer ce principe ici).
Alors, on obtient que :

$$\begin{aligned} & 3 = \frac{p^2}{q^2} \\ \implies & 3q^2 = p^2 \\ \implies & p^2 \text{ est divisible par } 3 \\ \overset{\dagger}{\implies} & p \text{ est divisible par } 3 \end{aligned}$$

L'implication † est démontrée dans le sous-paragraphe suivant.
Puisque p est divisible par 3, nous pouvons écrire $p = 3m$ où $m \in \mathbb{N}$, et donc :

$$3q^2 = (3m)^2 = 9m^2 \implies q^2 = 3m^2$$

Ainsi, par le même argument, q est divisible par 3. Nous trouvons donc que $q = 3n$, pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cela nous donne que :

$$\frac{p}{q} = \frac{3m}{3n} = \frac{m}{n}, \quad \text{où } n < q$$

Cependant, c'est une contradiction au principe de bon ordre.

□

Implication † Soit $p = 3k + r$, où $r \in \{1, 2\}$. Alors, nous avons :

$$p^2 = (3k + r)^2 = 9k^2 + 6kr + r^2, \quad \text{où } r^2 \in \{1, 4\}$$

Ainsi, on obtient que p n'est pas divisible par 3 implique que p^2 n'est pas divisible par 3. Par la contraposée, cela veut dire que p^2 est divisible par 3 implique que p est divisible par 3.

Lundi 14 mars 2022 — **Cours 7 : Les tiroirs et les chaussettes**

Méthode 6 : Principe des tiroirs et des chaussettes de Dirichlet Si $(n + 1)$ objets sont placé dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.
Plus généralement, si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets, ou plus.

Définition : Fonction plafond La fonction plafond est simplement un arrondi vers le haut, mais nous pouvons la définir formellement comme :

$$\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil \overset{\text{déf}}{=} \min\left\{ m \in \mathbb{N} \text{ tel que } m \geq \frac{n}{k} \right\}$$

Exemple 1 Soient a_1, a_2, a_3, a_4 des nombres entiers. Alors, il existe 2 d'entre eux tels que leur différence est divisible par 3.

Preuve Soient r_1, r_2, r_3, r_4 les restes de division de a_1, a_2, a_3, a_4 par 3. Nous savons que $r_1, r_2, r_3, r_4 \in \{0, 1, 2\}$. Alors, nous savons qu'il existe i, j avec $i \neq j$ pour lequel $r_i = r_j$, par le principe des tiroirs et des chaussettes de Dirichlet. Or, puisque a_i et a_j ont le même reste, nous savons que $a_i - a_j$ est divisible par 3. En effet, $a_i = 3m + r$ et $a_j = 3n + r$ où $m, n \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2\}$, donc :

$$a_i - a_j = 3m + r - (3n + r) = 3(m - n)$$

□

Exemple 2 Dans un groupe de n personnes, où $n \geq 2$, il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances dans le groupe.

Preuve Utilisions la disjonction de cas.

1. Supposons qu'il y a quelqu'un qui ne connait personne dans le groupe.
   Alors, clairement, il n'existe personne qui connait tout le monde. On obtient donc que le nombre K de connaissances pour chacun est entre 0 et $(n-2)$, ce qui représente $(n-1)$ possibilités. Par le principe des tiroirs de Dirichlet, puisqu'il y a n personnes et $(n-1)$ possibilités, il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances.
2. Supposons maintenant que tout le monde connait au moins quelqu'un dans le groupe.
   Puisque personne ne connait personne, nous savons que $1 \leq K \leq n-1$. Ainsi, nous avons à nouveau $(n-1)$ possibilités pour n personnes, et donc, par le principe des tiroirs, il existe au moins 2 personnes avec le même nombre de connaissances.

□

Lundi 28 mars 2022 — **Cours 11 : Récurrence**

Méthode 7 : Récurrence Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, où $n \geq n_0$. Supposons que :

1. $P(n_0)$ est vraie.
2. $P(n)$ implique que $P(n+1)$ pour tous $n \geq n_0$ naturels.

Alors $P(n)$ est vraie pour tous $n \geq n_0$.

Remarque Cette méthode de démonstration découle directement de l'axiome suivant (le principe fondamental de la récurrence) :

Soit $S \subset \mathbb{N}$. Si ce sous-ensemble est tel que $0 \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in S$ on a $(n+1) \in S$, alors, $S = \mathbb{N}$.

Exemple L'inégalité suivante tient pour tout $n \geq 1$ naturels :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

Preuve Puisque nous voulons montrer ceci pour tout n, alors c'est intéressant de le faire par récurrence.

À l'examen, il est important de dire quelle est la proposition que nous essayons de démontrer, ainsi, nous voulons montrer $P(n)$, où :

$$P(n) : 1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

1. Commençons par l'initialisation. $P(1)$ est bien vraie car :

$$1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$$

2. Faisons maintenant l'hérédité. Nous supposons que $P(n)$ est vraie (hypothèse de récurrence, HR), et nous voulons en déduire $P(n+1)$. Commençons par le côté gauche de $P(n+1)$:

$$\begin{aligned}
1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} &\overset{\text{HR}}{\leq} 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n^2+n+1}{n(n+1)^2} \\
&= 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} - \underbrace{\frac{1}{n(n+1)^2}}_{>0} \\
&\leq 2 - \frac{1}{n+1}
\end{aligned}$$

   Nous avons donc aussi montré $P(n+1)$.

3. Pour finir, il ne faut pas oublier la conclusion, qui est aussi importante. Puisque $P(1)$ est vraie et $P(n) \implies P(n+1)$, nous avons montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$, où $n \in \mathbb{N}$.

□

Récurrence généralisée

Soit $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, où $n \geq n_0$. Supposons qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que :

1. $P(n_0), \ldots, P(n_0 + k)$ sont vraies.
2. $\{P(n), \ldots, P(n+k)\}$ impliquent $P(n+k+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, où $n \in \mathbb{N}$.

Définition : Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci (f_n) est définie telle que :

$$f_1 = 1, \quad f_2 = 1, \quad f_{n+2=f_n+f_{n+1}}$$

Les premiers termes de cette suite sont :

$$1, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 5, \quad 8, \quad 13, \quad 21, \quad \ldots$$

Exemple

Pour tout $n \geq 3$, nous avons :

$$3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}$$

Preuve Notre proposition $P(n)$ est définie comme :

$$P(n) : 3f_n = f_{n+2} + f_{n-2}, \quad \forall n \geq 3$$

1. Faisons la base. $P(3)$ fonctionne car :

$$3 \cdot 2 = 5 + 1$$

   De plus, $P(4)$ tient aussi :

$$3 \cdot 3 = 8 + 1$$

2. Passons maintenant à l'hérédité. Puisque nous utilisons le principe de la récurrence généralisée, nous supposons que $P(n)$ et $P(n+1)$ sont vraies (HR), pour un $n \geq 3$. Nous voulons démontrer que

$P(n+2)$ est vraie :

$$\begin{aligned} 3f_{n+2} &\overset{\text{déf}}{=} 3f_n + 3f_{n+1} \\ &\overset{\text{HR}}{=} (f_{n+2} + f_{n-2}) + (f_{n+3} + f_{n-1}) \\ &= \underbrace{f_{n+2} + f_{n+3}}_{=f_{n+4}} + \underbrace{f_{n-2} + f_{n-1}}_{=f_n} \\ &= f_{n+4} + f_n \end{aligned}$$

Ce qui montre bien que $P(n+2)$ est vraie.

3. Pour conclure, nous avons montrer que $P(3)$ et $P(4)$ sont vraies, puis que $P(n) \land P(n+1) \implies P(n+2)$. Ainsi, par récurrence généralisée, nous avons montré que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$, où $n \in \mathbb{N}$.

□

Mercredi 6 avril 2022 — **Cours 14 : Récurrence forte**

Récurrence forte Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N}$, où $n \geq n_0$.
Supposons que :

1. $P(n_0)$ est vraie.
2. $\{P(n_0), P(n_0+1), \ldots, P(n)\}$ impliquent $P(n+1)$, pour tout $n \geq n_0$, $n \in \mathbb{N}$.

Alors, $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$, où $n \in \mathbb{N}$.

Exemple Pour tout $n \geq 2$, où $n \in \mathbb{N}$, n est un produit de facteurs premiers.

Preuve Nous faisons notre démonstration par récurrence forte.

1. Nous voulons montrer $P(2)$. Nous savons que 2 est premier, donc nous pouvons écrire :
$$2 = 2$$
Ce qui montre qu'elle est vraie.
2. Nous considérons que $\{P(2), \ldots, P(n)\}$ sont vraies, et nous voulons montrer que $P(n+1)$ est vraie.
Considérons $(n+1) \in \mathbb{N}$. S'il est premier, alors, par le même argument que pour la base, $P(n+1)$ est vraie.
Sinon, nous savons que $(n+1) = m \cdot k$ où $m, k \in \mathbb{N}$ sont tels que $2 \leq m, k < n+1$. Par notre hypothèse de récurrence, nous savons que $P(m)$ et $P(k)$ sont vraies, donc m et k sont des produits de facteurs premiers. Ceci implique que $(n+1) = m \cdot k$ est aussi un produit de facteurs premiers. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.
3. Puisque la base et l'hérédité tiennent, nous avons démontré par récurrence forte $P(n)$ pour tout $n \geq 2$, où $n \in \mathbb{N}$.

□

Résumé : Récurrence Nos trois méthodes nous permettent de démontrer que $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence simple

1. $P(n_0)$ est vraie.
2. $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence généralisée Soit $k \geq 1$.

1. $P(n_0), \ldots, P(n_0+k)$ sont vraies.
2. $\{P(n), \ldots, P(n+k)\} \implies P(n+k+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Récurrence forte

1. $P(n_0)$ est vraie.
2. $\{P(n_0), \dots, P(n)\} \implies P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.

Lundi 25 avril 2022 — **Cours 17 : Récurrence sur deux variables**

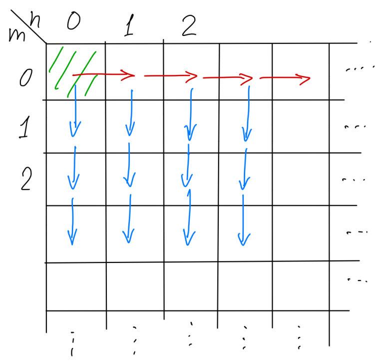
Récurrence sur deux variables

Soit $P(n, m)$ une proposition, où $n, m \geq 0$.
Nous pouvons utiliser différentes méthodes pour la démontrer par récurrence sur deux variables.

Méthode du carré

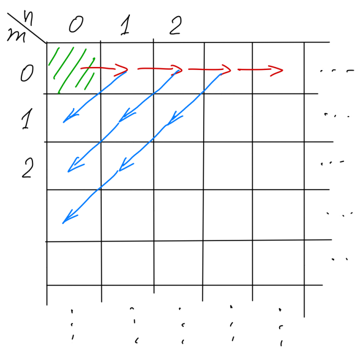
1. $P(0,0)$ est vraie.
2. $\forall n \geq 0, \; P(n,0) \implies P(n+1,0)$
3. $\forall m, n, \; P(n,m) \implies P(n,m+1)$

Notez que, à la place du deuxième point, il est parfois plus simple de démontrer que, pour tout $m, n \geq 0$, $P(n,m) \implies P(n+1,m)$.



Méthode de la diagonale

1. $P(0,0)$ est vraie
2. $\forall n \geq 0, \; P(n,0) \implies P(n+1,0)$
3. $\forall m, n, \; P(n+1,m) \implies P(n,m+1)$



Les deux méthode nous permettent de conclure que $P(n,m)$ est vraie $\forall n, m \in \mathbb{N}$.

Exemple : Nombres de Fibonacci

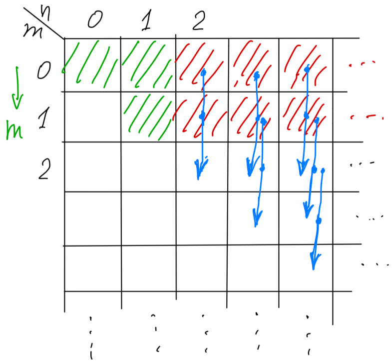
Soit la proposition $P(n,m)$ suivante :

$$f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m},$$

Nous allons montrer $P(n,m)$ pour tous n, m où $0 \leq m \leq n$.

Preuve

Nous allons suivre le schéma suivant, avec la base en verte, et l'hérédité en rouge et en bleue :



1. Base :
$$P(0,0): \quad f_0 f_1 - f_0 f_1 = 0 = (-1)^0 f_0$$
$$P(1,0): \quad f_1 f_1 - f_0 f_2 = 1 - 0 = 1 = (-1)^0 f_1$$
Puisque $n \geq m$, $P(0,1)$ n'existe pas. Cependant, nous aurons aussi besoin de montrer $P(1,1)$:
$$P(1,1): \quad f_1 f_2 - f_1 f_2 = 0 = (-1)^1 f_0$$
2. Hérédité : Nous remarquons que $P(n,0)$ est vraie pour tout $n \geq 0$ (sans récurrence) ;
$$f_n f_1 - f_0 f_{n+1} = f_n - 0 = f_n = (-1)^0 f_n$$
Nous pouvons aussi démontrer que $P(n,1)$ est vraie pour tout $n \geq 1$ (sans récurrence)
$$f_n f_2 - f_1 f_{n+1} = f_n - f_{n+1} = f_n - (f_n + f_{n-1}) = (-1)^1 f_{n-1}$$
Maintenant, nous supposons que $P(n,m)$ et $P(n,m+1)$ sont vraies, et nous voulons démontrer que cela implique que $P(n,m+2)$ est aussi vraie $\forall n \geq m+2$:
$$\begin{aligned}
&f_n f_{m+3} - f_{m+2} f_{n+1} \\
&= f_n(f_{m+1} + f_{m+2}) - (f_m + f_{m+1}) f_{n+1} \\
&= \underbrace{(f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1})}_{(-1)^m f_{n-m}} + \underbrace{(f_n f_{m+2} - f_{m+1} f_{n+1})}_{(-1)^{m+1} f_{n-m-1}} \\
&= (-1)^m (f_{n-m} - f_{n-m-1}) \\
&= (-1)^m f_{n-m-2} \\
&= (-1)^{m+2} f_{n-m-2}
\end{aligned}$$
comme attendu.
3. Nous avons démontré que $P(n,0)$ $\forall n \geq 0$, $P(n,1)$ $\forall n \geq 1$, et $\{P(n,m), P(n,m+1)\} \implies P(n,m+2)$.
Ainsi, nous avons démontré par récurrence sur deux variables que la proposition $P(n,m)$ est vraie pour tout n, m tels que $0 \leq m \leq n$.

Mercredi 11 mai 2022 — **Cours 21 : Résumé**

3.3 Résumé

Résumé

Démonstration directe	Nous partons des conditions données ou de faits connus, Q, et nous faisons des implications logiques pour obtenir notre proposition désirée, P : $$Q \implies \ldots \implies P$$
Par contraposée	Pour montrer $P \implies Q$, nous montrons que $\neg Q \implies \neg P$.
Disjonctions de cas	Nous séparons P en plusieurs sous-cas, puis démontrons chaque cas séparément.
"Si et seulement si"	Pour démontrer $P \iff Q$, nous pouvons soit démontrer que $P \implies Q$ et $Q \implies P$, soit faire une suite d'équivalence entre P et Q : $$P \iff \ldots \iff Q$$
Par absurde	Pour démontrer P, nous démontrons que $\neg P \implies Q$, où Q est une proposition connue d'être fausse.
Par le principe des tiroirs	Si nous avons n objets distribués dans k tirons, alors au moins un tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets.
Par récurrence simple	Pour démontrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$, nous démontrons que $P(n_0)$ est vraie, et que $P(n) \implies P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.
Par récurrence généralisée	Pour démontrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$, nous démontrons $P(n_0), \ldots, P(n_0 + k)$ et $\{P(n), \ldots, P(n+k)\} \implies P(n+k+1)$ pour tout $n \geq n_0$, pour un $k \geq 1$ fixé.
Par récurrence forte	Pour démontrer $P(n)$ pour tout $n \geq n_0$, nous démontrons $P(n_0)$, et $\{P(n_0), \ldots, P(n)\} \implies P(n+1)$ pour tout $n \geq n_0$.
Par récurrence sur deux variables, méthode du carré	Pour démontrer $P(n, m)$ pour tout $m, n \geq 0$, nous démontrons $P(0, 0)$, $P(m, 0) \implies P(m+1, 0)$ pour tout m et $P(m, n) \implies P(m, n+1)$ pour tout m, n.
Par récurrence sur deux variables, méthode de la diagonale	Pour démontrer $P(n, m)$ pour tout $m, n \geq 0$, nous démontrons $P(m, 0) \implies P(m+1, 0)$ pour tout m et $P(m+1, n) \implies P(m, n+1)$ pour tout m, n.

Exemple Il est parfois dur de trouver la méthode de démonstration à utiliser. Prenons les propositions suivantes en tant qu'exemples :

1. Dans une classe de 210 étudiants, il existe au moins 9 personnes avec la même initiale de prénoms.
2. Il n'existe pas de nombres entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $63a = 81 - 21b$.
3. Pour tout $n \geq 2$ naturel, nous avons :
$$\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$
4. Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$, est dérivable en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a} \in E$, alors elle est continue en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}$.
5. Pour tout $n \geq 1$, nous avons :
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$$
6. Pour tout couple $a, b \in \mathbb{Z}$, le nombre $(7a + 4b)(a - 3b)(2a + b)$ est pair.

La meilleure méthode pour les démontrer est probablement :
1. Par le principe des tiroirs et des chaussettes.
2. Par l'absurde.
3. Par récurrence simple.
4. Par démonstration directe.
5. Par démonstration directe (en voyant que c'est une série télescopique) ou par récurrence.
6. Par disjonctions de cas : si a est pair, si b est pair, et si a et b sont impairs.

Faire ces démonstrations est un bon exercice.