# Analyse II — Cours Principal
# Prof. Lachowska Anna — EPFL

Notes par Joachim Favre

Bachelor d'informatique — Semestre 2
Printemps 2022

J'ai fait ce document pour mon usage, mais je me suis dit que des notes dactylographiées pouvaient intéresser d'autres personnes. Ainsi, je l'ai partagé (à vous, si vous lisez ces lignes !) ; puisque cela ne me coûtait rien. Je vous demande simplement de garder en tête qu'il y a des erreurs, c'est impossible de ne pas en faire. Si vous en trouvez, n'hésitez pas à me les partager (les erreurs de grammaires et de vocabulaires sont naturellement aussi bienvenues). Vous pouvez me contacter à l'adresse e-mail suivante :

`joachim.favre@epfl.ch`

Si vous n'avez pas obtenu ce document par le biais de mon repo GitHub, vous serez peut-être intéressé par le fait que j'en ai un sur lequel je mets mes notes dactylographiées. Voici le lien (allez regarder dans la section "Releases" pour trouver les documents compilés) :

`https://github.com/JoachimFavre/EPFLNotesIN`

Notez que le contenu ne m'appartient pas. J'ai fait quelques modifications de structure, j'ai reformulé certains bouts, et j'ai ajouté quelques notes personnelles ; mais les formulations et les explications viennent principalement de la personne qui nous a donné ce cours, et du livre dont elle s'est inspirée.

Je pense qu'il est intéressant de préciser que, pour avoir ces notes dactylographiées, j'ai pris mes notes en LaTeXpendant le cours, puis j'ai fait quelques corrections. Je ne pense pas que mettre au propre des notes écrites à la main est faisable niveau quantité de travail. Pour prendre des notes en LaTeX, je me suis inspiré du lien suivant, écrit par Gilles Castel. Si vous voulez plus de détails, n'hésitez pas à me contacter à mon adresse e-mail, mentionnée ci-dessus.

`https://castel.dev/post/lecture-notes-1/`

Je tiens aussi à préciser que les mots "trivial" et "simple" n'ont, dans ce cours, pas la définition que vous trouvez dans un dictionnaire. Nous sommes à l'EPFL, rien de ce que nous faisons n'est trivial. Quelque chose de trivial, c'est quelque chose que quelqu'un pris de manière aléatoire dans la rue serait capable de faire. Dans notre contexte, comprenez plutôt ces mots comme "plus simple que le reste". Aussi, ce n'est pas grave si vous prenez du temps à comprendre quelque chose qui est dit trivial (surtout que j'adore utiliser ce mot partout hihi).

Puisque vous lisez ces lignes, je vais me permettre de vous donner un petit conseil. Le sommeil est un outil bien plus puissant que ce que vous pouvez imaginer, donc ne négligez jamais une bonne nuit de sommeil au profit de vos révisions (particulièrement la veille de l'examen). Je vais aussi me permettre de paraphraser mon enseignante de philosophie du gymnase, Ms. Marques, j'espère que vous vous amuserez en faisant vos examens !

*Version 2022–07–14*

# Table des matières

# Liste des cours

# Chapitre 1

# Résumé par cours



- Définition des équations différentielles ordinaires.
- Explication d'un petit peu de terminologie autour de ces équations.
- Introduction au théorème de l'existence et de l'unicité d'une solution des EDVS.



- Fin des EDVS, et définition de leur solution maximale.
- Définition des EDL1.
- Définition des équation homogène associée, démonstration du principe de superposition des solutions, explication de la méthode de la variation de la constante ; puis utilisation de tous ces principes pour démontrer la méthode pour trouver la solution générale à une EDL1.



- Deux gros exemples de résolution d'EDL1.
- Exemple d'application d'équations différentielles pour modéliser des phénomènes physiques.



- Définition des équations différentielles linéaires du second ordre.
- Résolution générale des EDL2 homogènes à coefficients constants.
- Explication de la méthode pour trouver une solution linéairement indépendante à partir d'une autre solution à une EDL2 homogène.
- Explication de la méthode pour trouver une solution générale d'une EDL2 homogène à partir de deux solutions linéairement indépendantes.



- Définition du Wronskien, et preuve du théorème faisant le lien avec des solutions linéairement indépendantes d'une EDL2 homogène.
- Démonstration de la forme des solutions aux EDL2 homogènes.
- Démonstration de la méthode de la variation de la constante pour résoudre les EDL2 complètes.
- Long exemple de résolution d'une EDL2 complète.

- Explication de la méthode des coefficients indéterminés.
- Résumé des méthodes pour résoudre les équations différentielles que nous avons vues.



- Définition des opérations, de la base canonique, du produit scalaire, de la norme Euclidienne et de la distance dans $\mathbb{R}^n$ ; et démonstration de certaines de leurs propriétés.
- Introduction à la topologie dans $\mathbb{R}^n$. Ainsi, définition d'une boule ouverte, d'un ensemble ouvert, d'un point intérieur, de l'intérieur d'un ensemble, du complémentaire d'un ensemble et d'un ensemble fermé ; et démonstration de certaines de leurs propriétés.
- Beaucoup d'exemple d'ensembles ouverts, fermés, et ni l'un ni l'autre.



- Définition d'adhérence et de frontière.
- Définition des suites dans $\mathbb{R}^n$, de leur convergence, et du concept de suite bornée.
- Explication du théorème de Bolzano-Weierstrass.
- Explication et preuve du théorème qui fait un lien entre les suites dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie.
- Définition d'ensemble borné, d'ensemble compact, et de recouvrement.
- Explication du théorème de Heine-Borel-Lebesgue.



- Définition des fonctions réelles de plusieurs variables réelles.
- Définition de la notion de voisinage, de limite et de continuité pour les fonctions réelles à plusieurs variables réelles.
- Démonstration du théorème de la caractérisation des limites à partir des suites convergentes.



- Explication de la méthode de calcul de limites par changement de coordonnées vers le système polaire.
- Preuve du théorème des deux gendarmes.
- Explication de la méthode de calcul de limites par la continuité d'une fonction composée.
- Définition des minimum et maximum d'une fonction, et démonstration qu'une fonction continue sur un sous-ensemble compact atteint son minimum et son maximum.



- Définition des dérivées partielles.
- Définition du gradient.
- Définition des dérivées directionnelles.
- Définition de la dérivabilité.

- Explication de la méthode de calcul des polynômes de Taylor par ceux en une dimension.
- Définition d'un point stationnaire d'une fonction, et preuve que les extremums locaux d'une fonction dérivable en ce point sont des points stationnaires.
- Définition d'un point critique d'une fonction, et preuve que les extremums locaux d'une fonction sont des points critiques.
- Explication et justification de la condition suffisante pour un extremum local, passant par les valeurs propres de la matrice Hessienne.



- Explication et preuve d'une proposition qui donne des hypothèses équivalentes pour le théorème de la condition suffisante pour un extremum local quand $n = 2$.
- Explication d'un théorème similaire pour $n = 3$.
- Explication de la méthode pour trouver les minimums et maximums globaux sur un ensemble compact.
- Introduction aux fonctions implicites.



- Définition de la notion de surface de niveau.
- Explication et démonstration du théorème des fonctions implicites.
- Application de ce théorème pour le calcul de l'hyperplan tangent.



- Démonstration du théorème de la méthode des multiplicateurs de Lagrange quand $n = 2$, et explication de sa généralisation.
- Exemples de ce théorème.



- Parce que l'épilation intégrale (je sais pas si c'est la meilleure référence à avoir, mais elle est là (Cyprien — L'école 2) !).
- Définition de pavé, de subdivision et de sommes de Darboux.
- Définition des fonctions intégrables, et preuve que les fonctions continues sont intégrables.
- Explication des propriétés de l'intégrale, et du théorème de Fubini.



- Définition de l'intégrale d'une fonction sur un ensemble qui n'est pas un pavé fermé.
- Explication du théorème de Fubini pour les domaines à frontière régulière de type 1 et 2.
- Explication de la méthode pour calculer l'intégrale de fonctions sur des domaines à frontières régulières qui ne sont ni de type 1 ni de type 2.

# Chapitre 2

# Équations différentielles ordinaires

## 2.1 Définitions et exemples

**Exemple 1** Supposons qu'on a une fonction $y(x) = y$, où $x \in \mathbb{R}$. De plus, disons que nous savons que :

$$y' = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On remarque alors que $y(x) = 2$ est une solution sur $\mathbb{R}$. De plus, on peut même obtenir une solution plus générale :

$$y(x) = C, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

On verra plus tard que c'est la solution générale à cette équation.

**Définition** Une **équation différentielle ordinaire** est une expression :

$$E\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

où $E$ est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_0$, et $y = y(x)$ est une fonction inconnue de $x$.
On cherche un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^n$ telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

> *Remarque personnelle* Cette définition peut paraître très formelle, mais l'idée c'est qu'une équation différentielle ordinaire est une équation où on a une fonction, ses dérivées, et la variable $x$. Cela permet de faire une opposition avec les équations intégrales comme la *Rendering Equation* (où $L_i$ est liée à $L_o$, ce qui fait que c'est bien une équation et non une formule) :
>
> $$L_o(x, \overrightarrow{\omega}) = L_e(x, \overrightarrow{\omega}) + \int_\Omega L_i(x, \overrightarrow{\omega}')f_r(\overrightarrow{\omega}, x, \overrightarrow{\omega}')\cos(\theta)d\overrightarrow{\omega}'$$
>
> Cela permet aussi de faire une différence avec les équations à dérivées partielles, comme l'équation de la chaleur :
>
> $$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} - k\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

**Exemple 2** Considérons l'équation différentielle ordinaire suivante :

$$y'' = 0$$

On remarque déjà que, nécessairement, $y' = C_1 \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour finir, on obtient :

$$y = C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

**Exemple 3**

Prenons maintenant l'équation suivante :

$$y + y' = 0 \iff y' = -y$$

On sait que $f(x) = e^x$ est telle que $f'(x) = f(x)$. Il nous suffit donc de la modifier légèrement pour obtenir une solution à notre équation :

$$y = e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On peut finalement en déduire la solution générale :

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad \forall C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

**Équation la plus simple**

On remarque que l'exemple 1 et l'exemple 2 sont de la forme :

$$y^{(n)} = f(x)$$

où $f(x)$ est une fonction connue et continue sur $I$.
Dans ce cas là, nous pouvons résoudre cette équation par intégration.

**Équation à variables séparées**

On appelle le troisième exemple une **équation à variables séparées**. En effet, on peut écrire :

$$\frac{dy}{dx} = y' \implies \frac{dy}{dx} = -y \overset{y \neq 0}{\implies} \frac{dy}{y} = -dx$$

Ainsi, nos variables sont séparées : nous avons $y$ d'un côté et $x$ de l'autre. Ceci nous permet d'obtenir une dépendance entre le changement infinitésimal en $y$ et le changement infinitésimal en $x$. Puisque c'est vrai pour tout $x$ sur notre intervalle, on peut intégrer en préservant l'égalité :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int dx \implies \log|y| = -x + C_1$$

pour un $C_1 \in \mathbb{R}$ arbitraire.
On peut continuer notre équation :

$$|y| = e^{-x} \underbrace{e^{C_1}}_{C_2 > 0} \implies y = \pm C_2 e^{-x}$$

Finalement, on peut aussi remarquer que $y = 0$ est une solution. Tout ceci nous permet d'obtenir la solution générale à notre équation :

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

**Terminologie**

On appelle $E\big(X, y, \ldots, y^{(n)}\big) = 0$ une équation différentielle (ED).

*Ordre* — Un nombre naturel $n \in \mathbb{N}^*$ est **l'ordre** d'une équation différentielle si $n$ est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

*Équation linéaire* — Si notre équation différentielle est un polynôme linéaire en $y, y', \ldots, y^{(n)}$, alors l'équation est dite **linéaire**.

*Équation autonome* — Si l'expression ne contient pas de $x$, l'équation est dite **autonome**.

*Solution générale* La **solution générale** d'une équation différentielle est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation.

**Exemple 4** Considérons les équations suivantes :

1. $y + y' = 5x + 1$
2. $2x^2 y + y''' = 0$
3. $y' + 3y'' = 0$

On peut voir les propriétés suivantes :

1. Équation différentielle linéaire d'ordre 1 qui n'est pas autonome.
2. ED linéaire d'ordre 3 qui n'est pas autonome.
3. ED linéaire d'ordre 2 autonome.

**Définition du problème de Cauchy** Résoudre le **problème de Cauchy** (équation différentielle avec des conditions initiales) pour l'équation $E\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ consiste à trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$ telle que $E\left(x, y, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ sur $I$ et pour laquelle des conditions initiales sont satisfaites :

$$y(x_0) = b_0, y(x_1) = b_1, y'(x_2) = b_2, \ldots$$

Le nombre des conditions initiales dépend du type de l'équation différentielle.

**Retour à l'exemple 2** Nous avions trouvé :

$$y'' = 0 \implies y(x) = C_1 x + C_2, \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

Résolvons maintenant le problème de Cauchy pour $y'' = 0$ avec les conditions initiales :

$$y(0) = 1, \quad y(2) = 4$$

Nous pouvons mettre ces conditions initiales dans notre solution générale :

$$1 = y(0) = C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \implies C_2 = 1$$

$$4 = y(2) = C_1 \cdot 2 + C_2 = 2C_1 + 1 \implies C_1 = \frac{3}{2}$$

On obtient ainsi la **solution particulière** satisfaisant les conditions initiales :

$$y(x) = \frac{3}{2}x + 1$$

## 2.2 Équations différentielles à variables séparées

**Définition** On appelle une **équation différentielle à variables séparées** (EDVS) une équation sous la forme :

$$f(y) \cdot y' = g(x)$$

où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \in \mathbb{R}$.

Une fonction $y : J' \subset J \mapsto I$ de classe $C^1$ satisfaisant l'équation $f(y)y' = g(x)$ est une solution.

*Explication* Nous pouvons manipuler notre équation de la manière suivante :

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \overset{\text{en gros}}{\implies} \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Nous verrons pourquoi ceci marche et pourquoi cette méthode est formelle à l'aide d'un théorème ci-après.

**Exemple** Par exemple, $y' = -y$ est une EDVS :

$$y' = -y \iff \frac{1}{y}y' = -1 \implies f(y) = \frac{1}{y}, g(x) = -1$$

**Théorème : Existence et unicité d'une solution des EDVS** Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0$ pour tout $y \in I$, et soit $g : J \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
**Existence :** Alors, pour tout couple $(x_0, b_0)$ où $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$, l'équation

$$f(y)y' = g(x)$$

admet une solution $y : J' \subset J \mapsto I$ vérifiant la condition initiale.
**Unicité :** Si $y_1 : J_1 \mapsto I$ et $y_2 : J_2 \mapsto I$ sont deux solutions telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors :

$$y_1(x) = y_2(x), \quad \forall x \in J_1 \cap J_2$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Note personnelle* Ce théorème implique que si nous pouvons écrire la solution générale à une EDVS de manière complètement générale avec des constantes, alors il y a une et exactement une constante. Par exemple, les ensembles de fonctions suivants ne pourraient pas être les solutions générales d'une EDVS :

$$f(x) = C_1 \sin(x) + C_2 \cos(x), \quad g(x) = x^2$$

où $C_1, C_2, \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}$.
Cependant, comme on l'a vu plus tôt, l'ensemble de fonctions suivant est la solution générale à l'EDVS $y' = -y$ :

$$y(x) = Ce^{-x}, \quad \text{où } C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

*Preuve* Nous allons seulement montrer l'existence de la solution.
Soit la fonction suivante :

$$F(y) = \int_{b_0}^{y} f(t)dt$$

On sait que $F(y)$ est dérivable par le théorème fondamental du calcul intégral. De plus, on sait que $F'(y) = f(y) \neq 0$ sur $I$, donc $f(y)$ ne change pas pas de signe et donc $F(y)$ est monotone. Puisque $F(y)$ est continue et monotone, on sait qu'elle est inversible sur $I$.
Soit aussi la fonction suivante :

$$G(x) = \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Par le théorème fondamental du calcul intégral, on sait aussi que $G(x_0) = 0$ et que $G$ est dérivable sur $J$.
Définissons aussi la fonction suivante dans un voisinage de $x_0$ (on sait que $F$ est inversible sur $I$, et $F^{-1}(G(x_0)) = b_0 \in I$) :

$$y(x) = F^{-1}(G(x))$$

Nous allons démontrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y)y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et qu'elle satisfait $y(x_0) = b_0$.

En manipulant notre définition, on obtient que, dans un voisinage de $x_0 \in J$ :

$$F(y(x)) = G(x) \overset{\frac{d}{dx}}{\implies} F'(y(x))y'(x) = G'(x) \implies f(y)y'(x) = g(x)$$

De plus, nous savons par la définition de $G$ et $F$ que $G(x_0) = 0$ et $F(b_0) = 0$, donc :

$$y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = F^{-1}(0) = b_0$$

□

*Idée de la preuve* Nous partons de notre équation :

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x)$$

Et, notre théorème nous dit que c'est plus ou moins équivalent à :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx \iff F(y) = G(x)$$

Mercredi 23 février 2022 — **Cours 2 : D'autres équations avec des différences, facile !**

**Résumé pour les EDVS** Pour résoudre une EDVS, donc une équation sous la forme $f(y)y' = g(x)$ où $f : I \mapsto \mathbb{R}$ et $g : J \mapsto \mathbb{R}$ sont continues, on pose l'équation :

$$\int f(y)dy = \int g(x)dx$$

Puisqu'on a une constante des deux côtés, il nous suffit de prendre une seule constante.

**Exemple** Résolvons l'équation suivante :

$$\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$$

C'est une EDVS, car $f(y) = \frac{1}{y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$, donc on peut considérer chaque intervalle séparément, et $g(x) = 1 : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$.
Posons nos intégrales :

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int dx \implies -\frac{1}{y} = x + C, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Ainsi, on peut résoudre notre équation pour obtenir :

$$y = -\frac{1}{x + C}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

C'est la solution générale sur $]-\infty, -C[$ et $]-C, +\infty[$ ($y$ n'est pas continue en $-C$, donc elle n'est clairement pas dérivable). Il ne faut pas oublier qu'une solution générale est une fonction et un intervalle.
Supposons maintenant qu'on cherche une solution telle que $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^*$ :

$$y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \implies C = -\frac{1}{b_0}$$

Ainsi :

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} = \frac{b_0}{1 - xb_0}$$

Si $b_0 > 0 \implies \frac{1}{b_0} > 0$, notre solution particulière est :

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} \quad \text{sur } \left]-\infty, \frac{1}{b_0}\right[ \ni 0$$

Si $b_0 < 0$, notre solution particulière est donnée par :

$$y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}} \quad \text{sur } \left] \frac{1}{b_0}, +\infty \right[ \ni 0$$

On choisit l'intervalle de manière à ce que 0 soit dedans.

**Définition : Solution maximale** Une **solution maximale** d'une EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$ où $x_0 \in J$ et $b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe $C^1$ satisfaisant l'équation, la condition initiale, et qui est définie sur le plus grand intervalle possible.
Le théorème des EDVS nous dit que si $f(y) \neq 0$ sur $I$, alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale.

> *Remarque* Dans l'exemple ci-dessus, nous avons trouvé les solutions maximales pour les conditions initiales $x_0 = 0$ et $b_0 \in \mathbb{R}^*$, $b_0 > 0$ ou $b_0 < 0$.

## 2.3 Équations différentielles linéaires du premier ordre

**Définition : EDL1** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Nous appelons **équation différentielle linéaire du premier ordre** (EDL1) une équation de la forme suivante :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

où $p, f : I \mapsto \mathbb{R}$ sont continues.
Une **solution** est une fonction $y : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$ satisfaisant l'équation.

**Équation homogène associée** Commençons par considérer l'équation suivante (qui est plus facile) :

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

Cette équation s'appelle **l'équation homogène associée** à l'EDL1 $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.
Nous avons deux cas. Soit $y(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$, soit $\frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x)$ (qui est une EDVS).
Continuous à travailler sur le deuxième cas :

$$\int \frac{dy}{y} = -\int p(x)dx \implies \log|y| = -P(x) + C_1, \quad C_1 \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$.
Ainsi :

$$|y| = e^{-P(x)+C_1} = \underbrace{e^{C_1}}_{C_2>0} e^{-P(x)} \implies y(x) = C_2 e^{-P(x)}, \quad C_2 \in \mathbb{R}^*$$

Cependant, puisque $y(x) = 0$ est aussi une solution, on obtient que la solution générale de l'équation homogène associée sur $I \subset \mathbb{R}$ est :

$$y(x) = Ce^{-P(x)}, \quad \forall x \in I, \forall C \in \mathbb{R}$$

**Principe de superposition de solutions** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, et $p, f_1, f_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonction continues.
Supposons que $v_1 : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$ est une solution de l'équation :

$$y' + p(x)y = f_1(x)$$

Supposons aussi que $v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$ est une solution de l'équation :

$$y' + p(x)y = f_2(x)$$

Alors, pour tout couple $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$ est une solution de l'équation :

$$y' + p(x)y = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x)$$

*Vérification* Nous pouvons facilement vérifier notre équation :

$$\begin{aligned} v'(x) + p(x)v(x) &= C_1 v_1'(x) + C_2 v_2'(x) + p(x)(C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)) \\ &= C_1(v_1'(x) + p(x)v_1(x)) + C_2(v_2'(x) + p(x)v_2(x)) \\ &= C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) \end{aligned}$$

Ce qui termine notre démonstration.

□

**Méthode de la variation de constante** Nous cherchons une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ où $p, f : I \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, sous la forme suivante :

$$v(x) = C(x)e^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur $I$ et $C(x)$ est une fonction inconnue de $x$. Nous appelons ceci un *Ansatz*. On suppose que notre solution est d'une certaine forme et on espère que ça nous amène à une solution (en l'occurrence, on prend une solution similaire à celle qu'on avait trouvée pour les équations homogènes associées).
Si $v(x)$ est une solution de l'équation, alors :

$$v'(x) + p(x)v(x) = f(x) \implies C'(x)e^{-P(x)} + C(x)e^{-P(x)}(-p(x)) + p(x)C(x)e^{-P(x)} = f(x)$$

Ceci nous permet donc d'obtenir que :

$$C'(x)e^{-P(x)} = f(x) \implies C'(x) = f(x)e^{P(x)} \implies C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx$$

Nous avons donc trouvé une solution particulière de l'équation, qui est :

$$v(x) = \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)e^{-P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur $I$.

**Exemple** Résolvons l'équation différentielle suivante :

$$y' + y = 5x + 1$$

C'est une EDL1 avec $p(x) = 1$ et $f(x) = 5x + 1$, où $p, f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ sont continues. On trouve que $P(x) = x$ est une primitive (quelconque, donc sans constante) de $p(x)$.
Nous savons que la solution générale de l'équation homogène associée $y' + y = 0$ est :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall C \in \mathbb{R}$$

Pour trouver une solution particulière de l'équation $y' + y = 5x + 1$ on calcule :

$$C(x) = \int f(x)e^{P(x)}dx = \int (5x+1)e^x dx = 5\int xe^x dx + \int e^x dx$$

Nous pouvons calculer la première intégrale par partie :

$$C(x) = 5xe^x - 5\int e^x dx + \int e^x dx = 5xe^x - 4e^x$$

On peut prendre une constante arbitraire, donc nous prenons $C = 0$.
Ainsi, on a trouvé une solution particulière de $y' + y = 5x + 1$ :

$$v(x) = (5xe^x - 4e^x)e^{-x} = 5x - 4$$

Nous pouvons vérifier que c'est bien une solution :

$$v'(x) + v(x) = 5 + 5x - 4 = 5x + 1$$

comme attendu.

**Proposition pour les EDL1** Soient $p, f : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions continues. Supposons que $v_0 : I \mapsto \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation suivante :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$$

Alors, la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur $I$.

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve* Nous allons montrer que toute solution de cette équation est de la forme $v_0(x) + Ce^{-P(x)}$.
Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On a aussi que $v_0(x)$ est une solution de la même équation.
Alors, d'après le principe de superposition de solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation :

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Ainsi, $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation homogène :

$$y'(x) + p(x)y(x) = 0$$

Cependant, c'est une EDVS, donc nous savons que la solution générale de cette équation homogène est :

$$v(x) = Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R} \text{ arbitraire}$$

où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur $I$.
On en déduit qu'il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) - v_0(x) = Ce^{-P(x)}$. Ainsi, on obtient que la solution $v_1(x)$ est de la forme :

$$v_1(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}$$

Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, nous obtenons que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est :

$$v(x) = v_0(x) + Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}, x \in I$$

Donc, par définition, $v(x)$ est la solution générale.

$\square$

**Résumé** En mettant tout en commun, on obtient que la solution générale d'une EDL1 est :

$$y(x) = Ce^{-P(x)} + \left(\int f(x)e^{P(x)}dx\right)e^{-P(x)}, \quad \forall C \in \mathbb{R}, x \in I$$

Lundi 28 février 2022 — **Cours 3 : Place aux exemples**

**Types d'équations**

Regardons les équations différentielles suivantes :

1. $e^x y' = y^3 + y$
2. $\left(1 + \sin^2 x\right)y^2 y' = \cos(x)$
3. $2y' - 2x = y$
4. $y' = (3x + y)^2$

Étudions le type de ces équations :

1. Puisqu'il y a un $y^3$, elle n'est clairement pas linéaire. Cependant, c'est une EDVS car elle est équivalente à :

$$\frac{dy}{y^3 + y} = e^{-x}dx$$

Il ne faut oublier non plus que $y = 0$ est une solution, puisqu'on a divisé par $y$.

2. Cela ne peut non plus pas être une équation linéaire puisqu'on a $y^2$. Cependant, elle est équivalente à :

$$y^2 dy = \frac{\cos(x)dx}{1 + \sin^2(x)}$$

3. C'est une EDL1, et il est impossible de l'écrire sous la forme d'une équation différentielle à variable séparée.

$$y' - \frac{1}{2}y = x, \quad p(x) = -\frac{1}{2}, f(x) = x$$

4. Cela ne peut pas être linéaire car il y a un carré. Il semble aussi compliqué de séparer les variables. Cependant, en prenant $z = 3x + y \implies z' = y' + 3$, notre équation devient :

$$z' - 3 = z^2 \implies \frac{dz}{z^2 + 3} = dx$$

On arrive donc bien à une équation différentielle à variable séparée.

**Exemple 1**

Prenons l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 suivante :

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}, \quad p(x) = -\frac{2}{x}, f(x) = \frac{x}{2}$$

On remarque que $p$ est continue sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$, et $f$ est continue sur $\mathbb{R}$.

*Équation homogène*

Premièrement, on cherche la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y' - \frac{2}{x}y = 0, \quad \text{sur } ]-\infty, 0[ \text{ et } ]0, \infty[$$

Pour cela, on cherche une primitive de $p(x)$ :

$$P(x) = \int -\frac{2}{x}dx = -2\log|x| = -\log\left(x^2\right), \quad x \neq 0$$

Ainsi, la solution de notre équation homogène est :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\left(-\log\left(x^2\right)\right)} = Cx^2$$

sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$.
On peut facilement vérifier que notre solution fonctionne bien.

*Solution particulière*

Deuxièmement, nous cherchons une solution particulière de l'équation complète :

$$y' - \frac{2}{x}y = \frac{x}{2}$$

Calculons l'intégrale suivante :

$$\int f(x)e^{P(x)}dx = -\int \frac{x}{2}e^{-\log\left(x^2\right)}dx = \int \frac{x}{2}\frac{1}{x^2}dx = \int \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\log|x|$$

où $x \neq 0$.

On obtient que la solution particulière à notre équation est donnée par :

$$y_{part}(x) = \frac{1}{2}\log|x|e^{\log\left(x^2\right)} = \frac{1}{2}x^2\log|x|, \quad x \neq 0$$

On peut vérifier que notre solution fonctionne bien, prenons $x \in ]-\infty, 0[$ par exemple. Sur cet ensemble, notre solution est :

$$y_{part}(x) = \frac{1}{2}x^2\log(-x)$$

Et donc :

$$\begin{aligned} y' - \frac{2}{x}y &= \left(\frac{x^2}{2}\log(-x)\right)' - \frac{2}{x}\left(\frac{x^2}{2}\log(-x)\right) \\ &= x\log(-x) + \frac{x^2}{2}\frac{1}{-x}(-1) - x\log(-x) \\ &= \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Nous pouvons aussi vérifier que cela fonctionne sur $]0, +\infty[$ de manière similaire.

*Solution générale*

Troisièmement, on sait que la solution générale de l'EDL1 est donnée par :

$$y(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x)$$

On trouve donc que :

$$y(x) = \begin{cases} Cx^2 + \dfrac{x^2}{2}\log(x), & x \in ]0, \infty[, C \in \mathbb{R} \\ Cx^2 + \dfrac{x^2}{2}\log(-x), & x \in ]-\infty, 0[, C \in \mathbb{R} \end{cases}$$

**Exemple 2** Prenons l'EDL1 suivante :

$$y' \underbrace{- \tan(x)}_{p(x)} y = \underbrace{\cos(x)}_{f(x)}$$

Nous voulons trouver la solution maximale avec la condition initiale $y(0) = 3$. Cette information est importante, car cela nous dit que 0 doit être dans l'intervalle (il y a une infinité d'intervalles où tangente est continue). Nous allons donc considérer cette équation sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. En d'autres mots, on prend $p, f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \mapsto \mathbb{R}$.

*Équation homogène*

Premièrement, nous cherchons la solution générale de l'équation homogène associée :

$$y' - \tan(x)y = 0$$

Calculons une primitive de $p(x)$ :

$$P(x) = -\int \tan(x)dx = -\int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}dx$$

Nous pouvons remarque que $\sin(x)$ est la dérivée de $\cos(x)$ à une constante près, et donc nous pouvons prendre un changement de variable :

$$P(x) = \int \frac{d(\cos x)}{\cos(x)} = \log|\cos(x)| = \log(\cos(x))$$

Nous pouvons bien enlever la valeur absolue car, sur $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos(x)$ est positif.
On obtient donc que la solution à l'équation homogène est :

$$y_{hom}(x) = Ce^{-P(x)} = Ce^{-\log(\cos(x))} = \frac{C}{\cos(x)}, \quad x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, C \in \mathbb{R}$$

*Solution particulière*

Deuxièmement, nous cherchons une solution particulière de l'équation complète. Calculons l'intégrale suivante :

$$\int f(x)e^{P(x)}dx = \int \cos(x)e^{\log(\cos(x))}dx = \int \cos^2(x)dx$$

On sait que $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$, donc notre intégrale est donnée par :

$$\int f(x)e^{P(x)}dx = \int \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)$$

Ce qui nous permet d'obtenir une solution particulière à notre équation :

$$\begin{aligned} y_{part}(x) &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x)\right)e^{-P(x)} \\ &= \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x\sin(2x)\right)\frac{1}{\cos(x)} \\ &= \frac{x}{2\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2} \end{aligned}$$

puisque $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

*Solution générale*

Troisièmement, nous obtenons la solution générale :

$$y(x) = y_{hom} + y_{part} = \frac{C}{\cos(x)} + \frac{x}{2\cos(x)} + \frac{\sin(x)}{2}, \quad x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

pour $C \in \mathbb{R}$, une constante arbitraire.

*Condition initiale*

Quatrièmement, nous devons mettre notre condition initiale dans notre solution :

$$y(0) = 3 \implies 3 = y(0) = C + 0 + 0 = C \implies C = 3$$

On obtient donc que la solution maximale satisfaisant la condition initiale est :

$$y(x) = \frac{3}{\cos(x)} + \frac{x}{2\cos(x)} + \frac{1}{2\sin(x)}, \quad x \in \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

**Application des EDVS** Les équations différentielles permettent typiquement de décrire des phénomènes physiques. Un exemple commun est que la croissance ou la décroissance de quelque chose est proportionnel à la taille de ce quelque chose. En d'autres mots :

$$y'(t) = ky(t), \quad k \in \mathbb{R}$$

Une population de bactérie avec de la nourriture et de la place infinie ou la masse d'un objet subissant une désintégration radioactive suivent typiquement cette loi. La première a $k > 0$, alors que la deuxième a $k < 0$. D'autres phénomènes, comme la propagation d'un virus au sein d'une population, suivent cette loi sur un temps restreint.
Résolvons notre équation différentielle. On remarque que $y = 0$. De plus, c'est une EDVS, donc :

$$\int \frac{dy}{y} = \int kdt \implies \log|y| = kt + C_1 \implies |y| = \underbrace{e^{C_1}}_{>0} e^{kt} \implies y(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Supposons que nous savons que $y(0) = y_0 > 0$, alors :

$$y_0 = y(0) = Ce^{k \cdot 0} = C$$

On obtient donc que la solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$ est :

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$

Ce qui est cohérent avec ce à quoi nous pouvions nous attendre.

Mercredi 2 mars 2022 — **Cours 4 : On rajoute un prime**

## 2.4 Équations différentielles linéaires du second ordre

**Définition : EDL2** Soit $I$ un intervalle ouvert. On appelle **équation différentielle linéaire du second ordre** (EDL2) une équation de la forme :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

où $p, q, f : I \mapsto \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.
Nous appelons **EDL2 homogène** une équation de la forme suivante :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

Nous cherchons une solution de cette équation de classe $C^2(I, \mathbb{R})$.

**Exemple** Prenons l'EDL2 homgène suivante :

$$y'' = 0$$

En intégrant deux fois, on trouve que :

$$y(x) = C_1 x + C_2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

**EDL2 homogène à coefficients constants** Considérons les **EDL2 homogène à coefficients constants**. En d'autres mots, soit l'équation différentielle suivante :

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Construisons un polynôme $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, on sait qu'il existe deux solutions complexes $a$ et $b$ tel que $\lambda^2 + p\lambda + q = (\lambda - a)(\lambda - b) = \lambda^2 - (a + b)\lambda + ab$. On obtient donc que $p = -(a + b)$ et $q = ab$, ce qu'on peut remplacer dans notre équation :

$$y''(x) - (a+b)y'(x) + aby(x) = 0, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

Nous pouvons voir que notre équation est équivalente à :

$$(y'(x) - ay(x))' - b(y'(x) - ay(x)) = 0$$

Ainsi, nous pouvons prendre le changement de variable $z(x) = y'(x) - ay(x)$, ce qui nous donne une EDL1 homogène :

$$z'(x) - bz(x) = 0 \implies z(x) = C_1 e^{bx}, \quad x \in \mathbb{R}, C \text{ arbitraire}$$

Puisque $z(x) = y'(x) - ay(x)$, on obtient une EDL1 pour $y$ :

$$y'(x) \underbrace{-a}_{p(x)} y(x) = \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)}$$

*Résolution de l'EDL1*

Nous pouvons trouver une primitive de $p(x)$ :

$$P(x) = \int -a dx = -ax$$

Ainsi, cela nous donne la solution à l'équation homogène associée :

$$y_{hom}(x) = C_2 e^{ax}$$

Nous pouvons utiliser la méthode de la variation de la constante :

$$C(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx = \int C_1 e^{bx} e^{-ax} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx$$

Nous avons deux possibilitiés :

$$C(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x}, & \text{si } b \neq a \\ C_1 x, & \text{si } b = a \end{cases}$$

On obtient donc une solution particulière à notre équation :

$$y_{part}(x) = \begin{cases} C_1 e^{(b-a)x} e^{ax} = C_1 e^{bx}, & \text{si } b \neq a \\ C_1 x e^{ax}, & \text{si } b = a \end{cases}$$

*Solution générale*

Tout ceci nous permet d'obtenir la solution générale à notre équation :

$$y(x) = \begin{cases} C_2 e^{ax} + C_1 e^{bx}, & \text{si } a \neq b \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax}, & \text{si } a = b \end{cases}$$

où $C_1$ et $C_2$ sont deux constantes arbitraires, et $a$ et $b$ sont des racines de l'équation caractéristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Il nous reste un problème, c'est que nous faisons de l'analyse réelle, mais $C_1$ et $C_2$ sont des constantes complexes arbitraires et $a$ et $b$ sont potentielle complexes. Il faut donc encore qu'on traite cette question.

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, telles que $a, b \notin \mathbb{R}$, alors nous savons que $a = \overline{b}$. De plus, prenons $C_1 = C$ et $C_2 = \overline{C}$ afin d'obtenir une solution réelle :

$$y(x) = Ce^{ax} + \overline{C} e^{\overline{a}x}$$

Nous pouvons prendre $a = \alpha + i\beta$ où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $\beta \neq 0$. De plus, prenons $C = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)$. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned} y(x) &= Ce^{ax} + \overline{C}e^{\overline{a}x} \\ &= \frac{1}{2}(C_3 - iC_4)e^{\alpha x}e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)e^{\alpha x}e^{-i\beta x} \\ &= C_3 e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2} + C_4 e^{\alpha x}\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \\ &= C_3 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_4 e^{\alpha x}\sin(\beta x), \quad \text{où } C_3, C_4 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

puisque $-i = \frac{1}{i}$.
C'est la solution générale réelle de l'équation si $b = \overline{a} \notin \mathbb{R}$.

*Résumé*

Nous commençons avec une équation de la forme :

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Alors, la solution générale est :

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}, & \text{si } a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}, & \text{si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x}\cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x}\sin(\beta x), & \text{si } a = \alpha + i\beta = \overline{b} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

pour des constantes arbitraires $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$.

*Note personnelle : Intuition*

Il peut paraitre très bizarre de cherchez les racines du polynôme au départ. Cela fonctionne, mais il est aussi intéressant de savoir comment est-ce que les mathématiciens l'ont deviné aux premiers abords.

Nous avons donc l'équation suivante :

$$y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

Nous savons que l'exponentielle est très pratique, donc faisons l'*Ansatz* $y(x) = e^{\lambda x}$. Cela nous donne :

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + p\lambda e^{\lambda x} + qe^{\lambda x} = 0 \implies e^{\lambda x}\left(\lambda^2 + p\lambda + q\right) = 0$$

Or, puisque l'exponentielle est non-nulle pour tout $x$, nécessairement, $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$. Les deux solutions à cette équation nous donnent deux solutions linéairement indépendantes (nous allons définir ce concept juste après) à notre équation différentielle, sauf si $a = b$. Dans le cas où les solutions sont réelles, nous avons terminé, dans le cas où elles sont complexes nous pouvons les modifier de manière à obtenir un sinus et un cosinus.

Notes que l'équation du mouvement d'un oscillateur harmonique amorti (un pendule avec des frottements de l'air, par exemple). Les trois possibilités de solutions correspondent aux trois régimes des oscillateurs harmoniques amortis : *overdamped*, *underdamped* et *critically damped*.

**Exemple**

Considérons l'équation différentielle suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

C'est une EDL2 homogène, donc nous cherchons les racines de l'équation caractéristique :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \implies (\lambda + 1)^2 = 0 \implies a = b = -1$$

On trouve alors que las solution générale est donnée par :

$$y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

**EDL2 homogène** Considérons l'équation suivante :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \quad p, q : I \mapsto \mathbb{R}$$

Nous pouvons faire les observations suivantes :

1. La solution générale d'une EDL2 homogène à coefficients constants contient 2 constantes arbitraires. En fait, c'est le cas pour les EDL2 homogènes en général. Ce point est difficile à démontrer, et nous ne le feront pas dans ce cours.
2. Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions d'une EDL2 homogène, alors la fonction suivante est aussi une solution :

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x), \quad \text{où } A, B \in \mathbb{R}$$

En effet, nous pouvons le vérifier trivialement *(j'adore ce mot)* :

$$\begin{aligned} &(Ay_1(x) + By_2(x))'' + p(x)(Ay_1(x) + By_2(x))' + q(x)(Ay_1(x) + By_2(x)) \\ &= A\underbrace{\left(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)\right)}_{=0} + B\underbrace{\left(y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)\right)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

puisque $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont des solutions.

**Théorème** Une EDL2 homogène admet *une seule solution* $y(x) : I \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^2$ telle que $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$.

*Preuve* Nous acceptons ce théorème sans preuve dans ce cours, mais il est cohérent avec ce que nous avons trouvé jusque là (notamment avec l'observation qu'une solution a deux constantes).

**Définition : indépendance linéaire** Deux solutions $y_1(x), y_2(x) : I \mapsto \mathbb{R}$ sont **linéairement indépendantes** s'il n'existe pas de constante $C \in \mathbb{R}$ telle que :

$$y_2(x) = Cy_1(x) \text{ ou } y_1(x) = Cy_2(x), \quad \forall x \in I$$

En particulier, cela implique que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas des fonctions constantes égales à 0 sur $I$.

*Remarque* Le théorème que nous avons vu juste avant nous dit que les EDL2 homogènes possèdent exactement deux solutions linéairement indépendantes. En effet, il nous faut exactement deux constantes pour qu'il y ait exactement une solution qui respecte deux conditions initiales.

**Construction d'une deuxième solution** Supposons que $v_1(x)$ est une solution de $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ telle que $v_1(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Nous nous demandons comment trouver une autre solution linéairement indépendante.
Prenons l'*Ansatz* $v_2(x) = c(x)v_1(x)$ telle que $c(x)$ n'est pas constante (sinon la solution serait linéairement dépendante). Alors, on obtient que :

$$v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$$

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x)$$

Ainsi, nous pouvons remplacer notre solution dans notre équation :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0$$

Les termes en rouge sont déjà égaux à 0 puisque $v_1(x)$ est une solution. Cela nous permet donc de simplifier notre équation en :

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose maintenant aussi que $v_1(x) \neq 0$ sur $I$ et $c'(x) \neq 0$ sur $I$ (ils ne s'annulent pas en aucun point de l'intervalle). Ceci nous donne donc que :

$$\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2\frac{v_1'(x)}{v_1(x)}$$

qui est une EDVS pour $c'(x)$.
Nous pouvons intégrer des deux côté, en prenant $\log(C)$ comme constante :

$$\log|c'(x)| = -P(x) - 2\log|v_1(x)| + \log(C) = \log\left(\frac{Ce^{-P(x)}}{v_1^2(x)}\right)$$

Or, puisque le logarithme est une fonction bijective :

$$c'(x) = \pm C\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} = C_1\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}, \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, C_1 = \pm C$$

Nous pouvons maintenant intégrer :

$$c(x) = \int c_1\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

On obtient alors que $v_2(x) = c(x)v_1(x)$ est une solution. Par exemple, nous pouvons prendre $C_1 = 1$ et $C_2 = 0$, ce qui nous donne une solution telle que $v_2(x)$ et $v_1(x)$ sont linéairement indépendantes :

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x)\int\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx$$

Ainsi, à partir du moment où on trouve une solution particulière, nous sommes capable de trouver la solution générale.

**Exemple** Prenons l'EDL2 homogène suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

*Solution 1* On remarque que $v_1(x) = e^{-x}$ est une solution pour $x \in \mathbb{R}$ telle que $v_1(x) \neq 0$ sur $\mathbb{R}$. On cherche une autre solution linéairement indépendante :

$$p(x) = 2 \implies P(x) = 2x$$

$$v_2(x) = v_1(x)\int\frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx = e^{-x}\int\frac{e^{-2x}}{(e^{-x})^2} = e^{-x}\int 1dx = e^{-x}x$$

Nous avons donc obtenu que $v_1(x) = e^{-x}$ et $v_2(x) = xe^{-x}$ sont deux solutions linéairement indépendantes sur $\mathbb{R}$. Ainsi, d'après notre théorème, la solution générale de cette équation est :

$$v(x) = C_1e^{-x} + C_2xe^{-x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Notre solution est cohérente avec celle qu'on avait trouvée en utilisant la méthode de l'équation caractéristique.

*Solution 2* Cette fois, nous partons de $v_1(x) = xe^{-x}$ comme première solution, et nous essayons de trouver $v_2(x)$ linéairement indépendante.

Prenons la solution de telle manière à ce qu'elle soit jamais égale à 0 :

$$v_1(x) = xe^{-x} \quad \text{sur } ]-\infty, 0[ \text{ et } ]0, +\infty[$$

Alors, on obtient :

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = xe^{-x} \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = xe^{-x} \int \frac{e^{-2x}}{x^2 e^{-2x}} dx$$

Ce qu'on peut simplifier en :

$$v_2(x) = xe^{-x}\left(-\frac{1}{x}\right) = -e^{-x}, \quad \text{sur } ]-\infty, 0[ \text{ et } ]0, \infty[$$

Cependant, puisque $e^{-x}$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ (elle est même de classe $C^\infty$), on peut coller nos deux solutions sans obtenir de singularité en 0, et on obtient alors :

$$v_2(x) = -e^{-x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Nous avons donc obtenu les deux mêmes solutions linéairement indépendantes $v_1(x) = xe^{-x}$ et $v_2(x) = -e^{-x}$. Ainsi, la solution générale sur $\mathbb{R}$ est :

$$v(x) = C_1 xe^{-x} + C_2 e^{-x}$$

On a obtenu la même solution générale (et heureusement).

*Remarque* À l'examen, on ne va jamais nous demander de deviner une solution (contrairement aux exercices). Si nous avons besoin d'en obtenir une, alors elle nous sera donnée.

Lundi 7 mars 2022 — **Cours 5 : Wronskien**

## 2.5 Wronskien

**Définition : Wronskien** Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$. Nous appelons la fonction $W[v_1, v_2] : I \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$W[v_1, v_2] = \det\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

le **Wronskien** de $v_1$ et $v_2$.

**Exemple** Prenons l'équation suivante :

$$y'' + 2y' + y = 0$$

Son polynôme caractéristique, $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ nous donne les racines $a = b = -1$, ce qui nous permet de trouver la solution générale :

$$v(x) = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x}, \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}$$

Calculons le Wronskien de nos deux solutions :

$$W\left[e^{-x}, xe^{-x}\right] = \det\begin{pmatrix} e^{-x} & xe^{-x} \\ -e^{-x} & e^{-x} - xe^{-x} \end{pmatrix} = e^{-2x} - xe^{-2x} + xe^{-2x} = e^{-2x}$$

On observe que $e^{-2x} = W[e^{-x}, xe^{-x}] \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Nous allons généraliser cette idée.

**Proposition pour le Wronskien**

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$ (EDL2 homogène).
$v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendants si et seulement si $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$.

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve* $\Longleftarrow$

Démontrons ce point par la contraposée. Nous voulons donc montrer que les solutions sont linéairement dépendantes implique qu'il existe $x \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x) = 0$.
Puisque nos deux solutions sont linéairement dépendantes, nous pouvons prendre sans perte de généralité qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = cv_2(x)$ (si plutôt $v_2(x) = cv_1(x)$, nous pourrions juste échanger les noms, d'où le “sans perte de généralité”).
Ainsi, nous avons :

$$\begin{aligned} W[v_1, v_2](x) &= \det\begin{pmatrix} v_1(x) & cv_1(x) \\ v_1'(x) & cv_1'(x) \end{pmatrix} \\ &= cv_1(x)v_1'(x) - cv_1(x)v_1'(x) \\ &= 0, \quad \forall x \in I \end{aligned}$$

Nous avons donc trouvé que le Wronskien est nul pour tout $x$ sur cet intervalle, donc il existe bien un $x$ pour lequel il est égal à 0.

*Preuve* $\Longrightarrow$

Prouvons aussi cette affirmation par la contraposée. Nous voulons donc montrer que, s'il existe $x_0 \in I$ tel que $W[v_1, v_2](x_0) = 0$, alors $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes.
Puisqu'il existe un tel $x_0 \in I$, nous savons que :

$$\det\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0$$

Ainsi, le kernel de cette matrice est est non-trivial (il n'est pas de dimension 0), donc il existe un vecteur non nul $\binom{a}{b} \in \mathbb{R}^2$ tel que :

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi :

$$\begin{cases} av_1(x_0) + bv_2(x_0) = 0 \\ av_1'(x_0) + bv_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit $v(x) = av_1(x)+bv_2(x)$. Alors, $v(x)$ est une solution de l'équation donnée par la superposition des solutions. De plus, par le système d'équations que nous venons de trouver, nous avons $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'équation $y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x) = 0$, cette équation admet une seule solution satisfaisant $y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$. Puisque la solution triviale $y(x) = 0 \ \forall x \in I$ satisfait l'équation et les conditions initiale, alors nécessairement :

$$v(x) = av_1(x) + bv_2(x) = 0, \quad \forall x \in I$$

Puisque $a$ et $b$ ne sont pas les deux nuls, soit nous avons $v_1(x) = \frac{-b}{a}v_2(x)$ pour tout $x \in I$, soit nous avons $v_2(x) = -\frac{a}{b}v_1(x)$ pour tout $x \in I$ (soit les deux).

Nous avons donc bien trouvé que $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement dépendantes sur $I$.

□

*Idée de la preuve*

On démontre que $Q \implies P$ et $P \implies Q$ par la contraposée car $P$ et $Q$ sont des propositions "négatives" : il est beaucoup plus simple d'avoir une fonction qui est parfois égale à 0, ou deux fonctions qui sont linéairement dépendantes.

**Exercice**

Considérons les solutions des EDL2 homogènes à coefficients constants $y''(x)+py'(x)+qy(x) = 0$ telle que les racines du polynôme caractéristique sont $a = \overline{b} = \alpha + i\beta \not\in \mathbb{R}$. Nous voulons montrer que $W[e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)] \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Avec un peu de travail, nous pouvons obtenir que :

$$W[e^{\alpha x}\cos(\beta x), e^{\alpha x}\sin(\beta x)] = \beta e^{2\alpha x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, puisque $\beta \neq 0$ (sinon $a = \alpha + i\beta \in \mathbb{R}$), nous obtenons bien que le Wronskien de ces deux solutions n'est jamais 0, et donc qu'elles sont linéairement indépendantes.

**Théorème : Forme des solutions aux EDL2 homogènes**

Soient $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.
Alors, la solution générale de cette équation est de la forme :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve*

Soit $\widetilde{v}(x)$ une solution de l'équation donnée, et $x_0 \in I$. Alors, nous savons que $\widetilde{v}(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$ et $\widetilde{v}(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$.
Par hypothèse, nous avons deux solutions linéairement indépendantes $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$. Ainsi, par la caractérisation, nous savons que $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, ce qui implique que $W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$.
Or, quand le déterminant d'une matrice est non-nul (la matrice est dite *non-dégénérée*), nous savons qu'une équation l'utilisant a une solution unique. Ainsi, nous savons qu'il existe d'uniques constantes $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ telles que :

$$\begin{cases} C_1 v_1(x_0) + C_2 v_2(x_0) = a_0 \\ C_1 v_1'(x_0) + C_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$. Nous pouvons voir deux informations. La première est que $v(x)$ est une solution de l'équation (puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions). La deuxième est que $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$.
Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution des EDL2 homogènes satisfaisant des conditions initiales données $v(x_0) = a_0$ et $v'(x_0) = b_0$, on a $\widetilde{v}(x) = v(x)$ pour tout $x \in I$. Nous avons donc bien montré que notre solution de départ est de la bonne forme.

□

## 2.6 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 complètes

**Introduction** Nous considérons maintenant l'équation complète :

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$$

**Superposition des solutions** Si $v(x)$ est une solution de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ et $u(x)$ est une solution de l'équation homogène associée, alors $v(x) + u(x)$ est une solution de cette équation.

> *Preuve* Cette preuve est considérée comme triviale, et elle est laissée en exercice au lecteur.

**Méthode de la variation de la constante** Nous cherchons une solution particulière de l'équation complète, supposant que nous connaissons deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée : $v_1, v_2 : I \mapsto \mathbb{R}$.
Prenons l'*Ansatz* $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$, où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont deux fonctions inconnues de classe $C^1$ sur $I$.
Nous pouvons dériver notre solution présumée :

$$v_0'(x) = c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2(x) + c_1(x)v_1'(x) + c_2(x)v_2'(x)$$

Supposons aussi que le bout en rouge est égal à 0, car cela permet non seulement de diminuer grandement la taille de notre solution, mais aussi de ne pas avoir de $c''(x)$ (puisque nous les avons prises de classe $C^1$). Notez que nous avons le droit de faire ceci, car nous prenons un Ansatz. Cela peut ne pas fonctionner, mais si cela fonctionne c'est gagné.
Nous pouvons encore dériver $v_0'$ :

$$v_0''(x) = c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1(x)v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x)$$

Mettons ce que nous avons trouvé dans notre équation $v_0''(x)+p(x)v_0'(x)+q(x)v_0(x) = f(x)$, de manière à trouver des conditions sur $c_1(x)$ et $c_2(x)$ :

$$\begin{aligned}
&c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1(x)v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x) \\
&+ p(x)c_1(x)v_1'(x) + p(x)c_1(x)v_2'(x) \\
&+ q(x)c_1(x)v_1(x) + q(x)c_2(x)v_2(x) \\
&= f'(x)
\end{aligned}$$

Puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions de l'équation homogène associée, les termes en rouge sont égaux à 0, et les termes en bleu sont aussi égaux à 0. Nous obtenons donc une grande simplification à notre équation :

$$c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x)$$

En tout, nous avons deux conditions (celle que nous venons de trouver, et celle que nous avions prise de manière arbitraire) :

$$\begin{cases} c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2(x) = 0 \\ c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

Or nous pouvons écrire notre système sous la forme :

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Cependant, c'est un système d'équations sur $c_1'(x)$ et $c_2'(x)$. Puisqu'on sait que $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont linéairement indépendantes, nous avons $W[v_1, v_2](x) = \det\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \neq 0$ pour tout $x \in I$. Ceci nous dit donc que notre matrice est inversible, et que nous pouvons résoudre notre système de cette manière :

$$\begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2](x)} \begin{pmatrix} v_2'(x) & -v_2(x) \\ -v_1'(x) & v_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2](x)} \begin{pmatrix} -v_2(x)f(x) \\ v_1(x)f(x) \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant intégrer :

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)}dx, \quad c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}dx$$

où on supprime les constantes.
Nous obtenons donc $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ est une solution de l'équation complète. Nous pouvons même obtenir la solution générale à cette équation :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + v_0(x), \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

**Exemple** Nous voulons trouver la solution générale de l'équation suivante :

$$y''(x) \underbrace{- \frac{1}{x(\log(x) - 1)}}_{p(x)} y'(x) + \underbrace{\frac{1}{x^2(\log(x) - 1)}}_{q(x)} y(x) = \underbrace{\log(x) - 1}_{f(x)}, \quad \text{sur } ]e, +\infty[$$

*Solution particulière à l'équation homogène* Nous essayons de trouver une solution non-nulle de l'équation homogène associée :

$$y'' - \frac{1}{x\log(x) - 1}y' + \frac{1}{x^2(\log(x) - 1)}y = 0$$

On remarque que $y(x) = x$ est une solution. En effet, $y'(x) = 1$ et $y''(x) = 0$, donc :

$$-\frac{1}{x(\log(x) - 1)} + \frac{x}{x^2(\log(x) - 1)} = 0, \quad \forall x \in ]e, +\infty[$$

Nous avons donc $v_1(x) = x$ qui est une solution particulière à l'équation homogène associée.

*Solution linéairement indépendante* Nous pouvons trouver une solution linéairement indépendante à l'équation différentielle homogène associée en prenant :

$$v_2(x) = c(x)v_1(x), \quad \text{où } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx, P(x) = \int p(x)dx$$

Nous savons que $p(x) = -\frac{1}{x(\log(x)-1)}$, donc :

$$P(x) = -\int \frac{dx}{x(\log(x) - 1)} = -\int \frac{d(\log(x))}{\log(x) - 1} = -\log(\log(x - 1))$$

où nous ne mettons pas de constante, et où nous n'avons pas besoin de mettre de valeur absolue puisque $x > e$.
Calculons maintenant $c(x)$ :

$$c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}dx = \int \frac{e^{\log(\log(x)-1)}}{x^2}dx = \int \frac{\log(x) - 1}{x^2}dx$$

Nous pouvons utiliser la linéarité des intégrales :

$$c(x) = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\log(x)}{x^2}dx = -\int \frac{dx}{x^2} - \int \log(x)d\left(\frac{1}{x}\right)$$

Faisons une intégration par partie :

$$c(x) = -\int \frac{d}{x^2} - \frac{\log(x)}{x} + \int \frac{1}{x}d(\log(x)) = -\int \frac{dx}{x^2} - \frac{\log(x)}{x} + \int \frac{dx}{x^2}$$

Et ainsi, on a obtenu notre $c(x)$ :

$$c(x) = -\frac{\log(x)}{x}$$

Et $v_2(x)$ en découle directement :

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = -\frac{\log(x)}{x}x = -\log(x)$$

En examen, il est une bonne idée de vérifier que $v_2(x)$ est bien une solution.

*Solution générale équation homogène*

Nous pouvons maintenant trouver la solution générale à l'équation homogène associée :

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \log(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in ]e, +\infty[$$

*Solution particulière équation complète*

Nous voulons maintenant trouver une solution particulière à l'équation complète. On sait que $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ est une solution, où :

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)}, \quad c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}dx$$

Nous pouvons calculer le Wronskien :

$$W[v_1, v_2](x) = \det\begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x & -\log(x) \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = \log(x) - 1$$

qui est bien différent de 0 pour tout $x$ sur $]e, +\infty[$. Nous pouvons maintenant calculer $c_1$ et $c_2$ :

$$\begin{aligned} c_1(x) = & -\int \frac{(\log(x)-1)(-\log(x))}{(\log(x)-1)}dx = \int \log(x)dx \\ & = x\log(x) - \int x\frac{1}{x}dx = x\log(x) - x \end{aligned}$$

$$c_2(x) = \int \frac{(\log(x)-1)x}{\log(x)-1}dx = \int xdx = \frac{1}{2}x^2$$

(où on supprime les constantes).

Ainsi, nous trouvons une solution particulière à l'équation complète :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) \\ &= x(\log(x)-1)x + \frac{1}{2}x^2(-\log(x)) \\ &= \frac{1}{2}x^2\log(x) - x^2 \end{aligned}$$

avec $x \in ]e, \infty[$.

Encore une fois, en examen, c'est une bonne idée de vérifier notre résultat.

*Solution générale équation complète*

Nous savons que la solution générale de l'équation complète est donnée par :

$$v(x) = C_1 x + C_2\log(x) + \frac{1}{2}x^2\log(x) - x^2, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in ]e, +\infty[$$

Mercredi 9 mars 2022 — **Cours 6 : Fin des équations différentielles**

**Méthode des coefficients indéterminés**

Cette méthode permet de trouver une solution particulière à l'équation $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x), \quad p, q \in \mathbb{R}$

Pour que cette méthode fonctionne, il faut que $f(x)$ soit une combinaison linéaire de :

$$e^{cx} R_n(x) \quad \text{et} \quad e^{ax}(\cos(bx)P_n(x) + \sin(bx)Q_m(x))$$

où $R_n(x), P_n(x), Q_m(x)$ sont des polynômes de degré $n$ et $m$, et $c, a, b \in \mathbb{R}$.
Ainsi, si $f(x)$ est une combinaison linéaire de ces deux fonctions, disons $f(x) = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$, nous avons seulement besoin de trouver une méthode pour trouver une solution pour $f_1(x)$ et pour $f_2(x)$, puis utiliser le principe de la superposition des solutions.
Si $f(x) = e^{cx} R_n(x)$ :

| $c$ est une racine de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ | Ansatz |
|---|---|
| Non | $y_{part} = e^{cx} T_n(x)$ |
| Oui | $y_{part} = x^r e^{cx} T_n(x)$ |

où $r$ est la multiplicité de la racine $\lambda = c$, et $T_n(x)$ est polynôme de degré $n$ à coefficients indéterminé.
Si $f(x) = e^{ax}(\cos(bx)P_n(x) + \sin(bx)Q_n(x))$ :

| $a + ib$ est une racine de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$ | Ansatz |
|---|---|
| Non | $y_{part} = e^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx))$ |
| Oui | $y_{part} = xe^{ax}(T_N(x)\cos(bx) + S_N(x)\sin(bx))$ |

où $N = \max(n, m)$, et $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes de degré $N$ à coefficients indéterminés.

*Note personnelle : Mnémotechnie*

Dans les quatre cas, nous prenons exactement l'équation en tant qu'*Ansatz*, dans laquelle nous remplaçons les polynômes par des polynômes inconnus, et nous multiplions par la multiplicité d'une solution potentielle.

En effet, on remarque que, si $c$ n'est pas une racine de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, alors c'est tout comme si c'était une racine de multiplicité 0 (bien évidemment, ne jamais dire cette phrase à un oral d'analyse). Ainsi, $x^r = 1$. Nous pouvons faire le même raisonnement pour la deuxième fonction, mais nous pouvons aussi voir qu'il est impossible que $a + ib$ ait une multiplicité 2 (sinon cela voudrait dire que $b = 0$, puisque $z$ et $\overline{z}$ sont des solutions pour les nombres complexes, et donc nous serions dans le premier scénario). En d'autres mots, on obtient donc qu'on doit multiplier par $x$ et non pas $x^r$.

Par rapport à la valeur pour laquelle on doit considérer la multiplicité de la racine, nous pouvons faire deux observations. Premièrement, dans la deuxième fonction, si $b = 0$, alors nous sommes de retour dans la première fonction. Deuxièmement, il est probable qu'il y ait un lien avec l'exponentielle complexe, qui a une forme similaire, et que nous avons déjà utilisée pour résoudre ce genre de problèmes :

$$e^{a+ib} = e^a(\cos(b) + i\sin(b))$$

Pour l'intuition derrière cette méthode, il est probable que tout cela découle du fait qu'il est impossible de "tuer" l'exponentielle et les fonctions trigonométriques basiques en les dérivant (elles tournent en rond), alors que les polynômes descendent en degré.

**Exemple** Nous voulons trouver la solution générale de l'équation suivante, avec $x \in \mathbb{R}$ :

$$2y'' - y' - y = 100xe^{2x}$$

*Équation homogène associée*

Commençons par résoudre l'équation homogène associée :

$$y'' - \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}y = 0$$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$, et ses solutions sont $\lambda = 1, -\frac{1}{2}$. On obtient donc :

$$y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{-x}{2}}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

*Solution particulière équation complète*

Cherchons une solution particulière de l'équation complète par la méthode de coefficients indéterminés.

On remarque que $f(x) = 50xe^{2x}$ est de la forme $R_n(x)e^{cx}$ où $R_n(x) = 50x$ et $n = 1, c = 2$. Ainsi, $f(x)$ est de forme acceptée par la méthode des coefficients indéterminés.

On remarque que $c = 2$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique $\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$. Ainsi, nous pouvons prendre l'*Ansatz* :

$$\begin{aligned} y_{part} &= (Ax + B)e^{2x} \\ \implies y'_{part} &= Ae^{2x} + 2(Ax + B)e^{2x} \\ \implies y''_{part} &= 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x} \end{aligned}$$

Remplaçons la dans l'équation pour obtenir des contraintes sur $A$ et $B$ :

$$\underbrace{4Ae^{2x} + 4(Ax + B)e^{2x}}_{y''_{part}} \underbrace{- \frac{1}{2}Ae^{2x} - (Ax + B)e^{2x}}_{-\frac{1}{2}y'_{part}} \underbrace{- \frac{1}{2}(ax + B)e^{2x}}_{\frac{-1}{2}y_{part}} = 50xe^{2x}$$

Ainsi, nous obtenons que :

$$xe^{2x}\left(4 - 1 - \frac{1}{2}\right)A + e^{2x}\left(\left(4 - \frac{1}{2}\right)A + \left(4 - 1 - \frac{1}{2}\right)B\right) = 50xe^{2x}$$

Ce qui implique que :

$$xe^{2x}\left(\frac{5}{2}A\right) + e^{2x}\left(\frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B\right) = 50xe^{2x}$$

Ceci nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \frac{5}{2}A = 50 \\ \frac{7}{2}A + \frac{5}{2}B = 0 \end{cases}$$

Ce qui nous permet de trouver que :

$$A = 20, \quad B = -28$$

C'est ensuite une bonne idée de vérifier le résultat.

*Solution générale*

Nous trouvons finalement que la solution générale de $2x'' - y' - y = 100xe^{2x}$ est :

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{\frac{-x}{2}} + (20x - 28)e^{2x}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$$

*Méthode de la variation de la constante*

Nous pouvons trouver le même résultat en utilisant la méthode de la variation de la constante.

Nous savons que $v_1(x) = e^x$ et $v_2(x) = e^{-\frac{x}{2}}$ sont deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène. Calculons leur Wronskien :

$$W[v_1, v_2](x) = \det\begin{pmatrix} e^x & e^{-\frac{x}{2}} \\ e^x & -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} - e^{\frac{x}{2}} = -\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}$$

Nous devons maintenant calculer $c_1(x)$ et $c_2(x)$ :

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2]}dx = -\int \frac{50xe^{2x}e^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}}dx = \ldots = \frac{100}{3}(x-1)e^x$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)}dx = \int \frac{50xe^{2x}e^x}{-\frac{3}{2}e^{\frac{x}{2}}}dx = \ldots = -\frac{40}{3}xe^{\frac{5}{2}x} + \frac{16}{3}e^{\frac{5}{2}x}$$

Ainsi, on obtient :

$$v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x) = \ldots = 20xe^{2x} - 28e^{2x}$$

comme attendu.

**Note personnelle : Résumé**

*EDVS*

Une équation de la forme $f(y)y' = g(x)$ se résout en séparant les variables :

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) \implies f(y)dy = g(x)dx \implies \int f(y)dy = \int g(x)dx$$

*EDL1 homogène*

La solution générale d'une EDL1 homogène $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ est donnée par :

$$y(x) = Ce^{-P(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

où $P(x)$ est une primitive (sans la constante) de $p(x)$.

*EDL1 complète*

Pour résoudre une EDL1 complète, $y'(x)+p(x)y(x) = f(x)$, nous utilisons plusieurs principes. La méthode de la variation de la constante nous donne une solution particulière :

$$v(x) = c(x)e^{-P(x)}, \quad \text{avec } c(x) = \int f(x)e^{P(x)}$$

où $P(x)$ est une primitive (sans la constante) de $p(x)$.

Ensuite, en trouvant $v_0(x)$, la solution générale à l'équation homogène associée, nous utilisons le principe de superposition des solutions pour trouver la solution générale à notre équation :

$$y(x) = v(x) + v_0(x)$$

*EDL2 homogène à coefficients constants*

Pour résoudre une EDL2 homogène à coefficients constants, $y''(x) + py(x) + qy(x) = 0$ où $p, q \in \mathbb{R}$, nous cherchons les racines $a, b \in \mathbb{C}$ du polynôme caractéristique :

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx}, & \text{si } a, b \in \mathbb{R}, a \neq b \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax}, & \text{si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + C_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x), & \text{si } a = \alpha + i\beta = \overline{b} \notin \mathbb{R} \end{cases}$$

*EDL2 homogène*

Pour résoudre une EDL2 homogène, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, nous avons besoin de deviner une solution particulière $v_1(x)$. De là, nous pouvons calculer une deuxième solution linéairement indépendante :

$$v_2(x) = c(x)v_1(x), \quad \text{avec } c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

où $P(x)$ est une primitive (sans la constante) de $p(x)$.
Finalement, la solution générale est donnée par :

$$y(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

*EDL2 à coefficients constants*

Pour résoudre une EDL2 à coefficients constants, $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$ où $p, q \in \mathbb{R}$, nous pouvons parfois aller plus vite que la méthode de la variation de la constante en utilisant la méthode des coefficients indéterminés, si $f(x)$ a une forme particulière.

*EDL2 complète*

Pour résoudre une EDL2 complète, $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$, nous cherchons d'abord deux solutions particulières linéairement indépendantes à l'EDL2 homogène associée $v_1(x)$ et $v_2(x)$ (qui nous donnent donc aussi la solution générale à cette EDL2 homogène associée). De là, nous obtenons une solution particulière à notre EDL2 complète à l'aide de la méthode de la variation de la constante :

$$v(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$$

Avec :

$$c_1(x) = -\int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix}$$

De là, nous pouvons trouver notre solution générale :

$$y(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) + v(x), \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

# Chapitre 3

# Espace $\mathbb{R}^n$

## 3.1 $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé

**Définition** $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de tous les $n$-tuples ordonnés de nombres réels.

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

On dit parfois que $\overrightarrow{x}$ est un point (élément) de $\mathbb{R}^n$.

**Opérations de $\mathbb{R}^n$** $\mathbb{R}^n$ est muni de deux opérations. La première est l'addition $+$ :

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}, \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \implies \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 & \cdots & x_n + y_n \end{pmatrix}$$

La deuxième est la multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$ :

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \implies \lambda \overrightarrow{x} \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \lambda x_1 & \cdots & \lambda x_n \end{pmatrix}$$

*Propriétés* On remarque que les opérations satisfont les propriétés suivantes, pour tout $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$, $\lambda, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

- $(\lambda_1 \lambda_2)\overrightarrow{x} = \lambda_1(\lambda_2 \overrightarrow{x}) = \lambda_2(\lambda_1 \overrightarrow{x})$
- $0\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \overrightarrow{0}$
- $1\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x}$
- $(\lambda_1 + \lambda_2)\overrightarrow{x} = \lambda_1 \overrightarrow{x} + \lambda_2 \overrightarrow{x}$
- $\lambda(\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}) = \lambda \overrightarrow{x} + \lambda \overrightarrow{y}$

**Base** Nous avons défini $\mathbb{R}^n$ comme des $n$-tuples ordonnés de nombres réels (et non de manière géométrique). Nous pouvons donc prendre la base :

$$\left\{\overrightarrow{e}_i = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}\right\}_{i=1^n} \implies \overrightarrow{e}_i \in \mathbb{R}^n, \quad i = 1, \ldots, n$$

où $\overrightarrow{e}_i$ a uniquement un 1 à la $i$-ème position.
On remarque que n'importe quel élément de $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire comme combinaison linéaire de cette base :

$$\overrightarrow{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \overrightarrow{e}_i = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

**Définition : Produit scalaire** Nous définissons **le produit scalaire** comme :

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$$

**Définition : Norme Euclidienne** Nous définissons la norme Euclidienne comme :

$$\|\vec{x}\| \overset{\text{déf}}{=} \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

**Proposition : Inégalité de Cauchy-Schwarz** Pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, nous avons :

$$|\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve* Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons la somme $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2$.

Nous savons que $\sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2 \geq 0$, puisque c'est une somme de termes positifs :

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda^2 x_i^2 + 2 x_i y_i + y_i^2\right)$$

Et donc :

$$0 \leq \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{a} \lambda^2 + \underbrace{2\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)}_{b} \lambda + \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{c}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Nous avons obtenu une équation quadratique selon $\lambda$ qui est toujours positive. Ainsi, on remarque qu'il est impossible que cette équation ait deux racines, sinon, par le théorèmes des valeurs intermédiaires, elle serait négative en certains points. Nous savons donc qu'elle a un discriminant négatif :

$$b^2 - 4ac \leq 0 \implies 4 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right)^2}_{= \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2} - 4 \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)}_{= \|\vec{x}\|^2} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} y_i^2\right)}_{= \|\vec{y}\|^2} \leq 0$$

Ce qui implique que :

$$\|\vec{x}\|^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \geq \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle^2 \implies \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \geq |\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle|$$

Puisque $\|\vec{x}\|$ et $\|\vec{y}\|$ sont positifs, nous pouvons enlever leur valeur absolue. Cependant, nous ne pouvons pas enlever celle du produit scalaire, car elle peut être négative (enfin nous pourrions, puisque $|x| \geq x$, mais nous perdrions de l'information).

□

**Propriétés norme Euclidienne**

1. La norme est toujours positive :

$$\|\vec{x}\| \geq 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$$

2. Si $\|\vec{x}\| = 0$, alors :
$$\vec{x} = \vec{0}$$
3. Linéarité :
$$\|\lambda\vec{x}\| = |\lambda|\|\vec{x}\|, \quad \vec{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$$
4. Inégalité triangulaire 1 :
$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|, \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$$
5. Inégalité triangulaire 2 :
$$\|\vec{x} - \vec{y}\| \geq \left|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\right|$$

*Preuve de l'inégalité triangulaire 1* Nous savons que :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \langle \vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle$$

Aussi :

$$\left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 = \langle \vec{x}, \vec{x}\rangle + 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| + \langle \vec{y}, \vec{y}\rangle$$

Ainsi, si on regarde la différence entre ces deux équations :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 - \left(\|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|\right)^2 = 2\langle x, y\rangle - 2\|\vec{x}\|\|\vec{y}\| \leq 0$$

par Cauchy-Schwarz.
Puisque les deux termes sont positifs, nous pouvons prendre une racine carrée sans valeur absolue, ce qui nous donne :

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

□

*Remarque* L'inégalité de Cauchy-Schwarz pourrait être considérée comme une de ces propriétés, mais, puisque nous devons la connaitre pour l'examen, j'ai décidé de la mettre à part.

**Définition : Distance** L'expression $\|\vec{x} - \vec{y}\| = d(\vec{x}, \vec{y})$ est appelée **la distance** entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ dans $\mathbb{R}^n$.

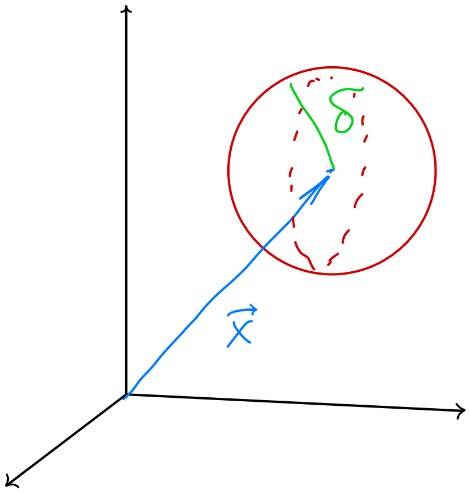
*Propriétés*
1. $d(\vec{x}, \vec{y}) = d(\vec{y}, \vec{x})$
2. $d(\vec{x}, \vec{y}) = 0 \iff \vec{x} = \vec{y}$
3. $d(\vec{x}, \vec{y}) \leq d(\vec{x}, \vec{z}) + d(\vec{z}, \vec{y})$

## 3.2 Topologie dans $\mathbb{R}^n$

**Définition : Boule ouverte** Pour tout $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et nombre réel $\delta > 0$, soit :

$$B(\vec{x}, \delta) = \left\{\vec{y} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\vec{x} - \vec{y}\| < \delta\right\}$$

$B(\vec{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé la **boule ouverte** de centre $\vec{x}$ et rayon $\delta$.




**Définition : Ensemble ouvert** Nous définissons que $E \subset \mathbb{R}^n$ est **ouvert** si et seulement si :

$$\forall \vec{\boldsymbol{x}} \in E \ \exists \delta > 0 \text{ tel que } B\big(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta\big) \subset E$$

*Remarque* Notez que, selon cette définition, $\varnothing$ est un ensemble ouvert. En effet, $\forall x \in \varnothing \ P(x)$ est une tautologie, peu importe $P(x)$.

**Définition : Point intérieur** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors, $\vec{\boldsymbol{x}} \in E$ est un **point intérieur** de $E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $B\big(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta\big) \subset E$.
L'ensemble des points intérieurs de $E$ est appelé **l'intérieur** de $E$, noté $\mathring{E}$.
Clairement :

$$\mathring{E} \subset E$$

*Observation* Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide.
On remarque que $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert si et seulement si $\mathring{E} = E$.

*Note personnelle : 1D* Regardons cette définitions en une dimension, dans $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$. Nous obtenons par exemple que l'intérieur de $]1, 2] \cup [5, 7[ \cup \{9\}$ est :

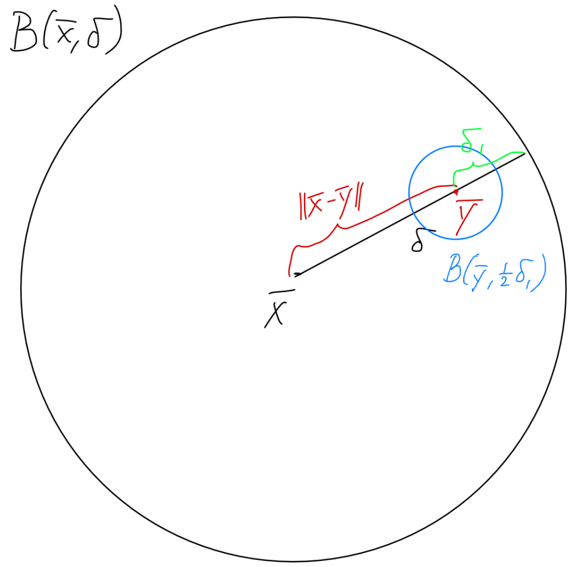
$$]1, 2[ \cup ]5, 7[$$

**Proposition** La boule ouverte $B\big(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta\big)$ est un ensemble ouvert.

*Preuve* Prenons $\widetilde{\delta} = \delta - \big\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}\big\|$, la distance entre $\vec{\boldsymbol{y}}$ et le bord de la boule. Par la définition de la boule ouverte, on sait que :

$$\big\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}\big\| < \delta \implies \widetilde{\delta} = \delta - \big\|\vec{\boldsymbol{x}} - \vec{\boldsymbol{y}}\big\| > 0$$

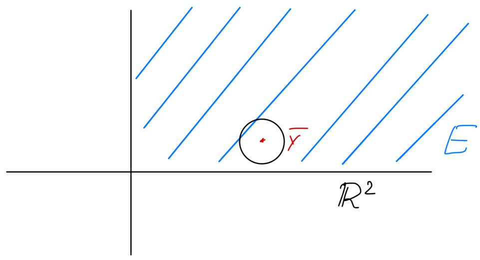
Nous pouvons prendre une boule ouverte $B\left(\vec{\boldsymbol{y}}, \frac{\widetilde{\delta}}{2}\right)$ qui est clairement inclue dans $B\big(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta\big)$.
Ansi, on ne déduit que $B\big(\vec{\boldsymbol{x}}, \delta\big) \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour tout $\vec{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $\delta > 0$.




**Exemple 1** Nous voulons montrer que l'ensemble suivant est ouvert :

$$E = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i > 0, \forall i = 1, \ldots, n \right\}$$

Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} \in E$. Alors, nous pouvons prendre $B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \min(y_i)\right) \subset E$.




**Exemple 2** Nous savons déjà que $\varnothing \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert par définition. Nous voulons aussi montrer que $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert.
Soit $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n$. Nous pouvons prendre n'importe quel $\delta > 0$, et nous avons $B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \delta\right) \subset \mathbb{R}^n$.

**Exemple 3** Soit $n \geq 2$. Nous définissons l'ensemble suivant :

$$E = \left\{ \overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, ..., n \right\}$$

Nous voulons montrer qu'il n'est pas ouvert.
Prenons le point $\overrightarrow{\boldsymbol{y}} = \begin{pmatrix} 0 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$ où $y_2, \ldots, y_n > 0$. Alors, pour tout $\delta > 0$ :

$$B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{y}}, \delta\right) \ni \begin{pmatrix} \frac{\delta}{2} & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \notin E$$

**Propriétés**

1. Toute réunion (même infinie) $\bigcup_{i \in I} E_i$ de sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.
2. Toute intersection *finie* $\bigcap_{i=1}^n E_i$ de sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

*Preuve de la propriété 1* Si $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in \bigcup_{i \in I} E_i$, alors nous savons que $\overrightarrow{\boldsymbol{x}} \in E_j$ pour un indice $j$. Or, puisque $E_j$ est ouvert, il existe un $\delta > 0$ tel que $B\left(\overrightarrow{\boldsymbol{x}}, \delta\right) \subset E_j \subset \bigcup_{i \in I} E_i$.

□

*Preuve de la propriété 2*

Soit $\overrightarrow{x} \in \bigcap_{i=1}^n E_i$. Alors, nous savons que pour tout $j$, $\overrightarrow{x} \in E_j$. Puisque $E_j$ est ouvert pour tout $j$, il existe $\delta_j > 0$ tel que $B(\overrightarrow{x}, \delta_j) \subset E_j$. Puisqu'on a un nombre fini d'éléments, nous savons que $\min_j \delta_j$ existe. Donc :

$$B\left(\overrightarrow{x}, \min_j \delta_j\right) \subset E_j \ \forall j \implies B\left(\overrightarrow{x}, \min_j \delta_j\right) \subset \bigcap_{i=1}^n E_i = E$$

□

Nous pouvons aussi remarquer qu'une intersection infinie de sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas nécessairement ouvert :

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B\left(\overrightarrow{0}, \frac{1}{k}\right) = \left\{\overrightarrow{0}\right\} \subset \mathbb{R}^n$$

**Définition : Complémentaire d'un ensemble**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Son **complémentaire**, noté $CE$, est défini par :

$$CE \overset{\text{déf}}{=} \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \overrightarrow{x} \notin E\right\} = \mathbb{R}^n \setminus E$$

**Définition : Ensemble fermé**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. $E$ est **fermé** dans $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $CE$ est ouvert.

**Exemple 1**

Nous savons que l'ensemble suivant est fermé :

$$E = \left\{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right\| \geq \delta\right\}$$

En effet, $E = CB(\overrightarrow{x}, \delta) \subset \mathbb{R}^n$, et nous savons que $B(\overrightarrow{x}, \delta)$ est un sous-ensemble ouvert.

**Exemple 2**

Soit $E = \left\{\overrightarrow{x}\right\} \in \mathbb{R}^n$. Nous voulons montrer qu'il est fermé. Ceci est équivalent à montrer que son complémentaire est ouvert :

$$CE = \left\{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \left\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right\| > 0\right\}$$

Pour tout $\overrightarrow{y} \in CE$, nous pouvons prendre la boule :

$$B\left(\overrightarrow{y}, \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{x}\right\|\right) \subset CE$$

**Exemple 3**

Nous voulons montrer que l'ensemble suivant est fermé :

$$E = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 = 0\right\} \implies CE = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 \neq 0\right\}$$

Montrons que $CE$ est ouvert. Soit $\overrightarrow{z} \in CE$, donc $z_1 \neq 0$. Alors, nous pouvons prendre :

$$B\left(\overrightarrow{z}, \frac{1}{2}|z_1|\right) \subset CE$$

**Exemple 4**

Soit l'ensemble suivant, où $n \geq 2$ :

$$E = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 = 0, x_i > 0, i = 2, \ldots, n\right\}$$

Son complémentaire est donné par :

$$CE = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 \neq 0\right\} \cup \bigcup_{i=2}^n \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \leq 0\right\}$$

Nous allons montrer que $CE$ n'est pas ouvert. Soit $\overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & y_3 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \in CE$. Pour tout $\delta > 0$, $B\left(\overrightarrow{y}, \delta\right)$ contient :

$$\overrightarrow{p} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\delta}{2} & y_3 & \cdots & y_4 \end{pmatrix} \in B\left(\overrightarrow{y}, \delta\right) \text{ et } \overrightarrow{p} \in E$$

Cependant, cela implique que $\overrightarrow{p} \notin CE$ pour tout $\delta > 0$. Ainsi, on obtient que $CE$ n'est pas fermé et donc que $E$ n'est pas ouvert.
On avait déjà démontré que $E$ n'était pas fermé. C'est donc un ensemble qui est ni ouvert ni fermé.

**Exemple 5** Nous pouvons démontrer que $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermés car $C\varnothing = \mathbb{R}^n$ et $C\mathbb{R}^n = \varnothing$ qui sont ouverts.
Plus généralement, il est possible de démontrer que les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ fermés et ouverts à la fois sont $\varnothing$ et $\mathbb{R}^n$.

**Propriétés**

1. Toute intersection (même infinie) de sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.
2. Toute réunion finie de sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

*Preuve* Pour démontrer ces propriétés, nous pouvons utilises les propriétés des sous-ensembles ouverts, et en voyant que :

$$C\bigcap_{i \in I} E_i = \bigcup_{i \in I} CE_i$$

$$C\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i$$

Mercredi 16 mars 2022 — **Cours 8 : J'ai failli ajouter un d à ce nom de théorème**

**Définition : Adhérence** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide.
L'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant $E$ est appelée **l'adhérence** de $E$. $\overline{E}$ est la notation de l'adhérence de $E$ dans $\mathbb{R}^n$.

*Remarque* On voit que si $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé, alors on a $E = \overline{E}$ par définition.

*Note personnelle : Intuition* Nous pouvons considérer $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$.
Prenons par exemple $E = \left]1, 2\right] \cup \left\{6\right\}$. Alors, son adhérence est donnée par :

$$\overline{E} = \left[1, 2\right] \cup \left\{6\right\}$$

L'adhérence est donnée par l'ensemble en union avec sa frontière (concept qu'on va définir juste après).

**Définition : Frontière** Soit un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide, où $E \neq \mathbb{R}^n$.
Un point $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ est un **point de frontière** de $E$ si toute boule ouverte de centre $\overrightarrow{x}$ contient au moins un point de $E$ et au moins un point de $CE$.
L'ensemble des points de frontière de $E$ s'appelle la **frontière** de $E$, notée $\partial E$.
Nous définissons aussi les deux frontières suivantes :

$$\partial\varnothing = \varnothing, \quad \partial\mathbb{R}^n = \varnothing$$

**Exemple** Prenons le sous-ensemble suivant :

$$E = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i > 0, i = 1, \ldots, n\right\}$$

C'est un sous-ensemble ouvert, comme nous l'avons déjà montré.

Pour trouver l'adhérence, nous pouvons prendre le plus petit sous-ensemble fermé contenant $E$ :

$$\overline{E} = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_i \geq 0, i = 1, \dots n \right\}$$

Nous pouvons aussi trouver la frontière :

$$\partial E = \left\{ \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \exists i \; x_i = 0, \forall j \neq i \; x_j \geq 0 \right\}$$

**Propriétés** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors, nous avons les propriétés suivantes :

1. $\mathring{E} \cap \partial E = \emptyset$
2. $\mathring{E} \cup \partial E = \overline{E}$
3. $\partial E = \overline{E} \setminus \mathring{E}$

## 3.3 Suites dans $\mathbb{R}^n$

**Définition : Suite dans $\mathbb{R}^n$** Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}^n$ :

$$f : k \mapsto \overrightarrow{x_k} = \begin{pmatrix} x_{1k} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

$\left\{ \overrightarrow{x_k} \right\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

**Définition : Convergence** Une suite $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ est **convergente** et admet pour **limite** $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \geq k_0$, nous avons :

$$\left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x} \right\| \leq \varepsilon$$

Nous notons :

$$\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x}$$

*Remarque* Notez que $\left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x} \right\| \leq \varepsilon$ est équivalent à $\overrightarrow{x_k} \in \overline{B\left( \overrightarrow{x}, \varepsilon \right)}$.

**Proposition** Soit $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Alors :

$$\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x} \iff \lim_{k \to \infty} x_{j,k} = x_j, \quad \forall j = 1, \dots, n$$

*Preuve* En effet, nous savons que :

$$\varepsilon \geq \left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x} \right\| = \left( \sum_{j=1}^{n} \left( x_{j,k} - x_j \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Puisque c'est une somme, de termes positifs, nous avons $\left( x_{j,k} - x_j \right)^2 \leq \varepsilon_j \leq \varepsilon$. Ainsi, nous pouvons rendre $x_{j,k}$ et $x_j$ arbitrairement proches en augmentant $k$, ce qui est la définition de la limite.

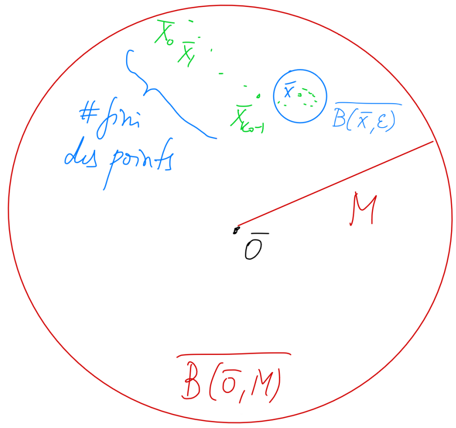
□

**Définition : Suite bornée** Une suite $\left\{ \overrightarrow{x_k} \right\}$ est **bornée** s'il existe un $M > 0$ tel que $\left\{ \overrightarrow{x_k} \right\}$ est contenue dans la boule fermée $\overline{B\left( \overrightarrow{0}, M \right)}$.

**Propriétés**

1. La liste d'une suite $\left\{ \overrightarrow{x_k} \right\}$, si elle existe, est unique.
2. Toute suite convergente $\left\{ \overrightarrow{x_k} \right\}$ est bornée.

*Justification de la propriété 2* Par définition, si une suite est convergente, alors $\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x}$. Cela implique donc que, pour $\varepsilon = 1$ par exemple, il existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$, nous avons $\left\| \overrightarrow{x_k} - \overrightarrow{x} \right\| \leq \varepsilon = 1$, donc que pour $k \geq k_0$, $x_k \in \overline{B\left(\overrightarrow{x}, \varepsilon\right)}$. Puisqu'il y a un un nombre fini de points $\overrightarrow{x_0}, \ldots, \overrightarrow{x_{k_0-1}}$. En prenant en compte la distance maximale à l'origine de cette boule, et la distance maximale de ces points (qui existe puisqu'il y en a un nombre finis), nous avons trouvé un $M > 0$ tel que $\overrightarrow{x_k} \in \overline{B\left(\overrightarrow{0}, M\right)}$.




**Théorème de Bolzano-Weierstrass** Nous pouvons extraire une sous-suite convergente de toute suite bornée $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\} \subset \mathbb{R}^n$.

**Théorème : Lien entre les suites dans $\mathbb{R}^n$ et la topologie** Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé si et seulement si toute suite $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\} \subset E$ d'éléments de $E$ qui converge a pour limite un élément de $E$.

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve* $\Longrightarrow$ Nous supposons que $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé.
Supposons par l'absurde qu'il existe une suite $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\} \subset E$ d'éléments de $E$ qui converge et qui a pour limite $\overrightarrow{x} \notin E$. Ainsi, on sait que $\overrightarrow{x} \in CE$, qui est un ensemble ouvert dans $\mathbb{R}^n$ (puisque $E$ est fermé par hypothèse). Puisque cet ensemble est ouvert nous savons, par définition, que $\exists \delta > 0$ tel que :

$$B\left(\overrightarrow{x}, \delta\right) \subset CE$$

Or, cela implique que :

$$\underbrace{\left\{\overrightarrow{x_k}\ \forall k \in \mathbb{N}\right\}}_{\subset E} \cap \underbrace{B\left(\overrightarrow{x}, \delta\right)}_{\subset CE} = \emptyset$$

En d'autres mots, aucun élément de la suite ne fait partie de cette boule ouverte.
De l'autre côté, puisque $\lim_{k \to \infty} \overrightarrow{x_k} = \overrightarrow{x}$, nous avons qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq k_0$ :

$$\overrightarrow{x_k} \in \overline{B\left(\overrightarrow{x}, \frac{\delta}{2}\right)} \subset B\left(\overrightarrow{x}, \delta\right)$$

En d'autres mots, pour $k \geq k_0$, $\overrightarrow{x_k}$ fait partie de notre boule ouverte. Ceci entre en contradiction avec ce que nous avions vu ci-dessus.

$\square$

*Preuve* $\Longleftarrow$ Nous allons démontrer notre proposition par la contraposée : nous voulons montrer que si $E \subset \mathbb{R}^n$ n'est pas fermé, alors il existe une suite $\{\overrightarrow{x_k} \subset E\}$ d'éléments de $E$ qui converge et qui a pour un limite un élément qui n'est pas dans $E$.

Puisque nous savons que $E$ n'est pas fermé, nous savons que $CE$ n'est pas ouvert. Ainsi, $\exists \overrightarrow{y} \in CE$ tel que, pour tout $\varepsilon > 0$ :

$$B(\overrightarrow{y}, \varepsilon) \cap E \neq \varnothing$$

Plus précisément, on peut prendre $\varepsilon = \frac{1}{k}$, ce qui nous donne :

$$\forall k \in \mathbb{N}_+,\ B\left(\overrightarrow{y}, \frac{1}{k}\right) \cap E \neq \varnothing$$

Ceci implique que, pour tout $k$, on sait qu'il existe un $\overrightarrow{y_k}$ tel que $\overrightarrow{y_k} \in B(\overrightarrow{y}, \frac{1}{k})$ et $\overrightarrow{y_k} \in E$. Ceci nous donne une suite $\{\overrightarrow{y_k}\}_{k \in \mathbb{N}_+} \subset E$ telle que $\lim_{k\to\infty} \overrightarrow{y_k} = \overrightarrow{y} \in CE$, et donc $\overrightarrow{y} \notin E$.

□

**Remarque** Pour construire l'adhérence $\overline{E}$ d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de $E$.

*Exemple* Dans $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, si on prend toutes les suites d'éléments de $[0, 1[$, il y a des suites qui convergent vers toutes les valeurs entre 0 et 1, compris.

**Définition : Ensemble borné** Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^n$ est **borné** s'il existe un $M > 0$ tel que :

$$E \subset \overline{B\left(\overrightarrow{\mathbf{0}}, M\right)}$$

**Définition : Ensemble compact** Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est **compact** s'il est fermé et borné.

**Exemple 1** Prenons une boule fermée quelconque :

$$\overline{B(\overrightarrow{x}, \delta)} = \left\{\overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\right\| \leq \delta\right\}$$

Nous savons qu'elle est bornée car :

$$\overline{B(\overrightarrow{x}, \delta)} \subset \overline{B\left(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \left\|\overrightarrow{x}\right\| + \delta\right)}$$

On peut donc en déduire qu'une boule fermée est compacte.

**Exemple 2** Prenons l'ensemble suivant, où $n \geq 2$ :

$$E = \left\{\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } x_1 = 0\right\}$$

Il est clairement fermé, on peut prendre n'importe quelle boule centrée sur la droite définie par $CE$ $(x_1 = 0)$, il est impossible de trouver un $\delta$ qui fait qu'elle est entièrement inclue dans $CE$.

Cependant, nous pouvons aussi voir que $E$ n'est pas borné. Prenons la suite suivante :

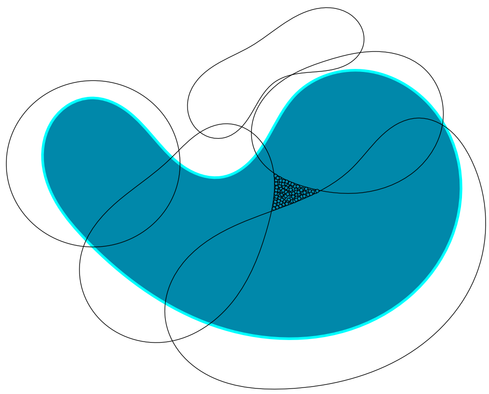
$$\left\{\overrightarrow{a_k} = (0, k, 0, 0, \cdots)\right\}_{k \in \mathbb{N}} \subset E$$

Les normes forment la suite $\left\|\overrightarrow{a_k}\right\| = k \in \mathbb{N}$. La distance entre l'origine et les éléments de $\left(\overrightarrow{a_k}\right)$ n'est donc pas bornée, ce qui nous permet d'en déduire que $E$ n'est pas borné. Ainsi, $E$ n'est pas compact.

**Définition : Recouvrement** Un **recouvrement** d'un ensemble $E$ est défini par :

$$E \subset \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts}$$

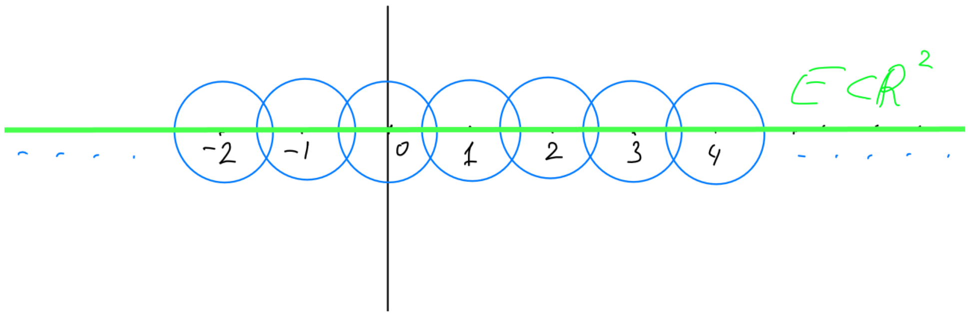
Notez que $I$ peut être innombrable.



**Théorème de Heine-Borel-Lebesgue** Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact si et seulement si de *tout* recouvrement de $E$ par des sous-ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$ on peut extraire une famille finie d'ensembles qui forment un recouvrement de $E$.

**Exemple 1.1** Une droite dans $\mathbb{R}^n$, où $n \geq 2$, est fermée mais pas bornée, et donc pas compacte. Prenons une origine quelconque sur la droite, et numérotons là comme la droite des réelles. Alors, nous pouvons prendre le recouvrement suivant :

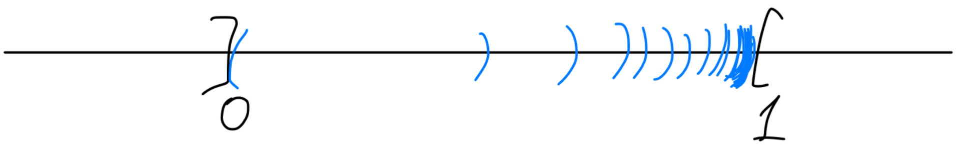
$$E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B\left(n, \frac{2}{3}\right)$$




On ne peut clairement pas choisir de sous-recouvrement fini qui recouvre $E$. Si on jette une-seule boule, ce qui reste ne couvrira pas notre ensemble.

**Exemple 1.2** Un intervalle ouvert dans $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, $E = ]0, 1[ \subset \mathbb{R}$ n'est pas compact. Il est bien borné, mais pas fermé.
Prenons le recouvrement suivant :

$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}_+} \left]0, \frac{i}{i+1}\right[$$



Il est aussi impossible de choisir un sous-recouvrement fini. En effet, avec un nombre fini d'intervalles, alors il existe un $i$ qui est le plus grand, et donc nous n'atteignons pas les valeurs entre $\frac{i}{i+1}$ et 1.

**Exemple 2.1** Prenons l'ensemble suivant :

$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 1 > \sin(x+y) \geq -2\right\}$$

Nous remarquons que $\sin(x+y) \geq -2$ tient toujours, $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pour l'autre condition, nous avons besoin de :

$$\sin(x+y) \neq 1 \iff x + y \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \iff y \neq -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

On obtient donc que :

$$CA = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = -x + \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right\}$$

Or, c'est une union de droites, donc il est clairement fermé. On obtient ainsi que $A$ est ouvert.

**Exemple 2.2** Prenons l'ensemble suivant :

$$B = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \sqrt{xy} < 2\right\}$$

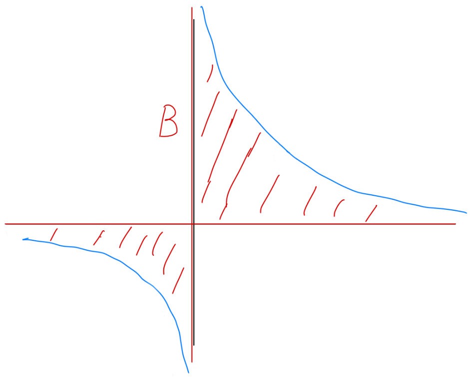
Pour que $\sqrt{xy}$ existe, nous avons besoin de $xy \geq 0$. De plus, nous avons aussi la condition $\sqrt{xy} < 2 \implies xy < 4$.
Nous avons donc deux cas. Si $x > 0$, alors $y \geq 0$ et :

$$xy < 4 \iff y < \frac{4}{x}$$

Si $x < 0$, alors $y \leq 0$ et :

$$xy < 4 \iff y > \frac{4}{x}$$

Si $x = 0$, alors $y$ est arbitraire.




Les axes sont inclus dans notre sous-ensembles, mais pas les courbes. Ainsi, $B$ n'est ni ouvert ni fermé.

# Chapitre 4

# Fonctions réelles de plusieurs variables réelles

## 4.1 Définitions et exemples

**Définition** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble non-vide où $n \geq 1$.
Une **fonction** $E \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application qui envoie chaque point $\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \end{pmatrix} \in E$ dans $\mathbb{R}$. $E$ est **le domaine de définition** de $f$, et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est **l'ensemble image**.

**Exemple 1** Prenons la fonction suivante :

$$f(x, y) = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$$

Pour notre domaine de définition, on veut que $x^2 + y^2 \leq 1$, ce qui est un disque de rayon 1 et centre $(0, 0)$. Donc :

$$E = \left\{(x, y) \subset \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 \leq 1\right\}$$

Considérons le graphique de $z = f(x, y)$. Cette équation est équivalente à :

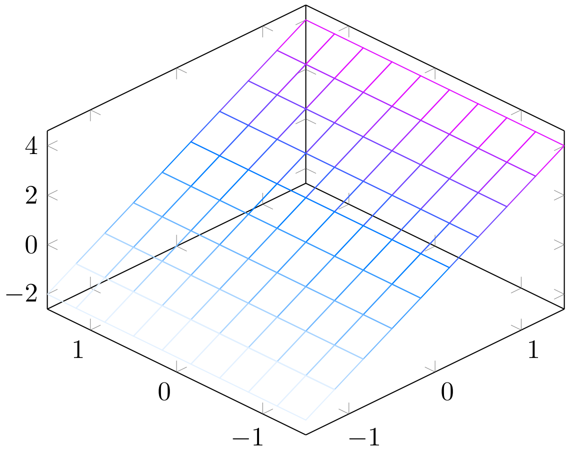
$$\begin{cases} z^2 = 1 - \left(x^2 + y^2\right) \iff x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ z \geq 0 \end{cases}$$

Il est donc clair que c'est une hemisphère de rayon 1 et centre $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$.

**Exemple 2** Prenons maintenant la fonction suivante :

$$f(x, y) = 2x + 1 \iff z = 2x + 1$$

Si on considère seulement le graphique sur $x$ et $z$, alors c'est une droite. Si maintenant on rajoute $y$, on prolonge cette droite, ce qui nous donne un plan.




**Exemple 3** Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, et la fonction suivante :

$$f(x, y) = ax + by + c$$

Clairement, $E = \mathbb{R}^2$. Nous nous demandons ce que représente cette fonction graphiquement.
Pour simplifier, prenons $c = 0$. Nous pouvons considérer le graphique de $f$ :

$$\begin{aligned} F &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by = z\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } ax + by - z = 0\right\} \\ &= \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \langle (x, y, z), (a, b, -1)\rangle = 0\right\} \end{aligned}$$

ce qui est le plan orthogonal à $\overrightarrow{n} = (a, b, -1)$ et qui contient $(0, 0, 0)$.
Considérons maintenant $c \in \mathbb{R}$. Il suffit de monter le plan par $c$ unités le long de l'axe $z$ pour obtenir le graphique de notre fonction : le plan orthogonal à $\overrightarrow{n} = (a, b, -1)$ qui contient $(0, 0, c)$.

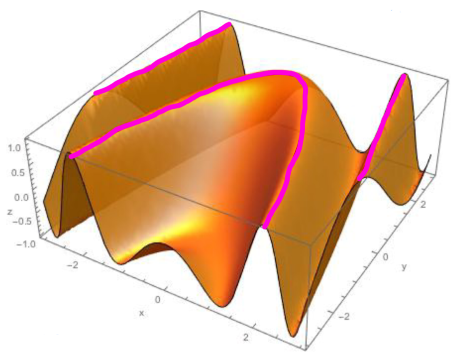
**Définition** Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}^n$ et $c \in f(E) \subset \mathbb{R}$. Alors, l'ensemble suivant est appelé **l'ensemble de niveau** de $f$ :

$$N_f(c) = \left\{\overrightarrow{x} \in E \text{ tel que } f\left(\overrightarrow{x}\right) = c\right\} \subset E$$

**Exemple** Prenons la fonction suivante :

$$f(x, y) = \sin\left(x^2 + y\right), \quad E = \mathbb{R}^2$$

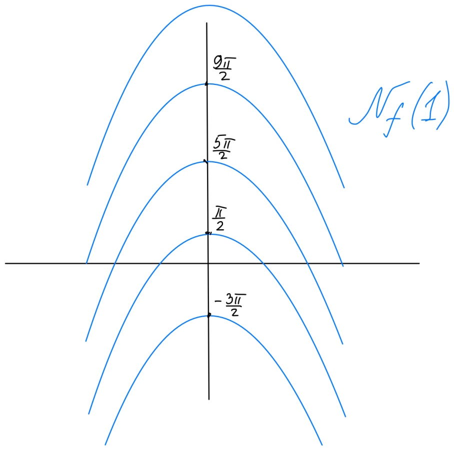
Son ensemble image est donné par $f(E) = [-1, 1]$ puisque le sinus est borné.



Calculons $N_f(1)$ :

$$\begin{aligned} N_f(1) &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } \sin\left(x^2+y^2\right) = 1\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne le graphique suivant :




## 4.2 Limites et continuité

**Définition : Définition au voisinage** Une fonction est **définie au voisinage** de $\overrightarrow{x_0}$ si :

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } B\left(\overrightarrow{x_0}, \delta\right) \subset E \cup \{x_0\}$$

> *Remarque* La fonction n'a pas besoin d'être définie en $\overrightarrow{x_0}$ pour être définie au voisinage de ce point.

**Définition : Limite** Une fonction définie au voisinage de $\overrightarrow{x_0}$ admet pour **limite** le nombre réel $\ell$ lorsque $\overrightarrow{x}$ tend vers $\overrightarrow{x_0}$, si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$ :

$$0 < \left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_0}\right\| \leq \delta \implies \left|f\left(\overrightarrow{x}\right) - \ell\right| \leq \varepsilon$$

Dans ce cas, nous notons :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f\left(\overrightarrow{x}\right) = \ell$$

**Définition : Continuité** Soit $\overrightarrow{x_0} \in E$ un point intérieur de $E$.
$f : E \mapsto \mathbb{R}$ est continue en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_0}$ si et seulement si :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} f\left(\overrightarrow{x}\right) = f\left(\overrightarrow{x_0}\right)$$

Il faut donc à la fois que la limite existe, et qu'elle soit égale à la valeur de la fonction.

**Exemple 1** Nous souhaitons montrer que la fonction suivante est continue pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f(x,y) = x + y$$

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la différence suivante :

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0,y_0)| &= |(x+y) - (x_0+y_0)| \\
&\overset{\dagger}{\leq} |x - x_0| + |y - y_0| \\
&= \sqrt{(x-x_0)^2} + \sqrt{(y-y_0)^2} \\
&\leq \sqrt{(x-x_0)^2 + \underbrace{(y-y_0)^2}_{\geq 0}} + \sqrt{\underbrace{(x-x_0)^2}_{\geq 0} + (y-y_0)^2} \\
&= 2\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\
&\leq 2\delta \\
&= 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

en prenant $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, et où l'inégalité † est l'inégalité triangulaire.
On en déduit que la fonction $f(x,y) = x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, par définition de la continuité.

**Exemple 2** Nous souhaitons montrer que la fonction suivante est continue pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ :

$$f(x,y) = x \cdot y$$

Le cas où $x_0 = 0$ est laissé en exercice au lecteur.
Supposons maintenant que $x_0 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Considérons la différence suivante :

$$\begin{aligned}
|f(x,y) - f(x_0,y_0)| &= |xy - x_0y_0| \\
&= |xy - x_0y_0 + x_0y - x_0y| \\
&= |(x-x_0)y + x_0(y-y_0)| \\
&\leq |x-x_0||y| + |y-y_0||x_0|
\end{aligned}$$

Regardons le deuxième terme :

$$|y-y_0||x_0| \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}|x_0| \leq \delta|x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|}|x_0| = \frac{\varepsilon}{2}$$

en prenant $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|}$, puisqu'on sait que $|x_0| \neq 0$.
Regardons maintenant le premier terme, qui est plus difficile puisque $|y|$ est une variable :

$$|x-x_0||y| \leq \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \underbrace{|y|}_{\leq |y_0|+\delta} \leq \delta(|y_0| + \delta) \leq \delta(|y_0| + 1) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

en prenant $\delta \leq 1$ et $\delta \leq \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}$.
Nous pouvons mettre ensemble toutes les conditions sur $\delta$ :

$$\delta = \min\left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1\right)$$

Dans ce cas, en reprenant notre première différence :

$$|f(x,y) - f(x_0,y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Ainsi, par la définition de la limite, on obtient que :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} xy = x_0y_0$$

ce qui implique que la fonction est continue partout sur $\mathbb{R}^2$.

**Théorème : Caractérisation des limites à partir des suites convergentes**

Une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\vec{x_0}$ admet pour limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque $\vec{x} \to \vec{x_0}$ si et seulement si *pour toute* suite d'éléments $\{\vec{a_k}\}$ de $\{\vec{x} \in E$ tel que $\vec{x} \neq \vec{x_0}\}$, qui converge vers $\vec{x_0}$, la suite $\{f(\vec{a_k})\}$ converge vers $\ell$.
En d'autres mots :

$$\left(\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell\right) \iff \left(\lim_{k \to \infty} f(\vec{a_k}) = \ell, \ \forall \{\vec{a_k}\} \subset E \setminus \{\vec{x_0}\} \text{ telle que } \lim_{k \to \infty} \vec{a_k} = \vec{x_0}\right)$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve* $\implies$

Nous savons par hypothèse que $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell$. Ainsi, par la définition de la limite, on sait que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que :

$$0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| \leq \delta \implies |f(\vec{x}) - \ell| \leq \varepsilon$$

Soit une suite arbitraire $\{\vec{a_k}\} \subset E \setminus \{\vec{x_0}\}$ telle que $\lim_{k \to \infty} \vec{a_k} = \vec{x_0}$. Puisque la définition des limites pour les suites marche pour tout $\widetilde{\varepsilon}$, nous pouvons prendre $\widetilde{\varepsilon} = \delta$. Ainsi, par définition, pour $\widetilde{\varepsilon} = \delta > 0$, nous savons que $\exists k_0$ tel que, pour tout $k \geq k_0$, on a :

$$\|\vec{a_k} - \vec{x_0}\| \leq \delta$$

Or, puisque $\{\vec{a_k}\} \subset E \setminus \{\vec{x}_0\}$, nous savons que $\vec{a_k} - \vec{x_0} \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \geq k_0$, $0 < \|\vec{a_k} - \vec{x_0}\| \leq \delta$. Cependant, cela implique par la première implication que :

$$|f(\vec{a_k}) - \ell| \leq \varepsilon$$

Ainsi, nous avons démontré que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $k_0$ tel que pour tout $k \geq k_0$ on a $|f(\vec{a_k}) - \ell| \leq \varepsilon$. En d'autres mots, nous avons montré que :

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{a_k}) = \ell$$

*Preuve* $\impliedby$

Nous allons faire cette preuve par la contraposée. Ainsi, nous supposons par hypothèse que $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) \neq \ell$.
Par la définition de la limite, on obtient que $\exists \varepsilon > 0$ tel que $\forall \delta > 0$, $\exists \vec{x_\delta}$ tel que :

$$\|\vec{x_\delta} - \vec{x_0}\| \leq \delta \quad \text{et} \quad |f(\vec{x_\delta}) - \ell| > \varepsilon$$

Puisque c'est vrai pour tout $\delta$, alors c'est aussi vrai pour le cas particulier où $\delta = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}_+$. Ainsi, pour le $\varepsilon$ dont nous connaissons l'existence, pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, il existe $\vec{x_k} \in E$ tel que :

$$\|\vec{x_k} - \vec{x_0}\| \leq \frac{1}{k} \quad \text{et} \quad |f(\vec{x_k}) - \ell| > \varepsilon$$

On obtient la suite $\{\vec{x_k}\}_{k=1}^{\infty}$ qui est telle que, par la définition, $\lim_{k \to \infty} \vec{x_k} = \vec{x_0}$. Cependant, cette suite est aussi telle que $|f(\vec{x_k}) - \ell| > \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}_+$, ce qui implique que :

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{x_k}) \neq \ell$$

□

**Opérations algébriques** Soient $f, g$ deux fonctions $E_{\mathbb{R}^n} \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} f(\vec{x}) = \ell_1 \quad \text{et} \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} g(\vec{x}) = \ell_2$$

Alors, nous avons :

1. $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (\alpha f + \beta g)(\vec{x}) = \alpha \ell_1 + \beta \ell_2$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
2. $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} (f \cdot g)(\vec{x}) = \ell_1 \ell_2$
3. Si $\ell_2 \neq 0$, alors $\lim_{\vec{x} \to \vec{x_0}} \left(\frac{f}{g}\right)(\vec{x}) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$

Cet propriétés sont facilement démontrables à l'aide de la caractérisation des limites à partir des suites.

> *Implication* On peut en déduire que tous les polynômes de plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition.

**Remarque** La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$. En effet, il nous suffit de trouver deux suites $\{\vec{a_k}\}$ et $\{\vec{b_k}\}$ d'éléments de $E \setminus \{\vec{x_0}\}$, convergentes vers $\vec{x_0} \in \mathbb{R}^n$, et telles que :

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{a_k}) \neq \lim_{k \to \infty} f(\vec{b_k})$$

**Exemple 1** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nous voulons savoir vers quoi tend la fonction quand $(x, y)$ tend vers $(0, 0)$. De manière générale, quand le degré du numérateur est égal au degré du dénominateur, il est relativement probable que la limite n'existe pas. Essayons de le démontrer par la caractérisation des limites à partir des suites convergentes.
Prenons la suite $\vec{a_k} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$, qui converge bien vers 0 quand $k \to \infty$. Alors :

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{a_k}) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{1}{k}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^2} = \frac{1}{2}$$

Comme deuxième suite, prenons $\vec{b_k} = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ qui tend bien vers $(0, 0)$ quand $k$ tend vers l'infini. Alors :

$$\lim_{k \to \infty} f(\vec{b_k}) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot 0}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \to \infty} 0 = 0$$

Puisque les deux limites sont différentes, $\frac{1}{2} \neq 0$, on sait que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y)$ n'existe pas, par la caractérisation des suites.

Mercredi 23 mars 2022 — **Cours 10 : Le retour des gendarmes**

**Exemple 2** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases}$$

Utilisons nos deux mêmes limites : $\{\overrightarrow{a_k}\} = \left(\frac{1}{k}, 0\right)$ et $\left\{\overrightarrow{b}_k\right\} = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right)$ :

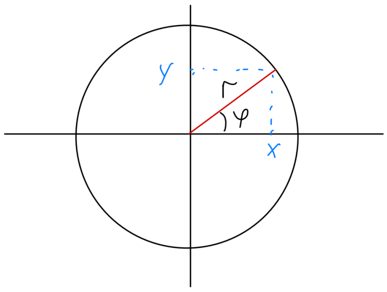
$$\lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{a_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0$$

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\overrightarrow{b_k}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^3} + \frac{1}{k^3}}{\frac{2}{k^2}} = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{2}{k}}{1} = 0$$

Nous décidons donc de formuler l'hypothèse que $\lim_{(x,y) \to (0,0)} = 0$.

*Preuve par changement de coordonnées*

Il est possible de démontrer cette limite par la définition. Cependant, une deuxième manière beaucoup plus efficace consiste à utiliser un changement de variable vers les coordonnées polaires.




Ce changement de variable nous donne :

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi)$$

où $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ et, si $r \neq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi[$.
Ainsi, on obtient que notre fonction *est égale* à :

$$\begin{aligned} f(r, \varphi) &= \frac{r^3\cos^3(\varphi) + r^3\sin^3(\varphi)}{r^2\cos^2(\varphi) + r^2\sin^2(\varphi)} \\ &= \frac{r^3\left(\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)\right)}{r^2} \\ &= r\left(\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)\right) \end{aligned}$$

Or, nous savons que $(x, y) \to (0, 0)$ est équivalent à dire que $r = \sqrt{x^2 + y^2} \to 0$ et $\varphi$ est une fonction inconnue de $r$. Ceci nous donne que :

$$\lim_{r \to 0} |f(r, \varphi)| = \lim_{r \to 0} \underbrace{r}_{\to 0} \underbrace{\left|\cos^3(\varphi) + \sin^3(\varphi)\right|}_{\leq 2} = 0$$

On en déduit donc que :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

Cette méthode est souvent efficace (mais pas toujours) pour montrer l'existence des limites à l'origine. Elle est à retenir.

□

**Remarque 1** Nous ne pouvons pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variables de la façon suivante :

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) \neq \lim_{x \to x_0} \left(\lim_{y \to y_0} f(x, y)\right)$$

En effet, si on considère à nouveau l'exemple 1 :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Considérons d'abord la limite de $y \to 0$, si $x \neq 0$ :

$$\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\overbrace{xy}^{\to 0}}{\underbrace{x^2}_{\neq 0} + y^2} = 0$$

Ainsi :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y) = \lim_{x\to 0} 0 = 0$$

Alors que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas. Nous arrivons au même problème si nous commençons par la limite selon $x$.

**Remarque 2** Si la limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe, et les limites par rapport à chaque variables existent pour tout $x$ et tout $y$ dans le domaine de $f$, alors on peut échanger l'ordre des limites :

$$\lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right)$$

**Remarque 3** L'existence de la limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ n'implique pas en général l'existence des limites $\lim_{x\to a} f(x,y)$ et $\lim_{y\to b} f(x,y)$.

*Exemple* Voici un exemple tiré du livre Douchet-Swahlen, qui ne nous est probablement pas demandé de savoir pour l'examen puisqu'il n'a pas été donné pendant le cours.

Soit la fonction d'une variable suivante :

$$h(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{si } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Prenons aussi la fonction suivante :

$$f(x,y) = xh(y) + yh(x)$$

Nous trouvons que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, alors que les limites par rapport à une seule variable n'existent pas.

**Théorème des 2 gendarmes** Soient $f, g, h : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$, telles que :

1. $\displaystyle\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} = \lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} g(\vec{x}) = \ell$
2. Il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in \{x \in E : 0 < \|\vec{x} - \vec{x_0}\| \leq \alpha\} = \overline{B(\vec{x_0}, \alpha)} \setminus \{\vec{x_0}\}$, on a :

$$f(\vec{x}) \leq h(\vec{x}) \leq g(\vec{x})$$

Alors :

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x_0}} h(\vec{x}) = \ell$$

*Preuve* Soit $\{\vec{a_k}\} \subset E$ une suite arbitraire telle que $\lim_{k\to\infty} \vec{a_k} = \vec{x_0}$. Alors, la première hypothèse nous donne par la caractérisation à partir des suites que :

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{a_k}) = \lim_{k\to\infty} g(\vec{a_k}) = \ell$$

De plus, la deuxième hypothèse nous dit qu'il existe un $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$f\left(\overrightarrow{a_k}\right) \leq h\left(\overrightarrow{a_k}\right) \leq g\left(\overrightarrow{a_k}\right), \ \forall k \geq k_0$$

Et donc par le théorème des 2 gendarmes pour les suites, cela implique que :

$$\exists \lim_{k \to \infty} h\left(\overrightarrow{a_k}\right) = \ell \in \mathbb{R}$$

On en déduit donc que, puisque $\left\{\overrightarrow{a_k}\right\} \to \overrightarrow{x_0}$ est une suite arbitraire convergente vers $\overrightarrow{x_0}$, par la caractérisation à partir des suites :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{x_0}} h\left(\overrightarrow{x}\right) = \ell$$

□

**Exemple** Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} xy\log(|x| + |y|), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On cherche une fonction $g(x, y)$ telle que $0 \leq |f(x, y) - 0| \leq g(x, y)$ pour $(x, y)$ au voisinage de $(0, 0)$, et telle que :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = 0$$

Soit $(x, y) \in \overline{B((0, 0), 1)}$. Cela donne donc que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, ce qui nous permet d'obtenir les inégalités suivantes :

$$|xy| = |x||y| = |x|\sqrt{y^2} \leq |x|\sqrt{x^2 + y^2} \leq |x|$$

$$|xy| = |x||y| = \sqrt{x^2}|y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}|y| \leq |y|$$

Nous savons donc que $\forall (x, y)$ tels que $\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$, nous avons :

$$0 \leq |xy\log(|x| + |y|)| \leq \frac{1}{2}(|x| + |y|)\log(|x| + |y|) = g(x, y)$$

Or, puisque $0 \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$, et puisque $\sqrt{x^2 + y^2} \to 0$, nous savons que $|x| + |y| \to 0$, par le théorème des 2 gendarmes.
Prenons maintenant $t = |x| + |y|$. Nous avons :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} g(x, y) = \lim_{t \to 0^+} g(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2}t\left|\underbrace{\log(t)}_{-\infty}\right| = -\lim_{t \to 0^+} \frac{1}{2}t\log(t)$$

$$\overset{s = \frac{1}{t}}{=} -\frac{1}{2}\lim_{s \to \infty} \frac{-\log(s)}{s} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{\text{BH}}{=}} \frac{1}{2}\lim_{s \to \infty} \frac{\frac{1}{s}}{1} = 0$$

Nous pouvons en déduire par les 2 gendarmes que :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$$

**Proposition : Continuité d'une fonction composée** Soient 2 sous-ensembles ensembles $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^p$. De plus, soient deux fonctions $\overrightarrow{g} : A \mapsto B$ et $f : B \mapsto \mathbb{R}$ où :

$$\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{x}\right) = \left(g_1\left(\overrightarrow{x}\right), \ldots, g_p\left(\overrightarrow{x}\right)\right)$$

Si $g_1, \ldots, g_p$ sont continues en $\overrightarrow{a} \in A$, et $f\left(\overrightarrow{y}\right)$ est continue en $\left(g_1\left(\overrightarrow{a}\right), \ldots, g_p\left(\overrightarrow{a}\right)\right)$, alors $f \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{x}\right)$ est continue en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}$.

**Exemple 1** Soit la fonction suivante :

$$h(x,y) = \sin(xy)\cos(xy), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

On remarque que $g(x,y) = xy$ est continue sur $\mathbb{R}^2$, et $f(t) = \sin(t)\cos(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $f \circ g(x,y) = \sin(xy)\cos(xy) = h(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ par la proposition.

**Exemple 2** Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(xy)}{xy}, & x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 1, & \text{autrement} \end{cases}$$

Prenons $g(x,y) = xy$ et :

$$h(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 1, & t = 0 \end{cases}$$

On sait que $g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ puisque c'est un polynôme, et nous savons que $h(t)$ est continue sur $\mathbb{R}$ puisque $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.
Ainsi, par notre proposition, $f(x,y) = h \circ g(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

**Exemple 3** Considérons la limite suivante :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \log(x)}{(x-1)^2 + y^2}$$

Cette limite est de la forme $\frac{0}{0}$, nous devons donc faire plus de travail. Nous formulons l'hypothèse que la limite existe. Le changement de variables vers coordonnées polaires semble ne pas être efficace car des choses peu agréables se passeraient avec le logarithme. Utilisons plutôt le théorème des deux gendarmes ; nous cherchons une fonction $g(x,y)$ telle que, au voisinage de $(1,0)$ :

$$0 \leq |f(x,y) - 0| \leq g(x,y) \quad \text{et} \quad \lim_{(x,y)\to(1,0)} = 0$$

Remarquons que :

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \left| \frac{(x-1)^2 \log(x)}{(x-1)^2 + \underbrace{y^2}_{\geq 0}} \right| \leq \frac{(x-1)^2 |\log(x)|}{(x-1)^2} = |\log(x)|$$

Nous avons donc obtenu :

$$0 \leq f(x,y) \leq |\log(x)| = g(x,y)$$

Or, nous remarquons que :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(1,0)} |\log(x)| = \lim_{x\to 1} |\log(x)| = 0$$

Ainsi, par les deux gendarmes :

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{(x-1)^2 \log(x)}{(x-1)^2 + y^2} = 0$$

## 4.3 Maximum et minimum d'une fonction sur un ensemble compact

**Définition : Maximum** Soit la fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$.
Si $M \in \mathbb{R}$ satisfait :

1. $f(\overrightarrow{x}) \leq M$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E$
2. $M \in f(E)$

Alors $M$ est le **maximum** de la fonction $f$ sur $E$.

**Définition : Minimum** Soit la fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$.
Si $m \in \mathbb{R}$ satisfait :

1. $f(\overrightarrow{x}) \geq m$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E$
2. $m \in f(E)$

Alors $m$ est le **minimum** de la fonction $f$ sur $E$.

**Exemple** Soit la fonction suivante, définie sur $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ :

$$f(x, y) = \sin\left(x^2 + y\right)$$

Alors, nous avons :

$$\max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = 1, \quad \min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x, y) = -1$$

**Théorème du min et du max sur un compact** Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^2$ atteint son maximum et son minimum, i.e. :

$$\exists \max_{\overrightarrow{x}\in E} f\left(\overrightarrow{x}\right), \quad \exists \min_{\overrightarrow{x}\in E} f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve $f(E)$ est borné* Nous voulons commencer par montrer que $\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right)\right\}_{\overrightarrow{x}\in E}$ est borné.
Supposons par l'absurde que $f(E)$ n'est pas borné. Ceci implique que, pour tout $k \geq 0$, il existe un $\overrightarrow{x_k} \in E$ tel que $\left|f\left(\overrightarrow{x_k}\right)\right| \geq k$. Ceci nous donne une suite $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\} \in E$.
Puisque $E$ est un ensemble compact, nous savons qu'il est borné, et donc $\left\{\overrightarrow{x_k}\right\}$ est bornée. Ainsi, par le théorème de Bolzano-Weierstrass, nous pouvons trouver une sous suite convergente $\left\{\overrightarrow{x_{k_p}}\right\}$, qui a pour limite un vecteur $\overrightarrow{x_0} \in \mathbb{R}^n$. Puisque $E$ est compact (et donc fermé), nous savons que $\overrightarrow{x_0} \in E$.
Puisque $f$ est continue, nous savons que :

$$\lim_{p\to\infty} f\left(\overrightarrow{x_{k_p}}\right) = f\left(\overrightarrow{x_0}\right) \in \mathbb{R}$$

Mais, par construction, $\left|f\left(\overrightarrow{x_k}\right)\right| \geq k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $\left\{f\left(\overrightarrow{x_{k_p}}\right)\right\}$ n'est pas bornée et ne peut donc pas converger. Ceci est notre contradiction, nous en concluons que $f$ est bornée sur $E$.

*Preuve $f$ atteint ses extremum* Nous voulons montrer que $f$ atteint son minimum et son maximum sur $E$.
Par ce que nous venons de démontrer, nous savons que $f(E)$ est un sous-ensemble borné. Ainsi :

$$\exists M = \sup\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right), \overrightarrow{x} \in E\right\}, \quad \exists m = \inf\left\{f\left(\overrightarrow{x}\right), \overrightarrow{x} \in E\right\}$$

Par la définition du supremum et de l'infimum, nous pouvons nous en rapprocher arbitrairement, donc cela implique qu'il existe deux suites $\{\vec{a_k}\}, \{\vec{b_k}\} \in E$ telles que :

$$\lim_{k\to\infty} f(\vec{a_k}) = m, \quad \lim_{k\to\infty} f\left(\vec{b_k}\right) = M$$

Or, puisque $\{\vec{a_k}\}, \{\vec{b_k}\} \in E$ (qui est borné), ce sont des suites bornées, et donc il existe des sous-suites convergentes. En d'autres mots :

$$\overrightarrow{a_{k_p}} \to \vec{a} \in \mathbb{R}^n, \quad \overrightarrow{b_{k_p}} \to \vec{b} \in \mathbb{R}^n$$

De plus, puisque $E$ est compact (et donc fermé), nous savons que $\vec{a} \in E$ et $\vec{b} \in E$. Ainsi, par la continuité de $f$ :

$$m = \lim_{k\to\infty} f(\vec{a_k}) = \lim_{p\to\infty} f(\overrightarrow{a_{k_p}}) = f(\vec{a})$$

$$M = \lim_{k\to\infty} f\left(\vec{b_k}\right) = \lim_{p\to\infty} f\left(\overrightarrow{b_{k_p}}\right) = f\left(\vec{b}\right)$$

Ainsi, nous savons qu'il existe $\vec{a}, \vec{b} \in E$ tels que :

$$f(\vec{a}) = m = \min_{\vec{x}\in E} f(\vec{x})$$

$$f\left(\vec{b}\right) = M = \max_{\vec{x}\in E} f(\vec{x})$$

□

*Remarque* Ce théorème est similaire à celui qu'on avait pour la 1D : une fonction continue sur un intervalle fermé borné atteint son minimum et son maximum.
Notez que, dans $\mathbb{R}^n$, pour que $f$ atteigne aussi toute valeur intermédiaire entre $m$ et $M$, il faut que $E$ soit compact, mais aussi qu'il soit connexe par chemins (la définition arrive juste après).

**Définition : Connexité par chemins** Un ensemble $E$ est **connexe par chemins** si, pour n'importe quels 2 points, il existe un chemin d'un point à l'autre qui est continu et qui est contenu entièrement dans $E$.

*Exemples* L'ensemble de gauche est compact et connexe par chemin, et celui de droite est compact mais pas convexe par chemins.

# Chapitre 5

# Calcul différentiel des fonctions de plusieurs variables

## 5.1 Dérivée partielles et le gradient

**Définition : dérivée partielle** Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction, où $E \subset \mathbb{R}^n$ est un ensemble ouvert, et soit la fonction d'une seule variable suivante :

$$g(s) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, s, a_{k+1}, \ldots, a_n), \quad \text{où } \overrightarrow{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$$

Le domaine de définition de $g$ est :

$$D_g = \{s \in \mathbb{R} \text{ tel que } (a_1, a_2, \ldots, a_k, s, a_{k+1}, \ldots, a_n) \in E\}$$

Alors, si $g$ est dérivable en $a_k \in D_g$, on dit que la **$k$-ème dérivée partielle** de $f$ en $\overrightarrow{a} \in E$ existe est égale à $g'(a_k)$, notée :

$$g'(a_k) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = D_k f(\overrightarrow{a})$$

On remarque que nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\overrightarrow{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{g(a_k + t) - g(a_k)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e_k}) - f(\overrightarrow{a})}{t}$$

> *Remarque* Quand on prend une dérivée partielle, on considère que tout est constant, sauf la variable selon laquelle nous calculons notre dérivée.

**Exemple** Soit la fonction $f(x, y) = \sin(xy)$ où $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$. Soit aussi $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Nous voulons calculer la dérivée partielle selon $x$ en $(x_0, y_0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\sin((x_0 + t)y_0) - \sin(x_0 y_0)}{t}$$

Si $y_0 = 0$, alors nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{\sin(0) - \sin(0)}{t} = 0$$

Si $y_0 \neq 0$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(x_0y_0)\cos(ty_0) + \cos(x_0y_0)\sin(ty_0) - \sin(x_0y_0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0}\left( y_0 \sin(x_0y_0) \cdot \underbrace{\frac{\cos(ty_0) - 1}{ty_0}}_{\to 1} + y_0\cos(x_0y_0)\underbrace{\frac{\sin(ty_0)}{ty_0}}_{\to 1}\right) \\ &= y_0\cos(x_0y_0)\end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\frac{\partial}{\partial x}\sin(x,y)\bigg|_{(x_0,y_0)} = y_0\cos(x_0,y_0)$$

Nous avons calculé cette dérivée par la définition, cependant, nous pouvons aller beaucoup plus rapidement en utilisant notre remarque ci-dessus (quand on prend une dérivée partielle selon $y$, on considère $x$ comme constant) :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0\cos(x_0, y_0)$$

**Définition : Gradient** Si toutes les dérivées partielles existent en $\vec{a} \in E$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \quad \ldots, \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})$$

Alors, on définit le **gradient** de $f$ en $\vec{a}$ comme :

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\right)$$

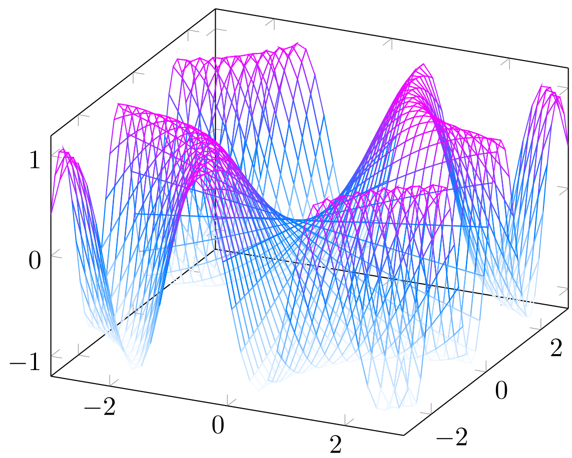
Notez que $\nabla$ s'appelle le **nabla**, et ce symbole se révélera très utile par la suite.

*Intuition* Le gradient montre la direction de la plus grande pente de la fonction. En d'autres mots, si la fonction représente une altitude en fonction d'une position, alors le gradient montre dans quelle direction nous devrons aller pour monter le plus vite. Nous prenons cette propriété telle quelle pour l'instant, mais nous la démontrons dans le cours suivant.

**Exemple 1** Reprenons notre fonction $f(x,y) = \sin(xy)$. Nous avions déjà calculé les dérivées partielles, donc :

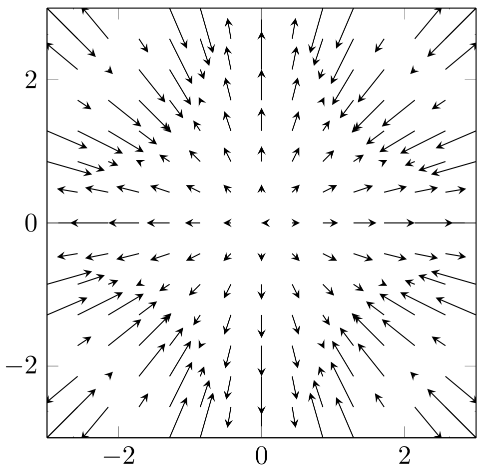
$$\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy)), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Voici le graphique de notre fonction :



Nous pouvons visualiser le **champ vectoriel** du gradient, c'est-à-dire :

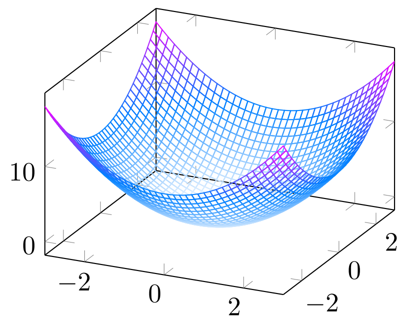
$$\begin{aligned}\nabla f : \mathbb{R}^2 &\longmapsto \mathbb{R}^2\\ (x,y) &\longmapsto \nabla f((x,y))\end{aligned}$$

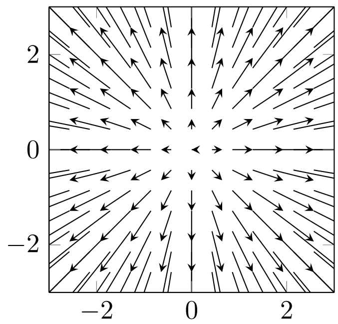



**Exemple 2** Soit la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2$, où $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\nabla f(x,y) = (2x, 2y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nous pouvons dessiner le graphique de la fonction et le champ de vecteurs de son gradient :



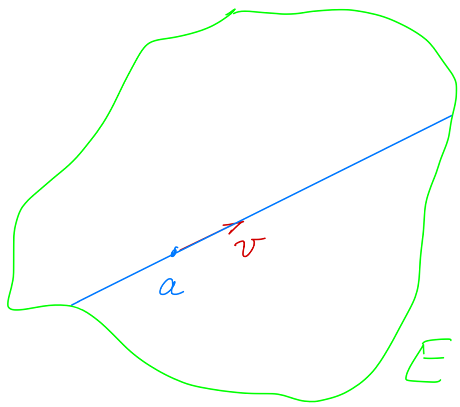




Nous pouvons aussi calculer une dérivée partielle par la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{t \to 0} \frac{(x_0 + t)^2 + y_0^2 - x_0^2 - y_0^2}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 t + t^2 - x_0^2}{t} = 2x_0$$

**Définition : Dérivée directionnelle** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble ouvert. Soient aussi $\overrightarrow{\boldsymbol{a}} \in E$, et $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \in \mathbb{R}^n$ où $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} \neq \overrightarrow{\boldsymbol{0}}$. Nous savons que la droite passant par $\overrightarrow{\boldsymbol{a}}$ en direction de $\overrightarrow{\boldsymbol{v}}$ admet la paramétrisation suivante :

$$\overrightarrow{\boldsymbol{\ell}}(t) = \overrightarrow{\boldsymbol{a}} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$




Considérons une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$, et soit la fonction d'une variable $t$ suivante :

$$g(t) \stackrel{\text{déf}}{=} f\left(\overrightarrow{\ell}(t)\right) = f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}), \quad \forall t \in \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v} \in E\}$$

Si $g$ est dérivable en $t = 0$, on dit qu'il existe la **dérivée directionnelle** de $f$ en $\overrightarrow{a}$ suivant le vecteur $\overrightarrow{v}$ (dans la direction de $\overrightarrow{v}$). La dérivée directionnelle de $f$ en $\overrightarrow{a}$ en direction de $\overrightarrow{v}$ est donnée par :

$$\lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} \stackrel{\text{déf}}{=} Df(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}) = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(\overrightarrow{a})$$

*Remarque*

1. Si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_i}$, où $\overrightarrow{e_i} = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, alors :

$$Df(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{e_i}) = \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{e_i}) - f(\overrightarrow{a})}{t} = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})$$

En d'autres mots, la dérivée partielle est un cas particulier de la dérivée directionnelle.
Ainsi, si toutes les dérivées directionnelles existent en $\overrightarrow{a}$ (pour tout $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$), alors toutes les dérivées partielles existent aussi en ce point. Cependant, la réciproque est fausse en générale.

2. Essayons de multiplier $\overrightarrow{v}$ par $\lambda \in \mathbb{R}^*$ :

$$\begin{aligned} Df(\overrightarrow{a}, \lambda\overrightarrow{v}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\lambda\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} \\ &\stackrel{s = t\cdot\lambda}{=} \lim_{s\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{\frac{s}{\lambda}} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + s\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{s}\lambda \\ &= Df(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v})\lambda \end{aligned}$$

C'est cohérent car ce qui nous importe est la direction est non pas la longueur de notre vecteur.
Donc, si la dérivée directionnelle de $f$ en $\overrightarrow{a}$ suivant $\overrightarrow{v}$ existe, alors la dérivée directionnelle de $f$ en $\overrightarrow{a}$ suivant $\lambda\overrightarrow{v}$ existe pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Il suffit donc de calculer les dérivées directionnelles suivant les vecteurs unitaires $\|\overrightarrow{v}\| = 1$.

**Exemple** Prenons la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Nous voulons calculer $Df(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v})$, où $\overrightarrow{a} = (1, 1)$ et $\overrightarrow{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ :

$$Df(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\overrightarrow{a} + t\overrightarrow{v}) - f(\overrightarrow{a})}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{\left(1 + \frac{1}{2}t\right)^2 + \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 1^2 - 1^2}{t}$$

Ce qui est égal à :

$$\lim_{t \to 0} \frac{1 + t + \frac{1}{4}t^2 + 1 + \sqrt{3}t + \frac{3}{4}t^2 - 1 - 1}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t + \sqrt{3}t + t^2}{t} = 1 + \sqrt{3}$$

Nous allons voir bientôt une méthode de calcul plus rapide.

## 5.2 Dérivabilité et différentielle

**Définition : dérivabilité**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert. De plus, soit $\overrightarrow{a} \in E$.
On dit que $f$ est **dérivable** (ou **différentiable**) au point $\overrightarrow{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ et une fonction $r : E \mapsto \mathbb{R}$ telles que :

$$f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{a}) + L_{\overrightarrow{a}}(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}) + r(\overrightarrow{x}), \quad \forall x \in E$$

et aussi $r$ doit être telle que :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{r(\overrightarrow{x})}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right\|} = 0$$

$L_{\overrightarrow{a}}$ s'appelle la **différentielle** de $f$ au point $\overrightarrow{a} \in E$, et est aussi parfois notée :

$$L_{\overrightarrow{a}} = df(\overrightarrow{a})$$

*Intuition*

Cette définition veut dire que notre fonction admet une linéarisation : elle se comporte comme un hyperplan autour d'un point.

*Transformation linéaire*

Une transformation linéaire $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est une fonction telle que :

$$T(\alpha\overrightarrow{x} + \beta\overrightarrow{y}) = \alpha T(\overrightarrow{x}) + \beta T(\overrightarrow{y}), \quad \forall \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

En particulier, cela nous donne :

$$T\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$$

Par exemple, $T(x, y) = x + y$ est une application linéaire $\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, mais $T(x, y) = x + y + 2$ n'est pas une application linéaire (même si c'est une fonction linéaire, puisque c'est un polynôme).

*Remarque*

Comparons notre définition avec la dérivabilité des fonctions d'une seule variable.
Une fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$, où $I \subset \mathbb{R}$ est un sous-ensemble ouvert, est différentiable en $a \in I$ s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $r : I \mapsto \mathbb{R}$ tels que :

$$f(x) = f(a) + \ell(x - a) + r(x), \ \forall x \in I, \text{ et } \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{|x - a|} = 0$$

Or, une constante $L(x) = \ell x$ est une application linéaire $\mathbb{R}^1 \mapsto \mathbb{R}^1$ (un scalaire est comme une matrice de dimension $1 \times 1$). De plus, dans ce cas, nous avions $\ell = f'(a)$, cela semble donc cohérent avec le fait que $L_{\overrightarrow{a}} = df(\overrightarrow{a})$ est appelée la différentielle.

En d'autres mots, notre définition de dérivabilité s'applique dans le cas $n = 1$.

Mercredi 30 mars 2022 — **Cours 12 : Gros théorème très très utile**

**Remarque** Soit $L : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une transformation linéaire, et $\left\{\vec{e_i}\right\}_{i=1}^n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Posons aussi :

$$\vec{\ell} = \left(L(\vec{e_1}), \ldots, L(\vec{e_n})\right)$$

Alors, nous avons :

$$L(\vec{v}) = L(v_1\vec{e_1} + \ldots + v_n\vec{e_n}) \overset{\text{linéaire}}{=} v_1 L(\vec{e_1}) + \ldots + v_n L(\vec{e_n})$$

Ce qui est égal à :

$$L(\vec{v}) = \left\langle \vec{v}, \left(L(\vec{e_1}), \ldots, L(\vec{e_n})\right)\right\rangle = \left\langle \vec{v}, \vec{\ell} \right\rangle$$

Ainsi, si nous connaissons les valeurs de notre transformation linéaire évaluée aux différents vecteurs de la base canonique, alors nous pouvons trouver la formule générale de celle-ci. Ce résultat va être important dans la preuve du théorème qui suit.

**Théorème 1 sur la dérivabilité** Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$, une fonction dérivable en $\vec{a} \in E$ et de différentielle $L_{\vec{a}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Alors :

1. $f$ est continue en $\vec{a} \in E$.
2. Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, où $\vec{v} \neq \vec{0}$, la dérivée directionnelle $Df(\vec{a}, \vec{v})$ existe et :
$$Df(\vec{a}, \vec{v}) = L_{\vec{a}}(\vec{v})$$
3. Toutes les dérivées partielles de $f$ en $\vec{a}$ existent, et :
$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) = L_{\vec{a}}(\vec{e_k})$$
où $\vec{e_k}$ est le $k$-ème vecteur de la base canonique.
Le gradient de $f$ existe en $\vec{a}$ et :
$$\nabla f(\vec{a}) = \left(L_{\vec{a}}(\vec{e_1}), \ldots, L_{\vec{a}}(\vec{e_n})\right)$$
4. Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, où $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors :
$$L_{\vec{a}}(\vec{v}) = Df(\vec{a}, \vec{v}) = \left\langle \nabla f(\vec{a}), \vec{v} \right\rangle$$
5. Pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$, nous avons :
$$Df(\vec{a}, \vec{v}) \leq \|\nabla f(\vec{a})\|$$
De plus :
$$Df\left(\vec{a}, \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|}\right) = \|\nabla f(\vec{a})\|$$
En d'autres mots, le gradient donne la direction et la valeur de la plus grande pente de $f$ en $\vec{a}$ (si $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, sinon la fonction est simplement plate à cet endroit, comme nous le verrons plus tard).

*Preuve du point 1* Puisque $f$ est dérivable en $\vec{a}$, nous avons que :

$$f(\vec{x}) = f(\vec{a}) + L_{\vec{a}}(\vec{x} - \vec{a}) + r(\vec{x}), \quad \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{r(\vec{x})}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$$

Puisque nous voulons montrer que notre fonction est continue, calculons la limite suivante :

$$\lim_{x \to \vec{a}} f\left(\vec{x}\right) = \lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \left( f\left(\vec{a}\right) + \underbrace{L_{\vec{a}}\left(\vec{x} - \vec{a}\right)}_{\to 0} + \underbrace{r\left(\vec{x}\right)}_{\to 0} \right) = f\left(\vec{a}\right)$$

En effet, nous savons que $L_{\vec{a}} \vec{x}$ est continue, puisque les polynômes sont continus.
Nous avons donc démontré que $f$ est continue en $\vec{x} = \vec{a}$.

*Preuve du point 2*

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$, où $\vec{v} \neq \vec{0}$. Soit aussi $g(t) = f\left(\vec{a} + t\vec{v}\right)$, définie sur $g : D \mapsto \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}$. Alors, nous savons que, si la dérivée existe :

$$Df\left(\vec{a}, \vec{v}\right) = g'(t)\Big|_{t=0}$$

Nous voulons donc uniquement montrer que cette dérivée existe :

$$Df\left(\vec{a}, \vec{v}\right) = \lim_{t \to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\vec{a} + t\vec{v}\right) - f\left(\vec{a}\right)}{t}$$

Or, nous savons que notre fonction est dérivable en $\vec{a}$, donc :

$$\begin{aligned} f\left(\vec{x}\right) &= f\left(\vec{a}\right) + L_{\vec{a}}\left(\vec{x} - \vec{a}\right) + r\left(\vec{x}\right) \\ \implies f\left(\vec{a} + t\vec{v}\right) &= f\left(\vec{a}\right) + L_{\vec{a}}\left(t\vec{v}\right) + r\left(\vec{a} + t\vec{v}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $\vec{x}(t) = \vec{a} + t\vec{v}$, qui est tel que $\vec{x} \to \vec{a}$ quand $t \to 0$, nous obtenons que notre limite est égale à :

$$\begin{aligned} Df\left(\vec{a}, \vec{v}\right) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\vec{a}\right) + L_{\vec{a}}\left(t\vec{v}\right) + r\left(\vec{a} + t\vec{v}\right) - f\left(\vec{a}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{L_{\vec{a}}\left(t\vec{v}\right) + r\left(\vec{a} + t\vec{v}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \left( \frac{t \cdot L_{\vec{a}}\left(\vec{v}\right)}{t} + \frac{r\left(\vec{a} + t\vec{v}\right)}{\left\|t\vec{v}\right\|} \cdot \frac{\left\|t\vec{v}\right\|}{t} \right) \\ &= \lim_{t \to 0} \left( L_{\vec{a}} + \underbrace{\frac{r\left(\vec{x}(t)\right)}{\left\|\vec{x}(t) - \vec{a}\right\|}}_{\to 0} \frac{|t|\left\|\vec{v}\right\|}{t} \right) \\ &= L_{\vec{a}}\left(\vec{v}\right) \end{aligned}$$

*Preuve du point 3*

Nous savons déjà que :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{a}\right) = Df\left(\vec{a}, \vec{e_k}\right)$$

Ainsi, par le point 2 :

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\vec{a}\right) = Df\left(\vec{a}, \vec{e_k}\right) = L_{\vec{a}}\left(\vec{e_k}\right)$$

De plus, cela implique directement que le gradient de $f$ existe, et que :

$$\nabla f\left(\vec{a}\right) = \left(L_{\vec{a}}\left(\vec{e}_1\right), \ldots, L_{\vec{a}}\left(\vec{e}_n\right)\right)$$

*Preuve du point 4*

Par la remarque juste avant le théorème, nous savons que :

$$L_{\vec{a}}(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{a}) \rangle$$

En effet, par le point 3 :

$$\nabla f(\vec{a}) = \left(L_{\vec{a}}(\vec{e_1}), \ldots, L_{\vec{a}}(\vec{e_n})\right)$$

Ceci nous donne donc que :

$$Df(\vec{a}, \vec{v}) = L_{\vec{a}}(\vec{v}) = \langle \vec{v}, \nabla f(\vec{a}) \rangle$$

*Preuve du point 5*

Soit $\|\vec{v}\| = 1$, et supposons que $\nabla f(\vec{a}) \neq 0$. Alors :

$$\begin{aligned} Df(\vec{a}, \vec{v}) &= \langle \nabla f(\vec{a}), \vec{v} \rangle \\ &= \|\nabla f(\vec{a})\| \underbrace{\|\vec{v}\|}_{=1} \underbrace{\cos(\nabla f(\vec{a}), \vec{v})}_{\leq 1} \\ &\leq \|\nabla f(\vec{a})\| \end{aligned}$$

De plus, soit $\vec{v} = \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|f(\vec{a})\|}$. Alors :

$$Df(\vec{a}, \vec{v}) = \left\langle \nabla f(\vec{a}), \frac{\nabla f(\vec{a})}{\|\nabla f(\vec{a})\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\vec{a})\|^2}{\|\nabla f(\vec{a})\|} = \|\nabla f(\vec{a})\|$$

Ainsi, si $\nabla f(\vec{a}) \neq \vec{0}$, la valeur maximale de la dérivée directionnelle de $f$ en $\vec{a}$ est dans la direction du gradient $\nabla f(\vec{a})$.

□

**Exemple** Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

Nous allons montrer que cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Commençons par calculer les dérivées partielles :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Nous pouvons maintenant calculer le gradient :

$$\nabla f = (2x, 2y), \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Aussi, calculons la différentielle, avec $\vec{v} = (v_1, v_2)$

$$L_{(x,y)}(\vec{v}) = Df\left((x, y), \vec{v}\right) = \left\langle \nabla f(x, y), \vec{v} \right\rangle = 2xv_1 + 2xv_2$$

Prenons maintenant par exemple $(x, y) = (1, 1)$ et $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. On remarque que le gradient en ce point est donné par $\nabla f(1, 1) = (2, 2)$. Calculons la dérivée directionnelle dans la direction de $\vec{v}$ et dans la direction du gradient :

$$Df\left((1, 1), \vec{v}\right) = \left\langle (2, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right\rangle = 1 + \sqrt{3}$$

$$Df\left((1, 1), \frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right) = \left\langle (2, 2), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\rangle = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2} = \|\nabla f(1, 1)\| > 1 + \sqrt{3}$$

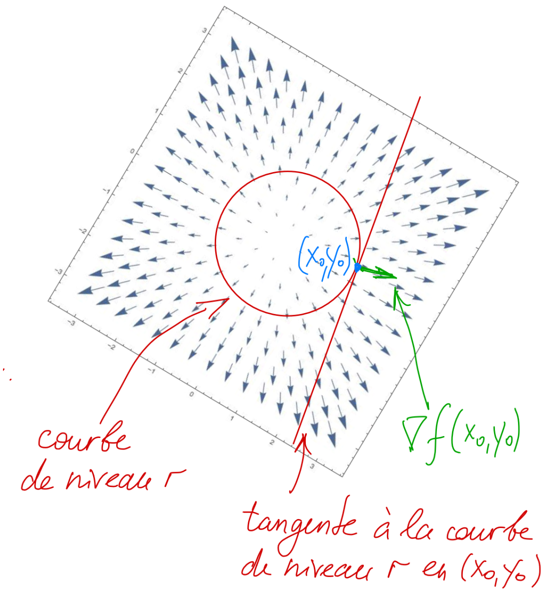
*Courbe de niveau*

Considérons maintenant la courbe de niveau de notre fonction $f(x, y)$ :

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x^2 + y^2 = k\}$$

ce qui est un cercle de rayon $\sqrt{k}$ et centre $(0, 0)$.

On remarque que $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ est normal à la courbe de niveau.




On sait que $\nabla f(x, y) \neq 0$ dans notre cas, généralisons donc nos trouvailles. La courbe de niveau montre là où la valeur de la fonction ne change pas. Ainsi, la dérivée directionnelle dans la direction de notre courbe de niveau, $\overrightarrow{v}$, doit être nulle. Or, on sait qu'elle se calcule par :

$$Df\left((x_0, y_0), \overrightarrow{v}\right) = \left\langle \nabla f(x_0, y_0), \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$$

Et, puisque $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ et $\overrightarrow{v} \neq 0$, nécessairement ils doivent être orthogonaux.

**Application : Plan tangent à une surface**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^2$, une fonction dérivable sur $E$ (c'est-à-dire qu'elle est dérivable en tout point de $E$). Soit aussi $\overrightarrow{a} = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ un point du graphique de $f$. On cherche une équation du plant tangent à $z = f(x, y)$ à ce point. Soit $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, qui est définie sur $D \mapsto \mathbb{R}$, où $D \subset \mathbb{R}^3$, et qui est dérivable puisque $f(x, y)$ est dérivable. Par définition de $F(x, y, z)$, nous avons paramétrisé la surface de notre graphique avec l'équation $F(x, y, z) = 0$ (puisqu'on sait que c'est équivalent à $z = f(x, y)$, qui est la définition de notre graphique).
Le gradient de $F$ est donné par :

$$\nabla F(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(\overrightarrow{a}), -\frac{\partial f}{\partial y}(\overrightarrow{a}), 1\right) \neq \overrightarrow{0}$$

Par un argument similaire à ce que nous venons de trouver avec la courbe de niveau, nous savons que le gradient est orthogonal au plan tangent à la courbe. En effet, la courbe de niveau de $F$ telle que $F(x, y, z) = 0$ est exactement notre graphique. Ainsi, tout vecteur de notre plan $\overrightarrow{v}$ est tel que :

$$\left\langle \nabla F(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$$

Prenons $z_0 = f(x_0, y_0)$. Puisque nous savons que le point $(x_0, y_0, z_0)$ appartient au plan, nous savons que $\overrightarrow{v}$, allant de $(x_0, y_0, z_0)$ à un vecteur quelconque, est de la forme $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Ainsi, cela nous donne :

$$\begin{aligned} &\left\langle \nabla F\left(\overrightarrow{a}\right), (x - x_0, y - y_0, z - z_0)\right\rangle = 0 \\ \iff &-\frac{\partial f}{\partial x}\left(\overrightarrow{a}\right)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}\left(\overrightarrow{a}\right)(y - y_0) + 1(z - f(x_0, y_0)) = 0 \\ \iff &z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle \end{aligned}$$

Il faut connaitre ce résultat.

> *Remarque* Nous pouvons comparer ce résultat avec la tangente à une fonction d'une seule variable en $a \in E$ :
>
> $$T_a(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

**Exemple** Prenons la fonction suivante :

$$f(x, y) = \sin(xy)$$

Nous verrons plus tard qu'elle est bien dérivable sur $\mathbb{R}^2$. Calculons son gradient :

$$\nabla f(x, y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$$

Un vecteur normal au graphique de $z = \sin(xy)$ en $(x_0, y_0, \sin(x_0 y_0))$ est :

$$(y_0 \cos(x_0 y_0), x_0 \cos(x_0 y_0), -1)$$

Ainsi, cela nous donne que la plan tangent à la surface $z = \sin(x, y)$ en ce point est :

$$z = \sin(x_0, y_0) + y_0 \cos(x_0 y_0)(x - x_0) + x_0 \cos(x_0 y_0)(y - y_0)$$

Nous aurions naturellement pu aller plus rapidement en prenant directement la formule :

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle$$

Lundi 4 avril 2022 — **Cours 13 : On monte en ordres**

**Rappel** Nous avons vu que $f$ est dérivable en $\overrightarrow{a}$ implique que les dérivées directionnelles existent. De plus, si les dérivées directionnelles existent dans toutes les direction, alors les dérivées partielles existent. Notez que les deux réciproques sont fausses en général, l'existence des dérivées directionnelles n'implique pas la dérivabilité de la fonction, et l'existence des dérivées partielles n'implique pas l'existence des dérivées directionnelles.
Cependant, nous avons le théorème qui suit.

**Théorème 2 sur la dérivabilité** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, $f : E \mapsto \mathbb{R}$ et un point $\overrightarrow{a} \in E$.
Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}\left(\overrightarrow{a}\right)$ existent sur $B\left(\overrightarrow{a}, \delta\right)$ et sont continues en $\overrightarrow{a}$. Alors, $f$ est dérivable en $\overrightarrow{a} \in E$.

## 5.3 Dérivées partielles d'ordre supérieur

**Définition : Fonction dérivée partielle**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe pour un $k$, avec $1 \leq k \leq n$, en tout point de $E$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{x})$ où $\vec{x} \in E$, est la **fonction $k$-ème dérivée partielle**.

**Définition : Dérivée partielle d'ordre supérieur**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ existe en tout $\vec{x} \in E$. Si la fonction $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ admet à son tour une dérivée partielle par rapport à $x_i$ (potentiellement une autre variable), on pose :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right) \overset{\text{déf}}{=} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$$

Nous appelons ceci la **dérivée partielle seconde**. Nous pouvons définir ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées partielles d'ordre $p$. Par exemple :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k}$$

*Remarque* Notez que la dérivée partielle qui se calcule en premier est celle de droite. Ceci est très cohérent avec la plupart des opérateurs, notamment les matrices et les application linéaires. Cependant, dans le livre de référence Douchet-Swahlen, l'ordre des dérivées partielles est échangé (et c'est probable que ce soit le seul livre qui utilise cette convention).

**Définition : Classe**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert.
Une fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est dite de **classe** $C^p$ sur $E$, si toutes les dérivées partielles d'ordre $\leq p$ existent et sont continues sur $E$.

*Remarque 1* $C^\infty$ veut dire que la fonction est de classe $p$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

*Remarque 2* Le théorème 2 sur la dérivabilité nous dit que, si $f$ est de classe $C^1$ sur $E$, alors $f$ est dérivable sur $E$.

**Théorème de Schwarz**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ et $\vec{a} \in E$ tel que les dérivées partielles secondes $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ existent dans un voisinage de $\vec{a}$ et sont continues en $\vec{a}$ (en d'autres mots, $f$ est de classe $C^2$ sur un ensemble ouvert contenant $\vec{a}$).
Alors, nous avons :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\vec{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\vec{a})$$

*Remarque* De manière générale, on peut démontrer que si $f$ est de classe $C^p$ sur $E$, alors nous pouvons échanger l'ordre des dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p$.

**Définition : Matrice Hessienne**

La **matrice Hessienne** est la matrice des dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction $E \mapsto \mathbb{R}^n$, où $E \subset \mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert, notée :

$$\text{Hess}(f)(\vec{a}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\vec{a}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\vec{a}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

*Remarque* Si $f$ est de classe $C^2$ sur $E$, alors la matrice Hessienne est symétrique, c'est-à-dire :

$$\text{Hess}(f)\left(\overrightarrow{a}\right) = \text{Hess}(f)\left(\overrightarrow{a}\right)^T$$

**Exemple** Soit la fonction définie sur $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x,y) = \sin(xy)$$

Nous allons utiliser cet exemple afin d'illustrer le théorème de Schwarz, et les matrices Hessiennes.

*Dérivées partielles premières* Nous pouvons calculer les dérivées premières :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y\cos(xy), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x\cos(xy)$$

*Dérivées partielles secondes* Calculons maintenant les dérivées partielles secondes mixtes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}(y\cos(xy)) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(x\cos(xy)) = \cos(xy) - xy\sin(xy)$$

Nous remarquons qu'ici elles sont égales. Nous pouvons aussi calculer les autres dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(y\cos(xy)) = -y^2\sin(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x\cos(xy)) = -x^2\sin(xy)$$

*Dérivées partielles d'ordre 3* Nous pouvons maintenant aussi calculer les dérivées d'ordre 3 pour cette fonction. Par exemple :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial}{x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right) = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) = -2y\sin(xy) - xy^2\cos(xy)$$

On remarque que nous avons :

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Qui sont différentes de :

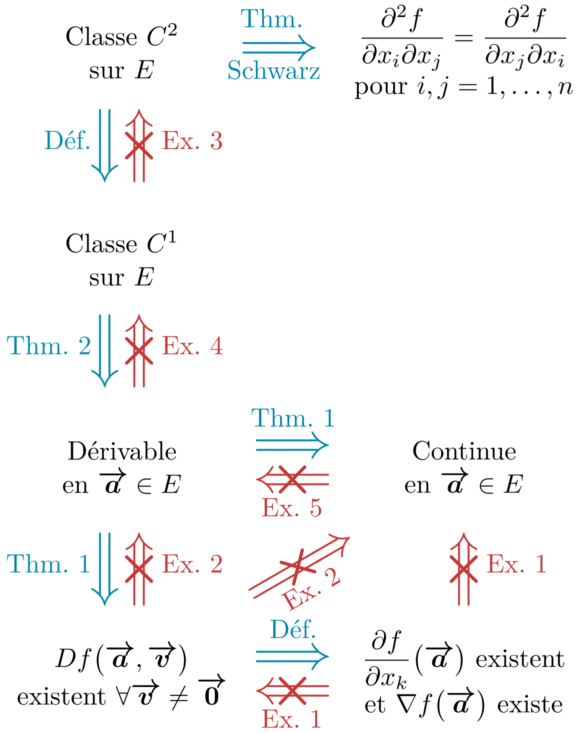
$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y} = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Nous pouvons calculer les dérivées partielles d'ordre $p$, où $p \in \mathbb{N}^*$, pour $f(x,y) = \sin(xy)$. Elle existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, ainsi l'ordre de dérivation ne fait pas de différence pour cette fonction.

*Matrice Hessienne* Finalement, nous pouvons utiliser ce que nous avons calculé pour construire notre matrice Hessienne :

$$\begin{aligned}\operatorname{Hess}(f)(x,y) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y^2 \sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2 \sin(xy) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

**Résumé** Nous avons vu beaucoup de théorie, de laquelle nous pouvons faire le schéma suivant. Nous allons voir un certain nombre de contre-exemples sur les réciproques de nos propositions, ainsi elles sont déjà écrites sur le schéma pour plus de clarté.
Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E$ est ouvert, alors :




**Exemple 1** Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nous allons montrer que toutes les dérivées partielles de cette fonction existent, mais qu'elle n'est pas continue et que les dérivées directionnelles n'existent pas en $(0,0)$.

*Continuité* On remarque que $f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$ :

$$\lim_{k \to \infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^2}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{k \to \infty} f\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \to \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k}} = 0$$

Ceci implique que la fonction n'est pas dérivable, par la contraposée de notre premier théorème.

*Dérivées partielles*

Calculons maintenant les dérivées partielles. Si $(x,y) \neq (0,0)$, alors nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\big(x^2+y^2\big) - 2xxy}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Or, on remarque qu'elle ne peut pas être continue en $\overrightarrow{\mathbf{0}}$, puisque la limite suivante n'existe pas :

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\partial f}{\partial x}\left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^4}} = \lim_{k\to\infty} k$$

Si nous voulons trouver la dérivée partielle selon $y$, alors nous pouvons utiliser la symétrie de notre fonction et échanger les $x$ et les $y$ dans $\frac{\partial f}{\partial x}$ :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3 - y^2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

De manière similaire, on trouve que cette dérivée partielle ne peut pas être continue en $\overrightarrow{\mathbf{0}}$.

*Dérivées directionnelles*

Calculons les dérivées directionnelles en $(0,0)$. Ainsi, soit $\overrightarrow{\boldsymbol{v}} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$, cela nous donne :

$$\begin{aligned} Df\left(\overrightarrow{\mathbf{0}}, \overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) &= \lim_{t\to 0} \frac{f\left(\overrightarrow{\mathbf{0}} + t\overrightarrow{\boldsymbol{v}}\right) - f\left(\overrightarrow{\mathbf{0}}\right)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2(v_1^2+v_2^2)} - 0\right) \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{v_1 v_2}{t(v_1^2+v_2^2)} \end{aligned}$$

Cette limite n'existe pas, sauf si $v_1 = 0$ ou $v_2 = 0$, auquel cas elle est égale à 0. Ainsi, seules nos dérivées partielles existent, et elles sont égales à 0.

**Exemple 2**

Soit la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^4+y^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Nous allons montrer que toutes les dérivées directionnelles de cette fonction existent en $(0,0)$, mais qu'elle n'est ni continue ni dérivable en ce point.

*Continuité*

Nous remarquons qu'elle n'est pas continue en $(0,0)$ :

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^5}}{\frac{1}{k^4}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)} = 0$$

$$\lim_{k\to\infty} f\left(\frac{1}{k^3}, \frac{1}{k^2}\right) = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k^6}\cdot\frac{1}{k^6}}{\frac{1}{k^{12}}+\frac{1}{k^{12}}} = \frac{1}{2}$$

Nous en déduisons que cette fonction n'est pas dérivable en $(0,0)$.

*Dérivées directionnelles*

Calculons maintenant les dérivées directionnelles en $(0,0)$. Ainsi, soit $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq 0$. Nous avons :

$$\begin{aligned} Df\left(\vec{0}, \vec{v}\right) &= \lim_{t \to 0} \frac{f\left(\vec{0} + t\vec{v}\right) - f\left(\vec{0}\right)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{t^5 v_1^2 v_2^3}{t(t^4 v_1^4 + t^6 v_2^6)} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4 + t^2 v_2^6} \end{aligned}$$

Ce qui nous donne que :

$$Df\left(\vec{0}, \vec{v}\right) = \begin{cases} \dfrac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4} = \dfrac{v_2^3}{v_1^2}, & \text{si } v_1 \neq 0 \\ \lim\limits_{t \to 0} \dfrac{0}{0 + t^2 v_2^2} = 0, & \text{si } v_1 = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons que les dérivées directionnelles existent en $(0,0)$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq (0,0)$.

*Dérivées partielles*

En particulier, nous avons :

$$\frac{\partial f}{\partial x}\left(\vec{0}\right) = Df\left(\vec{0}, (1,0)\right) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(\vec{0}\right) = Df\left(\vec{0}, (0,1)\right) = 0$$

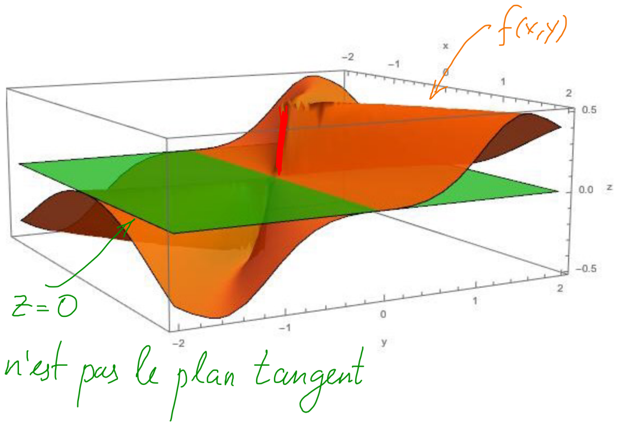
Ainsi, $\nabla f\left(\vec{0}\right) = \vec{0}$. Nous pouvons montrer que les dérivées partielles ne sont pas continues (cette propriété est nécessaire par notre deuxième théorème).

*Plan tangent*

Nous savons que $f$ n'est pas dérivable en $(0,0)$, mais nous avons que $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Ainsi, nous pouvons essayer d'écrire tout de même l'équation d'un plan :

$$z = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = 0$$

Cependant, comme nous pouvons le voir sur l'image suivante, ce plan ne fait aucun sens, ce n'est pas un plan tangent au graphique de la fonction. Cela montre que, si la fonction n'est pas dérivable, alors il n'existe pas de plan tangent.




Ceci nous amène à la remarque suivante.

**Remarque** Nous avions trouvé que si $f(x, y)$ est dérivable en $(x_0, y_0)$, alors le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ est défini par l'équation :

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0)\rangle$$

Si $f$ n'est pas dérivable en ce point, alors ce plan n'est pas un plan tangent, même si le gradient $\nabla f(x_0, y_0)$ existe. Le plan tangent n'est simplement pas défini dans ce cas.

Mercredi 6 avril 2022 — **Cours 14 : Toujours plus d'exemples**

**Démonstration de la dérivabilité** Voici deux méthodes pour démontrer qu'une fonction est dérivable.

*Méthode 1* Nous savons que si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continues au point donné, alors nous savons que cela implique que $f$ est dérivable.

Il est important de voir que le fait qu'une ou plusieurs dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne soient pas continues en $\vec{a}$ n'implique pas nécessairement que $f$ n'est pas dérivable en $\vec{a}$, comme nous le verrons dans l'exemple 5, et comme nous pouvons voir sur le schéma de résumé.

*Méthode 2* Si le gradient $\nabla f\left(\vec{a}\right)$ n'existe pas, alors nous savons que $f$ n'est pas dérivable en $\vec{a}$. S'il existe, nous pouvons poser :

$$r\left(\vec{x}\right) = f\left(\vec{x}\right) - f\left(\vec{a}\right) - \left\langle \nabla f\left(\vec{a}\right), \vec{x} - \vec{a}\right\rangle$$

Alors, si $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{r\left(\vec{x}\right)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} = 0$, nous savons que $f$ est dérivable en $\vec{a}$ par définition.

De manière similaire, si $\lim_{\vec{x} \to \vec{a}} \frac{r\left(\vec{x}\right)}{\|\vec{x} - \vec{a}\|} \neq 0$, alors $f$ n'est pas dérivable par notre premier théorème. En effet, si une fonction est dérivable, alors $L_{\vec{a}} \cdot \vec{v} = \left\langle \nabla f\left(\vec{a}\right), \vec{v}\right\rangle$, et donc $r\left(\vec{x}\right)$ et telle que donnée ci-dessus. Ainsi, si notre limite ne donne pas 0, c'est une contradiction avec le fait que la fonction soit dérivable.

**Exemple 3** Soit la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nous allons montrer que cette fonction est de classe $C^1$, mais pas de classe $C^2$. De plus, les dérivées partielles secondes existent, mais nous ne pouvons pas changer l'ordre de dérivation.

*Dérivées partielles premières* Nous pouvons calculer ses dérivées partielles en $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(t, 0) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{t \cdot 0}{t(t^2 + 0)} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(0, t) - f(0, 0)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{0 \cdot t^3}{t(0 + t^2)} = 0$$

Calculons aussi les dérivées partielles pour $(x, y) \neq (0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^3\left(x^2 + y^2\right) - 2x\left(xy^3\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{\left(x^2 + y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{3y^2x\left(x^2y^2\right) - 2y\left(xy^3\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{y^4x + 3x^3y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

Nous pouvons aussi calculer leur limite :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5 \overbrace{\left(\sin^5(\varphi) - \cos^2(\varphi)\sin^3(\varphi)\right)}^{\text{borné}}}{r^4} = 0$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{r\to 0} \frac{r^5 \overbrace{\left(\sin^4(\varphi)\cos(\varphi) + 3\cos^3(\varphi)\sin^2(\varphi)\right)}^{\text{borné}}}{r^4} = 0$$

Ainsi, puisque les dérivées partielles existent et sont continues sur $\mathbb{R}^2$, nous savons que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ par notre deuxième théorème.

*Dérivées partielles secondes*

Calculons maintenant les dérivées partielles secondes :

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^5 - 0\cdot t^3}{t\left(t^2+0\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^5}{t^5} = 1$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t\cdot 0 - 0\cdot t^3}{t\left(0+t^2\right)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^5} = 0$$

Nous avons donc trouvé une fonction telle que :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$$

Par la contraposée du théorème de Schwarz, nous savons que $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, pour $(x,y)\neq(0,0)$ :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{6x^2y^4 + y^6 - 3x^4y^2}{\left(x^2+y^2\right)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

Or, la limite n'existe pas en $(0,0)$, donc elles ne peuvent pas être continues à ce point.

*Dérivabilité*

Nous savons déjà que cette fonction est dérivable, puisqu'elle est de classe $C^1$, mais utilisons la deuxième méthode pour l'illustrer. Nous avions trouvé $\nabla f(0,0) = (0,0)$. Ainsi, posons :

$$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{\left\langle \nabla f(0,0), (x,y)\right\rangle}_{=0} = f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

Nous pouvons maintenant calculer la limite :

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^3}{\left(x^2+y^2\right)\sqrt{x^2+y^2}} \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r^4\cos(\varphi)\sin^3(\varphi)}{r^3} \\ &= \lim_{r\to 0} r\underbrace{\cos(\varphi)\sin^3(\varphi)}_{\text{borné}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ainsi, cette fonction est bien dérivable.

**Exemple 4** Prenons la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Nous allons montrer que est dérivable en $(0, y_0)$, mais qu'elle n'est pas de classe $C^1$ en $(0, y_0)$, pour $y_0 \in \mathbb{R}$.

*Dérivée partielles*

Clairement, $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculons la dérivée partielle selon $x$. Si $x \neq 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Et, si $x = 0$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 \sin\left(\frac{1}{t}\right) - 0}{t} = \lim_{t \to 0} t \underbrace{\sin\left(\frac{1}{t}\right)}_{\text{borné}} = 0$$

Regardons maintenant si cette dérivée partielle est continue en $(0, y_0)$ :

$$\lim_{(x,y) \to (0, y_0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{x \to 0} \left( \underbrace{2x \sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \underbrace{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{n'existe pas}} \right)$$

qui n'existe pas. Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue si $x = 0$.

*Dérivabilité*

Si nous voulons savoir si cette fonction est dérivable, nous devons faire la deuxième méthode (la première méthode ne peut pas fonctionner puisque les dérivées partielles ne sont pas continues, et donc la fonction n'est pas de classe $C^1$). Posons :

$$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0, y_0)}_{=0} - \underbrace{\langle \nabla f(0, y_0), (x, y - y_0) \rangle}_{=0} = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Nous avons maintenant :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{|r(x,y)|}{\|(x,y) - (0, y_0)\|} &= \lim_{(x,y) \to (0,y_0)} \frac{x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{\sqrt{x^2 + \underbrace{(y - y_0)^2}_{\geq 0}}} \\ &\leq \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{|x|} \\ &= \lim_{x \to 0} |x| \underbrace{\left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right|}_{\text{borné}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

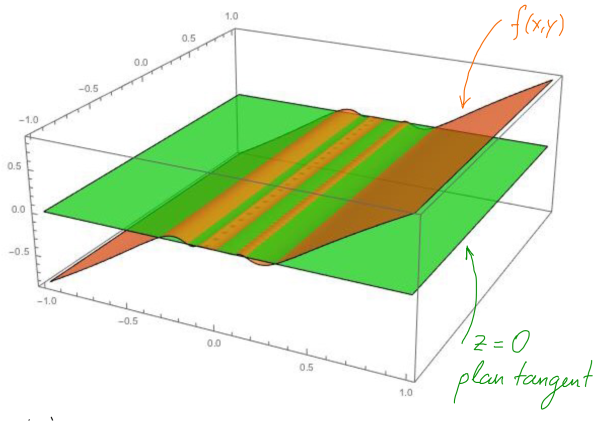
Ceci implique que notre fonction est dérivable en $(0, y_0)$.

*Plan tangent*

$f$ est dérivable en $(0, y_0)$, et nous savons que $\nabla f(0, y_0) = \overrightarrow{0}$. Ainsi, nous savons que le plan tangent en $(0, y_0, f(0, y_0))$ est :

$$z = 0 + \langle \nabla f(0, y_0), (x, y - y_0) \rangle = 0$$

Ceci est cohérent, comme nous pouvons le voir sur l'image suivante :




**Exemple 5** Prenons la fonction suivante :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Nous allons montrer que cette fonction est continue, mais pas dérivable en $\overrightarrow{0}$.

*Continuité* Nous pouvons voir que $f$ est continue sur $\mathbb{R}$ :

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} |f(x, y)| = \lim_{r \to 0} \frac{r^5 \overbrace{\left|\cos^4(\varphi)\sin(\varphi)\right|}^{\text{borné}}}{r^4} = 0$$

*Dérivées partielles* Regardons les dérivées partielles en $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^4 - 0}{t(t^2 + 0)^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{t \to 0} \frac{0 \cdot t}{t(0 + t^2)^2} = 0$$

Ceci nous donne que le gradient est donné par $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$.

*Dérivabilité* Nous voulons montrer que la fonction n'est pas dérivable en $(0, 0)$. Pour ce faire, nous allons utiliser la deuxième méthode, puisque le gradient et la fonction sont nuls à ce point. Ainsi, posons :

$$r(x, y) = f(x, y) - f(0, 0) - \langle \nabla f(0, 0), (x, y) \rangle = f(x, y) = \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

Calculons maintenant la limite suivante :

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{r(x, y)}{\|(x, y)\|} &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \\ &= \lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}$$

Le fait que le degré du dénominateur est égal au degré du numérateur nous donne envie de montrer que cette limite n'existe pas :

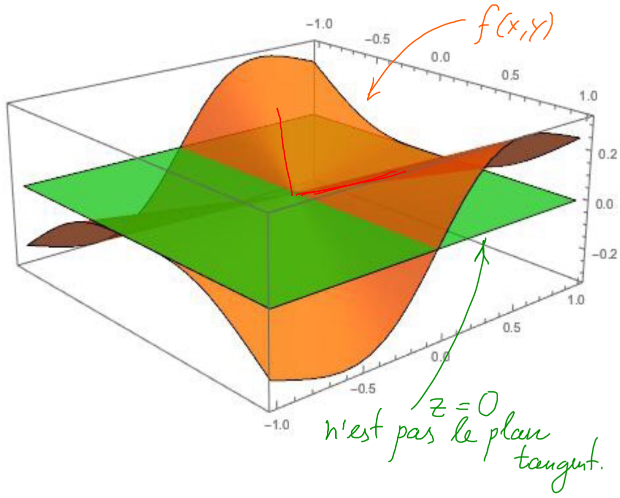
$$a_k = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \implies \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{k^4} \cdot \frac{1}{k}}{\left(\frac{2}{k^2}\right)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2^{\frac{5}{2}}}$$

$$b_k = \left(0, \frac{1}{k}\right) \implies \lim_{k \to \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^5}} = 0$$

Ainsi, nous avons vu que la limite n'existe pas, et donc que $f(x, y)$ n'est pas dérivable en $(0, 0)$.

*Plan tangent*

En particulier, le plan $z = 0$ n'est pas le plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ en $(0, 0)$ :




**Résumé**

Nous pouvons à nouveau voir notre résumé. Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$, où $E$ est ouvert, alors :

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\text{Classe } C^2 \text{ sur } E \arrow[r, Rightarrow, "\text{Thm.}", "\text{Schwarz}"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right, "\text{Déf.}"'] & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \text{ pour } i, j = 1, \ldots, n \\
\text{Classe } C^1 \text{ sur } E \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\times" marking, "\text{Ex. 3}"'] \arrow[d, Rightarrow, shift right, "\text{Thm. 2}"'] & \\
\text{Dérivable en } \vec{a} \in E \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\times" marking, "\text{Ex. 4}"'] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Thm. 1}"] \arrow[d, Rightarrow, shift right, "\text{Thm. 1}"'] & \text{Continue en } \vec{a} \in E \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\times" marking, "\text{Ex. 5}"] \\
Df(\vec{a}, \vec{v}) \text{ existent } \forall \vec{v} \neq \vec{0} \arrow[u, Rightarrow, shift right, "\times" marking, "\text{Ex. 2}"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\times" marking, "\text{Ex. 2}"'] \arrow[r, Rightarrow, shift left, "\text{Déf.}"] & \dfrac{\partial f}{\partial x_k}(\vec{a}) \text{ existent et } \nabla f(\vec{a}) \text{ existe} \arrow[u, Rightarrow, "\times" marking, "\text{Ex. 1}"'] \arrow[l, Rightarrow, shift left, "\times" marking, "\text{Ex. 1}"]
\end{tikzcd}$$

Ce schéma est très important, et nous devons le connaître.

*Remarque* Nous pouvons le comparer avec ce que nous avions en Analyse 1 :

$$\begin{aligned} &\text{Classe } C^2 \text{ sur } E \\ \implies &\text{Classe } C^1 \text{ sur } E \\ \implies &\text{Dérivable en } a \in E \\ \iff &f'(a) \text{ existe} \\ \implies &\text{Continue en } a \in E \end{aligned}$$

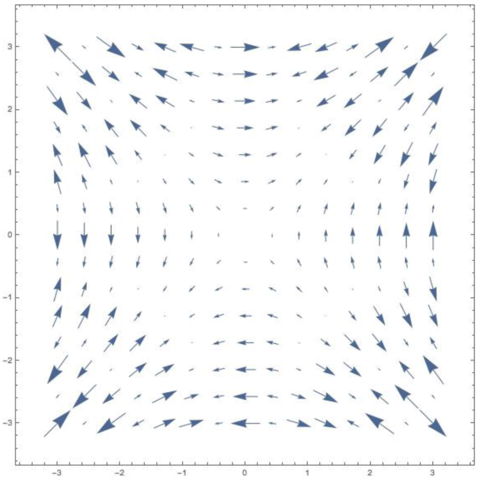
Lundi 11 avril 2022 — **Cours 15 : Masterclass Jacob**

## 5.4 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

**Exemple** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert, et soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que le gradient $\nabla f(\vec{x})$ existe $\forall \vec{x} \in E$.
Alors, $(\nabla f)^T : E \mapsto \mathbb{R}^n$ est une application à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.
Par exemple, si on prend $f(x, y) = \sin(x, y)$, nous avons $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$, et cela nous donne :

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$$

Ceci est une matrice ligne, et nous voulons un vecteur colonne à la fin, c'est pourquoi nous devons le transposer. Nous pouvons dessiner notre champ de vecteurs :




**Introduction** Plus généralement, nous pouvons considérer les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $\vec{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ où $E \subset \mathbb{R}^n$ :

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

Chaque composante $f_i$ est une fonction réelle de $n$ variables réelles.

**Définition : $k$-ème dérivée partielle** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.
La **$k$-ème dérivée partielle** de $\vec{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ en $\vec{a} \in E$, est définie par :

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_k}(\vec{a}) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k}(\vec{a}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k}(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

si chacune des fonctions $f_1, \ldots, f_m$ admet la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en $\overrightarrow{a}$.

**Définition : Dérivée directionnelle**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, et soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ tel que $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.
La **dérivée directionnelle** de $\overrightarrow{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ suivant $\overrightarrow{v}$ en $\overrightarrow{a} \in E$, est :

$$D\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}\right) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} Df_1\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}\right) \\ \vdots \\ Df_m\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}\right) \end{pmatrix}$$

si $Df_i\left(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{v}\right)$ existent pour tout $i = 1, \ldots, m$.

**Définition : Limite**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.
Une fonction $\overrightarrow{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ admet $\overrightarrow{\ell} \in \mathbb{R}^m$ pour **limite** lorsque $\overrightarrow{x}$ tend vers $\overrightarrow{a}$ si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tel que pour tout $\overrightarrow{x} \in E$, on a :

$$0 < \left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right\| \leq \delta \implies \left\|f\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\ell}\right\| \leq \varepsilon$$

*Remarque* En particulier, nous avons :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right) = \begin{pmatrix} \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f_1\left(\overrightarrow{x}\right) \\ \vdots \\ \lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} f_m\left(\overrightarrow{x}\right) \end{pmatrix}$$

En effet, nous voulons que la valeur suivante soit arbitrairement petite :

$$\left\|\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right) - \overrightarrow{\ell}\right\|^2 = \left(f_1\left(\overrightarrow{x}\right) - \ell_1\right)^2 + \ldots + \left(f_m\left(\overrightarrow{x}\right) - \ell_m\right)^2$$

Or, puisque c'est une somme de carré, rendre la norme arbitrairement petite est équivalent à rendre les composantes arbitrairement proche à $\ell_i$.
En d'autres mots, l'existence de cette limite est équivalente à l'existence de la limite de toutes les composantes.

**Définition : Dérivabilité**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.
$\overrightarrow{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ est **dérivable** au point $\overrightarrow{a} \in E$ s'il existe une transformation linéaire $\overrightarrow{L}_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ et une fonction $\overrightarrow{r} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ telles que :

$$\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{x}\right) = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{a}\right) + \overrightarrow{L}_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right) + \overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{x}\right)$$

De plus, il faut aussi que :

$$\lim_{\overrightarrow{x} \to \overrightarrow{a}} \frac{\overrightarrow{r}\left(\overrightarrow{x}\right)}{\left\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{a}\right\|} = 0$$

Si $\overrightarrow{f}$ est dérivable, alors $\overrightarrow{L}_{\overrightarrow{a}} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ est appelée la **différentielle** de $\overrightarrow{f}$ en $\overrightarrow{a}$.

**Proposition : Dérivabilité pour chaque composante**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.
$\overrightarrow{f} = (f_1, \ldots, f_m) : E \mapsto \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\overrightarrow{a} \in E$ *si et seulement si* chaque composante $f_i : E \mapsto \mathbb{R}$ est dérivable en $\overrightarrow{a} \in E$ pour $i = 1, \ldots, m$. De plus, nous pouvons construire :

$$\overrightarrow{L}_{\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{v}\right) = \begin{pmatrix} L_{1,\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{v}\right) \\ \vdots \\ L_{m,\overrightarrow{a}}\left(\overrightarrow{v}\right) \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n, \overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$$

où $L_{i,\vec{a}}(\vec{v})$ est la différentielle de $f_i$ calculée en $\vec{a}$ et appliquée en $\vec{v}$. En d'autres mots :

$$L_{i,\vec{a}}(\vec{v}) = Df_i(\vec{a}, \vec{v}) = \left\langle \nabla f_i(\vec{a}), \vec{v} \right\rangle$$

*Preuve* La définition d'une fonction dérivable nous donne $m$ équations, une pour chaque composante. De plus, la contrainte avec la limite peut aussi être séparée en $m$ sous-contraintes, en utilisant notre remarque pour le calcul des limites.

**Définition : Matrice Jacobienne** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $\vec{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ possède toutes ses dérivées partielles en $\vec{a} \in E$, alors sa **matrice Jacobienne** (matrice de Jacobi) est définie par :

$$J_{\vec{f}}(\vec{a}) \overset{\text{déf}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{a}) \\ \nabla f_2(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{a}) \end{pmatrix}$$

*Observations* Cette matrice n'est pas forcément carrée.

De plus, nous pouvons voir que chaque colonne de la matrice Jacobienne est la dérivée partielle $\frac{\partial \vec{f}}{\partial x_i}(\vec{a})$. Aussi, chaque ligne est le gradient $\nabla f_i(\vec{a})$. La Professeure utilise cet argument pour justifier que le gradient devrait être une matrice ligne (mais selon moi cela devrait quand même être un vecteur colonne, car le Nabla doit être un vecteur colonne si nous voulons la mnémotechnie $\operatorname{grad}\left(\vec{f}\right) = \nabla f$, $\operatorname{div}\left(\vec{f}\right) = \nabla \cdot \vec{f}$ et $\operatorname{rot}\left(\vec{f}\right) = \nabla \times \vec{f}$).

Ainsi, nous avons que :

- Si $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, alors $J_g(\vec{x}) = \nabla g(\vec{x})$.
- Si $\vec{g} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, alors $J_{\vec{g}}(x) = \frac{\partial \vec{g}}{\partial x}$.
- Si $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, alors $J_g(x) = g'(x)$.

*Remarque 1* Si $\vec{f}$ est dérivable en $\vec{a} \in E$, alors nous avons :

$$J_{\vec{f}}(\vec{a}) = \begin{pmatrix} L_{1,\vec{a}}(\vec{e_1}) & \cdots & L_{1,\vec{a}}(\vec{e_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ L_{m,\vec{a}}(\vec{e_1}) & \cdots & L_{m,\vec{a}}(\vec{e_n}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $\vec{f}$ est dérivable en $\vec{a}$, la matrice Jacobienne nous donne la matrice de la différentielle de $\vec{f}$.

*Remarque 2*

Si $\vec{f}$ est dérivable, alors :

$$
\begin{aligned}
D\vec{f}(\vec{a},\vec{v}) &= \begin{pmatrix} Df_1(\vec{a},\vec{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\vec{a},\vec{v}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\vec{a}), \vec{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\vec{a}), \vec{v} \rangle \end{pmatrix} \\
&= \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla f_1(\vec{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\vec{a}) \end{pmatrix}}_{m\times n} \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_{n\times 1} \\
&= \left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right) \cdot \vec{v}
\end{aligned}
$$

Cela rejoint notre première remarque.

**Définition : Jacobien**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$. Si $\vec{f} : E \mapsto \mathbb{R}^m$ possède toutes ses dérivées partielles en $\vec{a} \in E$, et si $m = n$, alors on définit le **déterminant de Jacobi**, aussi appelé **le Jacobien**, de $\vec{f}$ en $\vec{a}$ comme :

$$
\left|J_{\vec{f}}(\vec{a})\right| = \det\left(J_{\vec{f}}(\vec{a})\right) \overset{\text{déf}}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{a}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{a}) \end{pmatrix}
$$

**Exemple**

Soient $\vec{f}(x,y) = \sin(xy)$ et $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ définie par :

$$
\vec{g}(x,y) = (\nabla f(x,y))^T = \begin{pmatrix} y\cos(xy) \\ x\cos(xy) \end{pmatrix}
$$

Calculons sa matrice Jacobienne :

$$
J_{\vec{g}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^2\sin(xy) & \cos(xy) - xy\sin(xy) \\ \cos(xy) - xy\sin(xy) & -x^2\sin(xy) \end{pmatrix} \overset{\text{obs}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}
$$

On remarque que $J_{\vec{g}}(x,y) = \operatorname{Hess}(f)(\vec{x})$. Calculons maintenant le Jacobien :

$$
\left|J_{\vec{g}}(x,y)\right| = x^2y^2\sin^2(xy) - (\cos(xy) - xy\sin(xy))^2 = -\cos^2(xy) + 2xy\cos(xy)\sin(xy)
$$

**Remarque**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$.
D'après la définition, nous avons, pour toute fonction $f : E \mapsto \mathbb{R}$ (attention, $\mathbb{R}$ et non pas $\mathbb{R}^n$) de classe $C^2$ sur $E$ :

$$
J_{(\nabla f)^T}(\vec{x}) = \operatorname{Hess}(f)(\vec{x})
$$

## 5.5 Application des matrices Jacobiennes

**Théorème** Soient $A, B$ deux ensembles tels que $A \subset \mathbb{R}^n$ et $\vec{g}(A) \subset B \subset \mathbb{R}^p$. Soient $\vec{g} : A \mapsto \mathbb{R}^p$ et $\vec{f} : B \mapsto \mathbb{R}^q$. En d'autres mots, nous avons :

$$\mathbb{R}^n \overset{\vec{g}}{\mapsto} \mathbb{R}^p \overset{\vec{f}}{\mapsto} \mathbb{R}^q$$

Soient $\vec{a} \in A$ et $\vec{b} = \vec{g}(\vec{a}) \in B$. Supposons que $\vec{g}$ est dérivable en $\vec{a}$ avec la différentielle $L_{\vec{g}, \vec{a}}$ et $\vec{f}$ est dérivable en $\vec{b}$ avec la différentielle $L_{\vec{f}, \vec{b}}$.

Alors $\vec{f} \circ \vec{g}$ est dérivable en $\vec{a}$, et on a :

1. $\vec{L}_{\vec{f} \circ \vec{g}, \vec{a}} = \vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}} \circ \vec{L}_{\vec{g}, \vec{a}}$
2. $J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{a}) = J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{a})) \cdot J_{\vec{g}}(\vec{a})$
3. Si $n = p = q$, alors $\left|J_{\vec{f} \circ \vec{g}}(\vec{a})\right| = \left|J_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{a}))\right| \cdot \left|J_{\vec{g}}(\vec{a})\right|$

*Idée de la preuve* Nous savons que $\vec{g}$ est dérivable en $\vec{a}$, ainsi :

$$\vec{f}(\vec{g}(\vec{x})) = \vec{f}\left(\vec{g}(\vec{a}) + \vec{L}_{\vec{g}, \vec{a}}(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{r}_{\vec{g}}(\vec{x})\right)$$

Maintenant, nous savons que $\vec{f}$ est dérivable en $\vec{g}(\vec{a})$, ainsi, c'est égal à :

$$\vec{f}(\vec{g}(\vec{a})) + \vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}}\left(\vec{L}_{\vec{g}, \vec{a}}(\vec{x} - \vec{a}) + \vec{r}_{\vec{g}}(\vec{x})\right) + \vec{r}_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))$$

Ainsi, en utilisant la linéarité de $\vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}}$, on obtient que c'est égal à :

$$\vec{f}(\vec{g}(\vec{a})) + \vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}}\left(\vec{L}_{\vec{g}, \vec{a}}(\vec{x} - \vec{a})\right) + \vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}}(\vec{r}_{\vec{g}}(\vec{x})) + \vec{r}_{\vec{f}}(\vec{g}(\vec{x}))$$

Or, les deux termes de la deuxième ligne sont très petits lorsque $\vec{x} \to \vec{a}$, ainsi on obtient que $\vec{f} \circ \vec{g}$ est dérivable en $\vec{a}$ avec la différentielle :

$$\vec{L}_{\vec{f} \circ \vec{g}, \vec{a}} = \vec{L}_{\vec{f}, \vec{b}} \circ L_{\vec{g}, \vec{a}}$$

**Exemple 1** Pour commencer, vérifions notre résultat en prenant $n = p = q = 1$. Ainsi, par exemple, soient :

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(y) = y^2$$
$$g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin(x)$$

Nous pouvons maintenant calculer la composée :

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin(x)) = \sin^2(x)$$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b = g(a) = \sin(a) \in \mathbb{R}$, alors nous pouvons calculer les matrices Jacobiennes, qui sont des matrices $1 \times 1$ et donc des scalaires :

$$J_g(a) = (\sin(x))'\Big|_{x=a} = \cos(a)$$

$$J_f(b) = \left(y^2\right)'\Big|_{y=b=\sin(a)} = 2b = 2\sin(a)$$

Notre théorème nous dit que :

$$J_{f \circ g}(a) = J_f(g(a)) \cdot J_g(a) = 2\sin(a) \cdot \cos(a)$$

Nous pouvons vérifier ce résultat :

$$J_{f\circ g}(a) = \left(\sin^2(x)\right)'\Big|_{x=a} = 2\sin(a)\cos(a)$$

Il est très intéressant de remarquer que nous avons retrouvé la formule de dérivée d'une fonction composée :

$$(f\circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

**Exemple 2** Prenons les fonctions suivantes :

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}, \quad f(z) = z^2$$

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \quad g(x,y) = \sin(xy)$$

Calculons nos matrices Jacobiennes :

$$J_g(x,y) = \nabla g(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$$

$$J_f(z) = \left(z^2\right)' = 2z \implies J_f(g(x,y)) = 2z\Big|_{z=\sin(xy)} = 2\sin(xy)$$

Calculons déjà notre résultat, afin de savoir ce que nous devons obtenir :

$$\begin{aligned} &f\circ g(x,y) = \sin^2(x,y) \\ \implies &J_{f\circ g}(x,y) = \nabla(f\circ g)(x,y) = (2\sin(xy)\cos(xy)y, 2\sin(xy)\cos(xy)x) \end{aligned}$$

Notre théorème nous dit que :

$$J_f(\sin(x,y))\cdot J_g(x,y) = 2\sin(xy)(y\cos(xy), x\cos(xy))$$

Ce qui est bien ce à quoi nous nous attendions.

Mercredi 13 avril 2022 — **Cours 16 : Retour aux intégrales**

**Exemple 3** Prenons les fonctions suivantes :

$$\vec{g}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \quad f(u,v) = uv^2$$

*Composée 1* Nous pouvons calculer leur composée dans un sens :

$$f\circ\vec{g}(x) = f(g_1(x), g_2(x)) = f\left(x^3, \frac{1}{x}\right) = x^3\frac{1}{x^2} = x$$

Ainsi, nous savons que notre but est de trouver $J_{f\circ\vec{g}}(x) = \left(f\circ\vec{g}\right)'(x) = 1$. Calculons les matrices Jacobiennes de nos deux fonctions :

$$J_{\vec{g}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} J_f\left(\vec{g}(x)\right) &= \nabla f(u,v)\Big|_{(g_1(x),g_2(x))} = \left(v^2, 2uv\right)\Big|_{(g_1(x),g_2(x))} \\ &= \left(\frac{1}{x^2}, 2x^3\cdot\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{1}{x^2}, 2x^2\right) \end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons bien que :

$$J_{f\circ\vec{g}}(x) = J_f\left(\vec{g}(x)\right)J_{\vec{g}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 2x^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3x^2 \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1$$

*Composée 2* Nous pouvons aussi considérer la fonction composée dans l'autre sens : $\vec{g} \circ f : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+^2$ :

$$\vec{g} \circ f(x, y) = \vec{g}\left(xy^2\right) = \begin{pmatrix} x^3y^6 \\ \frac{1}{xy^2} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons calculer la matrice Jacobienne, puisque la fonction est dérivable sur $\mathbb{R}_+^2$ :

$$J_{\vec{g} \circ f} = \begin{pmatrix} 3x^2y^6 & 6x^3y^5 \\ -\frac{1}{x^2y^2} & -\frac{2}{xy^3} \end{pmatrix}$$

De plus, calculons les matrices Jacobiennes de nos deux fonctions :

$$J_f(x, y) = \nabla f(x, y) = \left(y^2, 2xy\right)$$

$$J_{\vec{g}}(u) = \begin{pmatrix} 3u^2 \\ -\frac{1}{u^2} \end{pmatrix} \implies J_{\vec{g}}(f(x, y)) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4 \\ -\frac{1}{x^2y^4} \end{pmatrix}$$

Finalement, notre théorème nous donne :

$$J_{\vec{g} \circ f} = J_{\vec{g}}(f(x, y))J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2y^4 \\ -\frac{1}{x^2y^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2y^6 & 6x^3y^5 \\ -\frac{1}{x^2y^2} & -\frac{2}{xy^3} \end{pmatrix}$$

comme attendu.

De plus, on peut remarquer que, puisque notre transformation $J_{\vec{g} \circ f}$ représente une composition de $J_f : \mathbb{R}_+^2 \mapsto \mathbb{R}_+$ et $J_{\vec{g}} : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+^2$, elle passe par un ensemble qui restreint son espace image sur une dimension, nous savons que $\operatorname{rang}\left(J_{\vec{g} \circ f}\right) \leq 1$. Nous pouvons vérifier que le déterminant est nul :

$$\det J_{\vec{g} \circ f} = -6xy^3 + 6xy^3 = 0$$

**Application : Changement de variable** Supposons que nous avons le schéma de fonction suivant :

$$\mathbb{R}^n \overset{\vec{h}}{\mapsto} \mathbb{R}^n \overset{\vec{g}}{\mapsto} \mathbb{R}^n$$

tels que $\vec{h}$ est un changement de variable et $\vec{g}$ est sa fonction réciproque, i.e. :

$$\vec{g} \circ \vec{h}(x_1, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, x_n)$$

Nous savons donc que le Jacobien de notre composée est :

$$J_{\vec{g} \circ \vec{h}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_{n \times n}$$

Supposons maintenant aussi que $\vec{h}$ et $\vec{g}$ sont dérivables sur leurs domaines. Par le théorème de la fonction composée, nous obtenons :

$$J_{\vec{g}}\left(\vec{h}(\vec{a})\right) \cdot J_{\vec{h}}(\vec{a}) = I_{n \times n}$$

$$\implies J_{\vec{g}}\left(\vec{h}(\vec{a})\right) = \left(J_{\vec{h}}(\vec{a})\right)^{-1} \text{ et } \det\left(J_{\vec{g}}\right)\det\left(J_{\vec{h}}\right) = 1$$

Puisqu'une matrice est bijective si et seulement si elle est inversible, nous en déduisons donc la proposition suivante.

*Proposition* Soit $\vec{g} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction dérivable en $\vec{a}$. $\vec{g}$ est bijective dans un voisinage de $\vec{a}$ si et seulement si $\det\left(J_{\vec{g}}\left(\vec{a}\right)\right) \neq 0$.

**Exemple : Coordonnées polaires** Nous avons les fonctions de changement de variable suivantes :

$$\vec{h}(x, y) = (r, \varphi), \quad \vec{g}(r, \varphi) = (x, y)$$

Pour plus de simplicité sur la fonction qui nous donne $\varphi$, prenons $x > 0$ (si on prend $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, cela fonctionnera de la même manière, mais la notation sera plus lourde) :

$$\vec{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad \vec{h}(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{pmatrix}$$

Nous savons que la propriété suivante tient :

$$\left(\vec{h} \circ \vec{g}\right)(r, \varphi) = (r, \varphi) \implies J_{\vec{h} \circ \vec{g}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_{\vec{h} \circ \vec{g}}(x, y) \cdot J_{\vec{g}}(r, \varphi)$$

La matrice Jacobienne de $\vec{g}$ se calcule relativement facilement :

$$J_{\vec{g}} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \implies \det\left(J_{\vec{g}}\right) = r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r \neq 0$$

Pour calculer la matrice Jacobienne de $\vec{h}$, utilisons le fait qu'elle soit l'inverse de celle de $\vec{f}$ :

$$J_{\vec{h}} = \left(J_{\vec{g}}\right)^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\frac{\sin(\varphi)}{r} & \frac{\cos(\varphi)}{r} \end{pmatrix}$$

Or, puisque $\cos(\varphi) = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et de manière similaire pour $\sin(\varphi)$, nous obtenons :

$$J_{\vec{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Nous pouvons vérifier cette dernière égalité en utilisant la définition explicite de $\vec{h}$.

## 5.6 Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre

**Théorème** Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ensemble ouvert, soit $f : [a, b] \times I \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $[a, b] \times I$, et soit :

$$g(y) = \int_a^b f(x, y)dx$$

Alors, $g(y)$ est de classe $C^1$ sur $I$, et nous avons :

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)dx, \quad \forall y \in I$$

*Preuve*

Considérons le quotient suivant :

$$\begin{aligned} D(y) &= \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} \\ &= \frac{1}{y - y_0} \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0))dx \\ &= \int_a^b \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} dx \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissement finis, nous savons qu'il existe un $\widetilde{y}$ entre $y$ et $y_0$ tel que :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{y}) = \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0}$$

Ceci nous dit donc que :

$$D(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{y})dx$$

Or, puisque $\widetilde{y}$ est entre $y$ et $y_0$, que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue, nous savons que, quand $y \to y_0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x, \widetilde{y_0}) \to \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)$ par le théorème des deux gendarmes. Ainsi, cela implique que :

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} D(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0)dx$$

□

**Exemple** Considérons la fonction suivante :

$$g(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)dx$$

Nous voulons calculer sa dérivée.

*Théorème* Nous savons que, par notre théorème :

$$g'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(xy)xdx$$

Si $y = 0$, alors :

$$g'(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} xdx = \frac{1}{2}x^2\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{8^2}$$

Si $y \neq 0$, nous pouvons faire une intégrale par partie :

$$g'(y) = \frac{1}{y}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xd(\sin(xy)) = \frac{x}{y}\sin(xy)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{y}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)dx$$

Ce qui est égal à :

$$\frac{\pi}{2y}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{y^2}\cos(yx)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2y}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{y^2}\left(\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 1\right)$$

*Directement* Calculons notre fonction directement :

$$g(y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(xy)dx \overset{y \neq 0}{=} -\frac{1}{y}\cos(xy)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{y}\cos\left(\frac{\pi y}{2} - 1\right)$$

Calculons maintenant la dérivée :

$$\begin{aligned} g'(y) &= -\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2}\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{y}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right)\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2y}\sin\left(\frac{\pi y}{2}\right) + \frac{1}{y^2}\left(\cos\left(\frac{\pi y}{2}\right) - 1\right) \end{aligned}$$

comme attendu.

Notez que, si nous voulons calculer les limites de $g(y)$ et $g'(y)$ en 0, nous pouvons utiliser le développement limité de cosinus autour de 0. Ceci nous permettrait de démontrer que cette fonction et sa dérivée sont continues en $y = 0$.

**Rappel : Théorème Fondamental du calcul intégral** Soit $f$ une fonction continue. Alors, nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(\int_a^t f(y)dy\right) = f(t), \quad \frac{d}{dt}\left(\int_t^b f(y)dx\right) = \frac{d}{dt}\left(-\int_b^t f(y)dx\right) = -f(t)$$

Nous pouvons maintenant combiner nos résultats, et obtenir le théorème suivant.

**Théorème** Soient $I, J \subset \mathbb{R}$ deux ensembles ouverts, soient $g, h : I \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions continûment dérivables, et soit $f : J \times I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ est continue sur $I$. Finalement, soit :

$$A(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x,t)dx$$

Alors, $A(t)$ est continûment dérivable sur $I$, et on a :

$$A'(t) = f(g(t),t)g'(t) - f(h(t),t)h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

*Remarque* Ce théorème doit être connu, car il y a souvent un exercise où nous devons l'utiliser en examen.

*Preuve* Dans l'idée, nous pouvons définir $F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

$$F(g,h,t) = \int_h^g f(x,t)dx$$

De plus, nous pouvons définir $T : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ :

$$T(t) = (g(t), h(t), t)$$

Ainsi, nous avons :

$$A(t) = F(g(t), h(t), t) = F(T(t))$$

Alors, par le théorème de la dérivée d'une fonction composée, on a :

$$A'(t) = J_{F\circ T} = \nabla F(g,h,t)\begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial g}g'(t) + \frac{\partial F}{\partial h}h'(t) + \frac{\partial F}{\partial t}\cdot 1$$

Mais, par le théorème fondamental du calcul intégral, nous obtenons :

$$A'(t) = \underbrace{f(g(t),t)}_{\frac{\partial F}{\partial g}}g'(t) - \underbrace{f(h(t),t)}_{\frac{\partial F}{\partial h}}h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)dx$$

□

*Note personnelle : Intuition*

L'intuition de cette formule est intimement liée avec sa preuve. Ainsi, refaisons là en utilisant des étiquettes différentes sur ce que nous pouvons reconnaître, afin de voir que nous ne partons pas loin des connaissances que nous avons déjà. Pour commencer, il est possible de démontrer que :

$$\frac{\partial}{\partial x} f(g(x, y), h(x, y)) = \frac{\partial f(g, h)}{\partial g} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(g, h)}{\partial h} \cdot \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}$$

Ceci est une généralisation de la règle de la dérivée en chaine. Définissons maintenant :

$$F(x, t) = \int_a^x f(\xi, t) d\xi \implies A(t) = F(g(t), t) - F(h(t), t)$$

Ainsi, en dérivant, nous obtenons :

$$A'(t) = \frac{\partial F(g, t)}{\partial g} \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{\partial F(g, t)}{\partial t} - \frac{\partial F(h, t)}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial F(h, t)}{\partial t}$$

Par un argument similaire à la preuve, il est raisonnable de se convaincre que, en utilisant le théorème fondamental du calcul intégral :

$$\frac{\partial F(g, t)}{\partial g} = f(g, t), \quad -\frac{\partial F(h, t)}{\partial h} = -f(h, t)$$

Aussi, comme nous l'avons démontré dans un théorème plus tôt, nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(g, t)}{\partial t} - \frac{\partial F(h, t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}(F(g, t) - F(h, t)) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \int_h^g f(x, t) dx \\ &= \int_h^g \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \end{aligned}$$

En mettant tout ensemble, nous obtenons le résultat que nous cherchions. Notez que ce raisonnement peut se faire très rapidement sur une feuille de brouillon pendant un examen, en faisant toujours attention selon quoi on dérive. Si les notations, comme $\frac{\partial f(g,t)}{\partial g}$, vous semblent bizarre, n'hésitez pas à les comparer avec les notations suivantes pour la dérivée en chaine classique :

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \frac{df(g(x))}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx} = \frac{df(g)}{dg} \cdot \frac{dg(x)}{dx}$$

Ces notations peuvent prend un peu de temps à assimiler, mais elles sont très pratiques (notamment en physique, par exemple pour l'équation de Lagrange, où on dérive une fonction "selon des fonctions" (la position et sa dérivée) ! ☺).

**Exemple** Calculons la primitive de la fonction suivante :

$$F(t) = \int_{2t}^{3t^2} e^{t+x} dx$$

Nous allons appliquer notre théorème. Nous avons :

$$h(t) = 2t, \quad g(t) = 3t^2, \quad f(x, t) = e^{x+t}$$

Ainsi, par notre théorème :

$$\begin{aligned} F'(t) &= e^{3t^2+t}\underbrace{g'(t)}_{6t} - e^{2t+t}\underbrace{h'(t)}_{2} + \int_{2t}^{3t^2} \frac{\partial e^{t+x}}{\partial t} dx \\ &= e^{3t^2+t}\cdot 6t - e^{3t}\cdot 2 + \int_{2t}^{3t^2} e^x e^t dx \\ &= 6te^{3t^2+t} - 2e^{3t} + e^t\left(e^{3t^2} - e^{2t}\right) \\ &= (6t+1)e^{3t^2+t} - 3e^{3t} \end{aligned}$$

*Vérification* De manière générale, il n'est pas toujours possible de calculer $F(t)$ explicitement, mais ici c'est possible et donc nous pouvons l'utiliser pour vérifier notre résultat :

$$F(t) = \int_{2t}^{3t^2} e^t e^x dx = e^t\left(e^{3t^2} - e^{2t}\right) = e^{3t^2+t} - 3e^{3t}$$

Ainsi :

$$F'(t) = (6t+1)e^{3t^2+t} - 3e^{3t}$$

comme attendu.

Lundi 25 avril 2022 — **Cours 17 : Méthode de physicien**

## 5.7 Application du gradient et du Laplacien en coordonnées polaires

**Définition : Laplacien** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble, et soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^2$ sur $E$.
La fonction $\Delta f : E \mapsto \mathbb{R}$ suivante est le **Laplacien** de $f$ :

$$\Delta f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

*Remarque personnelle* Définissons la Nabla de la manière suivante :

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right)$$

Notez que c'est un vecteur d'opérateurs, le Nabla ne contient pas des valeurs ou des fonctions, mais l'opérateur dérivée. Cela peut être défini formellement, mais nous allons l'utiliser comme des physiciens.

Premièrement, remarquons que notre gradient est toujours cohérent avec cette notation :

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Cette définition est très pratique, notamment pour définir la divergence et le rotationel, très pratiques en physique ($\operatorname{rot} f = \nabla \times f$, $\operatorname{div} f = \nabla \bullet f$).

Maintenant, pour le Laplacien, on voit que :

$$\Delta f = \nabla^2 f$$

où un vecteur au carré est défini par :

$$\vec{a}^2 = \vec{a} \bullet \vec{a} = \|\vec{a}\|^2$$

Nous pouvons donc définir :

$$\Delta = \nabla^2$$

**Exemple** Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ suivante :

$$f(x, y) = xy + 3x^3$$

Cette fonction est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$, ainsi :

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 18x + 0 = 18x$$

**Proposition** Soit $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$, et soit $\widetilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$, où $g$ est la fonction changement de variable vers les coordonnées polaires. Alors :

$$\nabla f(x, y) = \left(\cos(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}, \sin(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}\right)$$

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}$$

*Preuve* Nous savons que $\widetilde{f}(r, \varphi) = f \circ g(r, \varphi)$, où :

$$g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\implies J_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

De plus :

$$\begin{aligned} J_{\widetilde{f(r,\varphi)}} = J_{f\circ g}(r, \varphi) &= \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}\right) = J_f(g(r, \varphi))J_g(r, \varphi) \\ &= J_f(x, y)J_g(r, \varphi) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)}_{\nabla f(x,y)} J_g(r, \varphi) \end{aligned}$$

Ceci est une équation matricielle, qu'on peut résoudre en utilisant la formule pour l'inverse des matrices $2 \times 2$ :

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \\ &= \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}\right)(J_g(r, \varphi))^{-1} \\ &= \left(\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r}, \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}\right)\frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) & r\sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \left(\cos(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}, \sin(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r}\cos(\varphi)\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \varphi}\right) \end{aligned}$$

Pour calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, nous pouvons utiliser la méthode que nous venons de calculer :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = {} & \cos(\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ en coordonnées polaires}\right) \\ & - \frac{1}{r}\sin(\varphi)\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial f}{\partial x} \text{ en coordonnées polaires}\right) \end{aligned}$$

Nous ferons ces calculs dans la série 9.

□

*Remarque personnelle* J'espère que les dérivées selon des fonctions vous ont manquées, parce qu'on y retourne ! ☺

Je trouve personnellement que c'est plus intuitif, mais il est naturellement complètement possible que vous préfériez la méthode présentée pendant le cours.

Commençons par définir que :

$$x(r, \varphi) = r\cos(\varphi), \quad y(r, \varphi) = r\sin(\varphi)$$

$$r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Notez que $\varphi(x, y)$ devrait avoir une définition par partie plus générale pour être vraie pour tout $x, y$, mais prenons $x, y > 0$. Le raisonnement est le même si nous voulons prendre $\mathbb{R}^2$ comme domaine (tout ce qu'il faut retenir pour utiliser cette méthode en examen c'est que les dérivées de $\operatorname{atan2}(y, x)$ sont égales à celles de $\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$), mais nous pouvons aussi le faire à l'aide de la méthode de calcul de dérivée de l'inverse d'une fonction vue plus tôt dans ce cours.

Ainsi, si nous avons une fonction qui nous est donnée sous sa forme polaire, nous pouvons écrire :

$$f(r, \varphi) = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

Dérivons notre fonction par la formule vue plus tôt dans une de mes remarques :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial x} &= \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial \varphi} \cdot \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{1}{1 + \left(\frac{y^2}{x^2}\right)}\left(-\frac{y}{x^2}\right)\end{aligned}$$

Et nous pouvons maintenant repasser en variables polaires, en prenant la définition de $x(r, \varphi)$ et $y(r, \varphi)$ :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(r, \varphi)}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial r}\frac{r\cos(\varphi)}{r} + \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{-r\sin(\varphi)}{r^2} \\ &= \frac{\partial f}{\partial r}\cos(\varphi) - \frac{\partial f}{\partial \varphi}\frac{\sin(\varphi)}{r}\end{aligned}$$

Ce qui est exactement ce qui est exactement le résultat attendu. Il est naturellement possible de faire exactement le même raisonnement pour la dérivée partielle selon $y$ et pour les dérivées secondes.

**Exemple** Soit la fonction de classe infinie sur $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ suivante :

$$f(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

Ce n'est pas très agréable de calculer les dérivées de cette fonction dans cette forme, ainsi passons là en coordonnées polaires :

$$\widetilde{f}(r, \varphi) = \frac{r\sin(\varphi)}{r^2} = \frac{\sin(\varphi)}{r}$$

Par notre proposition, nous obtenons :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial r} = \frac{2\sin(\varphi)}{r^3} + \frac{1}{r^2}\frac{-\sin(\varphi)}{r} + \frac{1}{r}\left(-\frac{\sin(\varphi)}{r^2}\right) = 0$$

**Définition : Fonctions harmoniques**

Une fonction telle que $\Delta f = 0$ sur $E \subset \mathbb{R}^2$ s'appelle **harmonique**.

**Proposition**

Une fonction harmonique sur un domaine compact atteint son minimum et son maximum sur la frontière du domaine.

*Preuve*

Nous acceptons cette proposition sans preuve. Cependant, nous pouvons faire une justification rapide.

Nous pouvons remarquer que le Laplacien est la trace (la somme des éléments diagonaux) de la matrice Hessienne. Or, un théorème d'Algèbre Linéaire nous dit que la trace d'une matrice est égale à la somme de ses valeurs propres, et nous verrons plus tard que les valeurs propres de la matrice Hessienne définissent l'existence ou non du maximum et du minimum.

*Remarque*

Ceci implique qu'une fonction harmonique sur un domaine compact est telle que, pour n'importe quel sous-ensemble compact, elle atteint son minimum et son maximum sur la frontière.

**Exemple 1**

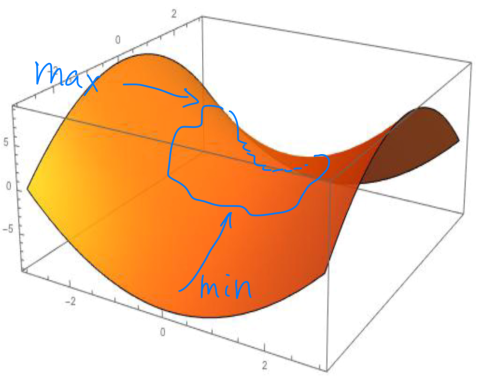
Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = x^2 - y^2$$

Alors, nous avons :

$$\Delta f(x, y) = 2 - 2 = 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, cette fonction est harmonique.




**Exemple 2**

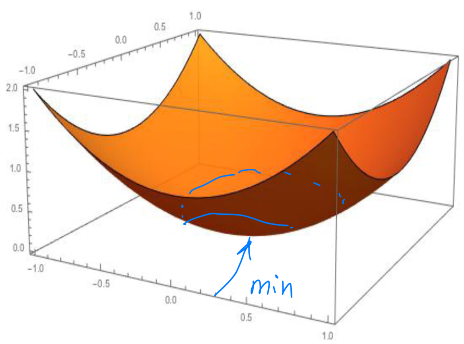
Soit la fonction $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Alors :

$$\Delta g(x, y) = 2 + 2 = 4 \neq 0, \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Ainsi, elle n'est pas harmonique.



## 5.8 Formule de Taylor

**Théorème** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$, et soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{p+1}$ au voisinage de $\vec{a} \in E$. Alors, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $\vec{x} \in B(\vec{a}, \delta) \cap E$, il existe $0 < \theta < 1$ tel que :

$$f(\vec{x}) = F(0) + F'(0) + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

où $F : I \mapsto \mathbb{R}$, avec $I \subset [0, 1]$, est définie par $F(t) = f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a}))$.

*Preuve* Nous remarquons que $f(\vec{x}) = F(1)$ et $f(\vec{a}) = F(0)$. Ainsi, $F(t)$ est de classe $C^{p+1}$ sur $I$.

Dans le cours d'Analyse 1, nous avions vu la formule de Taylor pour les fonctions d'une seule variable, ce que nous pouvons appliquer sur $F(t)$ :

$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0)t^p + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)t^{p+1}$$

où $\theta$ est entre 0 et $t$.
Or, nous voulons $F(1)$, donc :

$$f(\vec{x}) = F(1) = F(0) + F'(0) + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \frac{1}{(p+1)!}F^{(p+1)}(\theta)$$

où $\theta$ est entre 0 et 1.

□

*Remarque* Nous voyons que :

$$F'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(\vec{a} + t(\vec{x} - \vec{a})) - f(\vec{a})}{t} = Df(\vec{a}, \vec{x} - \vec{a})$$

*Terminologie* Ce théorème nous dit que nous pouvons écrire :

$$f(\vec{x}) = F(0) + F'(0) + \ldots + \frac{1}{p!}F^{(p)}(0) + \text{ le reste}$$

Nous l'appelons le **polynôme de Taylor** de $f$ d'ordre $p$ au point $\vec{a}$.

**Cas où $n = 2$** Soit $\vec{a} = (a, b)$, $\vec{x} = (x, y)$ et $f(x, y) : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{p+1}$ où $p \geq 2$. Nous cherchons le polynôme de Taylor d'ordre $p$ autour de $\vec{a}$.
Pour commencer, nous prenons :

$$F(t) = f(a + t(x - a), b + t(y - b))$$

Pour trouver $F'(t)$ en termes de $f$, nous pouvons remarquer que nous avons $F(t) = f \circ g(t)$, où :

$$g(t) = (a + t(x - a), b + t(y - b))$$

Ainsi, par le théorème de la composée des matrices Jacobiennes :

$$F'(t) = J_f(t) = J_f(g(t)) \cdot J_g(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t} \\ \frac{\partial g_2}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{\partial f(g(t))}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(g(t))}{\partial y}(y - b)$$

Et ainsi :

$$F'(0) = \frac{\partial f(a, b)}{\partial x}(x - a) + \frac{\partial f(a, b)}{\partial y}(y - b)$$

Nous voulons maintenant calculer $F''(0)$. Nous venons de trouver que :

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial t}$$

Calculons la dérivée du premier terme :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}\underbrace{\left(\frac{\partial^2 g_1}{\partial t_1^2}\right)}_{=0} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)\frac{\partial g_1}{\partial t}$$

La dérivée du deuxième terme d'une manière similaire :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial g_2}{\partial t}\right)^2$$

Nous pouvons mettre nos résultats ensembles pour obtenir que, avec le théorème de Schwarz (puisque notre fonction est de classe $C^p$ où $p \geq 3$) :

$$F''(t) = \frac{\partial f}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-b)^2$$

Et ainsi :

$$F''(0) = \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x^2}(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f(a,b)}{\partial y^2}(y-b)^2$$

D'une façon similaire, on obtient :

$$F^{(3)} = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x-a)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(x-a)^2(y-b) + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(x-a)(y-b)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(y-b)^3$$

Nous reconnaissons les coefficients binomiaux $C_p^k = \frac{p!}{k!(p-k)!}$, et nous pouvons démontrer par récurrence que :

$$F^{(p)}(0) = \sum_{k=0}^{p} \frac{\partial^p f}{\partial x^k \partial y^{p-k}} C_p^k (x-a)^k (y-b)^{p-k}$$

Souvent, on utilise l'approximation de Taylor d'ordre 2, donnée par :

$$\begin{aligned} f(x,y) = f(a,b) &+ \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)(y-b) \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)(x-a)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)(x-a)(y-b) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)(y-b)^2\right) \\ &+ \varepsilon\Big(\|(x,y)-(a,b)\|^2\Big) \end{aligned}$$

où les deux premières lignes sont $P_{2,f,(a,b)}$, le polynôme de Taylor de $f$ d'ordre 2 autour de $(a,b)$, et la troisième ligne est le reste.

*Remarque personnelle* En manipulant les opérateurs comme de physiciens, il est tentant d'écrire :

$$F^{(p)}(0) = \left((x-a)\frac{\partial}{\partial x} + (y-b)\frac{\partial}{\partial y}\right)^p f$$

## Mercredi 27 avril 2022 — **Cours 18 : Vous savez toujours calculer des valeurs propres ?**

**Exemple** Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ suivante :

$$f(x,y) = e^{-x+2y^2+1}$$

Nous voulons trouver le polynôme de Taylor de $f$ d'ordre 2 autour de $(0,1)$. Calculons nos dérivées :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = -e^{-x+2y^2+1}\Big|_{(0,1)} = -e^3$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = 4ye^{-x+2y^2+1}\Big|_{(0,1)} = 4e^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,1) = e^{-x+2xy^2+1}\Big|_{(0,1)} = e^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4e^{-x+2y^2+1} + 4y(4y)e^{-x+2y^2+1}\Big|_{(0,1)} = 20e^3$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,1) = -4ye^{-x+2y^2+1}\Big|_{(0,1)} = -4e^3$$

Et ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{2,f,(0,1)} &= e^3 + \left(-e^3\right)x + 4e^3(y-1) + \frac{1}{2}\left(e^3x^2 + 2\left(-4e^3\right)x(y-1) + 20e^3(y-1)^2\right) \\ &= e^3\left(1 - x + 4(y-1) + \frac{1}{2}x^2 - 4x(y-1) + 10(y-1)^2\right) \end{aligned}$$

**Remarque** Il existe une autre méthode pour calculer les polynômes de Taylor, en utilisant les developments limités d'une seule variable.

**Exemple** Reprenons l'exemple que nous venons de faire. Puisque nous faisons notre development limité autour de $(0,1)$, nous avons que $x$ et $y-1$ sont petits. Ainsi, mettons-les en évidence :

$$\begin{aligned} f(x,y) = e^{-x+2y^2+1} &= e^{-x+2((y-1)+1)^2+1} \\ &= e^{-x+2(y-1)^2+4(y-1)+2+1} = e^3 e^{\overbrace{-x+4(y-1)+2(y-1)^2}^{s}} \end{aligned}$$

Ainsi, puisque $s$ est petit, nous pouvons maintenant utiliser la développement limité d'ordre 2 de $e^s$ autour de $s=0$, en ignorant les termes d'ordre plus grand ou égal à 3 :

$$\begin{aligned} P_{2,f,(0,1)} &= e^3\left(1 + s + \frac{1}{2}s^2\right) \\ &= e^3\left[1 + \left(-x + 4(y-1) + 2(y-1)^2\right) + \frac{1}{2}\left(x^2 + 16(y-1)^2 - 8x(y-1)\right)\right] \\ &= e^3\left(1 - x + 4(y-1) + \frac{1}{2}x^2 + 10(y-1)^2 - 4x(y-1)\right) \end{aligned}$$

Ce qui est exactement ce que nous avions obtenu.

**Taylor en trois dimensions** Considérons maintenant le cas où $n=3$. Ainsi, nous avons $f(x,y,z)$, une fonction de classe $C^3$, et nous voulons calculer son développement limité autour de $(a,b,c) \in E \subset \mathbb{R}^3$.
En utilisant la même méthode que dans le cours précédent, nous pouvons poser :

$$g(t) = \begin{pmatrix} a + t(x-a) \\ b + t(y-b) \\ c + t(z-c) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \\ g_3(t) \end{pmatrix}, \quad F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial g_3}{\partial t}$$

Ainsi, nous avons :

$$F'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b,c)(x-a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b,c)(y-b) + \frac{\partial f}{\partial z}(a,b,c)(z-c)$$

La dérivée seconde est donnée par :

$$\begin{aligned} F''(0) = &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c)(x-a)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c)(y-b)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(a,b,c)(z-c)^2 \\ &+ 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-a)(y-b) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(y-b)(z-c) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x-a)(z-c) \end{aligned}$$

*Remarque personnelle* Je vois un pattern avec la formule trouvée dans le cours précédent. Ainsi, je ne sais pas du tout si c'est vrai, mais je conjecture que nous avons, pour $n$ variables :

$$F^{(p)}(0) = \left((x_1 - a_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + (x_n - a_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^p f(x_1, \ldots, x_n)$$

**Méthodes** Nous avons maintenant deux méthodes pour calculer une formule de Taylor :
1. Utiliser la formule de Taylor en plusieurs variables.
2. Utiliser les développements limités d'une seule variable.

**Exemple** Prenons la fonction suivante :

$$f(x,y) = \frac{\sin\left(x + \frac{1}{y}\right)}{1+x}$$

Nous voulons calculer sa formule de Taylor d'ordre 2 autour de $(0,1)$.

*Méthode 1* Cette méthode est directe mais fastidieuse. Les dérivées deviennent vite très compliquées.

*Méthode 2* Cette méthode nécessite un traitement soigneux et une maitrise des développements limités.

Commençons pas tout réécrire en fonction de $(y-1)$ :

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{(y-1)+1} = 1 - (y-1) + (y-1)^2 - \ldots$$

Nous pouvons aussi voir que :

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \ldots$$

Regardons maintenant le sinus :

$$\begin{aligned} &\sin\left(x + 1 - (y-1) + (y-1)^2 - \ldots\right) \\ &= \sin\left(1 + \underbrace{x - (y-1) + (y-1)^2}_{s \text{ petit}} - \ldots\right) \\ &= \sin(1)\cos(s) + \cos(1)\sin(s) \\ &= \sin(1)\left(1 - \frac{s^2}{2} + \ldots\right) + \cos(1)(s - \ldots) \end{aligned}$$

En multipliant tout ensemble, on obtient (désolé pour le changement de taille de police, c'est impossible de tout écrire sur une ligne comme ça aussi) :

$$\left(1 - x + x^2\right)\left[\sin(1)\left(1 - \frac{1}{2}\left(x - (y-1) + (y-1)^2\right)^2\right) + \cos(1)\left(x - (y-1) + (y-1)^2\right)\right]$$

Ce qu'on peut simplifier, nous donnant $P_{2f(0,1)}$ :

$$\begin{aligned}
&\sin(1)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}(y-1)^2 + x(y-1) - x + x^2\right) \\
&+ \cos(1)\left(x - (y-1) + (y-1)^2 - x^2 + x(y-1)\right) \\
= \; &\sin(1) + x(\cos(1) - \sin(1)) - (y-1)\cos(1) + x^2\left(\frac{1}{2}\sin(1) - \cos(1)\right) \\
&+ (y-1)^2\left(\cos(1) - \frac{1}{2}\sin(1)\right) + x(y-1)(\sin(1) + \cos(1))
\end{aligned}$$

## 5.9 Extrema d'une fonction de plusieurs variables

**Définition : Point stationnaire**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \mapsto \mathbb{R}$.
$\overrightarrow{a} \in E$ est un **point stationnaire** de $f$ si et seulement si :

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overrightarrow{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overrightarrow{a})\right) = \overrightarrow{0}$$

**Définition : Maximum local**

$f : E \mapsto \mathbb{R}$ admet un **maximum local** au point $\overrightarrow{a} \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(\overrightarrow{x}) \leq f(\overrightarrow{a})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E \cap B(\overrightarrow{a}, \delta)$.

**Définition : Minimum local**

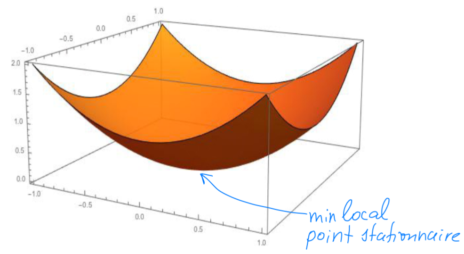
$f : E \mapsto \mathbb{R}$ admet un **minimum local** au point $\overrightarrow{a} \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que $f(\overrightarrow{x}) \geq f(\overrightarrow{a})$ pour tout $\overrightarrow{x} \in E \cap B(\overrightarrow{a}, \delta)$.

**Exemple 1**

Prenons la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$. Nous pouvons voir que $(0, 0)$ est un point stationnaire :

$$\nabla f(x, y) = (2x, 2y)\Big|_{(0,0)} = \overrightarrow{0}$$

Or, nous pouvons voir que c'est un minimum local sur le graphique :

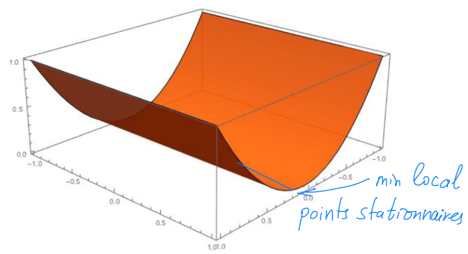



**Exemple 2**

Prenons la fonction $f(x, y) = x^2$. Nous pouvons voir que $(0, b)$ est un point stationnaire $\forall b \in \mathbb{R}$ :

$$\nabla f(x, y) = (2x, 0)\Big|_{(0,b)} = \overrightarrow{0}$$

De manière similaire, nous pouvons aussi voir qu'ils représentent des minimum locaux sur le graphique :




**Proposition : Condition nécessaire pour un extremum local**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction admettant un extremum local au point $\overrightarrow{a} \in E$ et telle que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\overrightarrow{a})$ existent $\forall i = 1, \ldots, n$.

Alors, $\overrightarrow{a}$ est un point stationnaire de $f$, i.e. $\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{0}$.

*Preuve* Soit la fonction suivante :

$$g_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$$

Nous savons que $\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right)$ existe implique que $g_i(x)$ est dérivable en $a_i = x$. De plus, nous savons qu'elle admet un extremum local en ce point puisque $f$ en a un à ce point (si $g$ n'avait pas d'extremum local, alors clairement $f$ n'en n'aurait pas non plus). Or, par le cours d'Analyse 1, cela implique que :

$$g_i'(a_i) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\overrightarrow{a}\right) = 0$$

Nous pouvons faire ce même argument pour chaque $i = 1, \ldots, n$, ainsi on obtient bien que $\nabla f\left(\overrightarrow{a}\right) = \overrightarrow{0}$.

□

*Remarque 1* Cette proposition est parallèle à celui qu'on a vu en Analyse 1 : si une fonction d'une variable est dérivable à un point et elle admet un extremum local en ce point, alors sa dérivée est nulle.

*Remarque 2* La réciproque est fausse. Si le gradient est nul en un point, alors cela nous donne par forcément un extremum local. Nous pouvons prendre un contre-exemple parallèle à celui typique en Analyse 1 :

$$f(x, y) = x^3$$

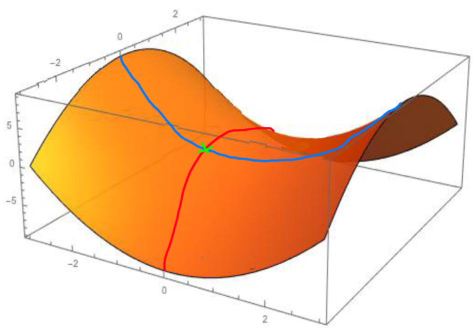
Il y aura un autre contre-exemple dans l'exemple suivant.

*Remarque 3* Même si $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ admet un minimum local le long de toute droite passant par $\overrightarrow{a}$, cela n'implique pas que $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ admet un minimum local en $\overrightarrow{a}$. Nous avons un résultat similaire pour les maximum locaux.

**Exemple** Prenons $f(x, y) = x^2 - y^2$. Ainsi, nous avons :

$$\nabla f(0, 0) = (2x, -2y)\Big|_{(0,0)} = \overrightarrow{0}$$

Ainsi, $\overrightarrow{0}$ est un point stationnaire, mais comme on peut le voir sur le graphique suivant, ce n'est pas un extremum :



**Définition : Point critique** $\overrightarrow{a} \in E$ est un **point critique** de $f : E \mapsto \mathbb{R}$ si $\overrightarrow{a}$ est un point stationnaire, ou si au moins une des dérivées partielles de $f$ n'existe pas en $\overrightarrow{x} = \overrightarrow{a}$.

*Remarque* En utilisant notre théorème, nous avons la proposition suivante :
Si $\overrightarrow{a}$ est un point d'extremum local, alors $\overrightarrow{a}$ est un point critique.

**Théorème : Condition suffisante pour un extremum local**

Soit $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^2$ sur $E$, et soit $\overrightarrow{a} \in E$ un point stationnaire ($\nabla f(\overrightarrow{a}) = \overrightarrow{0}$).
Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de $f$ en $\overrightarrow{a}$ sont strictement positives, alors $f$ possède un minimum local en $\overrightarrow{a}$.
Si toutes les valeurs propres de la matrice Hessienne de $f$ en $\overrightarrow{a}$ sont strictement négatives, alors $f$ possède un maximum local en $\overrightarrow{a}$.
S'il y a au moins une valeur propre strictement négative et au moins une strictement positive, alors $\overrightarrow{a}$ n'est pas un point d'extremum local.

*Justification* Nous n'allons pas démontrer ce théorème, mais justifions le de manière à comprendre ce qui se passe derrière.

La matrice Hessienne est symétrique par le théorème de Schwarz, puisque $f \in C^2(E)$ :

$$\text{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \left(\text{Hess}_f(\overrightarrow{a})\right)^T$$

Par le théorème spectral d'Algèbre Linéaire, nous savons donc que $\text{Hess}_f(\overrightarrow{a})$ a toutes ses valeurs propres réelles, et qu'elle est diagonalisable à l'aide d'une matrice orthogonale $O$ :

$$\text{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = ODO^T$$

où :

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad O^{-1} = O^T$$

Ainsi, il existe un changement de variable linéaire orthogonal $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_n)$ tel que la matrice Hessienne devient diagonale, avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ étant ses valeurs propres :

$$D = \text{Hess}_{f(y_1, \ldots, y_n)}(\overrightarrow{a})$$

Alors si nous supposons que $f$ est de classe $C^3$, nous pouvons écrire par la formule de Taylor :

$$\begin{aligned} f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{a}) \approx \frac{1}{2}&\Big(\lambda_1(y_1 - a_1)^2 + \ldots + \lambda_n(y_n - a_n)^2\Big) \\ &+ \varepsilon\Big(\|\overrightarrow{y} - \overrightarrow{a}\|^2\Big) \end{aligned}$$

De là, nous pouvons voir que, clairement, si $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, alors $f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{a}) \geq 0$ pour tout $\overrightarrow{y}$ dans un voisinage de $\overrightarrow{a}$, et donc $\overrightarrow{a}$ est un point de minimum local.

De manière similaire, si $\lambda_1 < 0, \ldots, \lambda_n < 0$, alors $f(\overrightarrow{y}) - f(\overrightarrow{a}) \leq 0$ et donc $\overrightarrow{a}$ est un point de maximum local.

Finalement, nous voyons que s'il existe $i, j$ tels que $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0$, alors $\overrightarrow{a}$ n'est pas un point d'extremum local (nous pouvons trouver une inégalité dans chaque direction en mettant toutes les composantes à 0 sauf la $i$-ème ou la $j$-ème).

Lundi 2 mai 2022 — **Cours 19 : Fin des études d'extremums**

**Proposition : Hypothèses équivalentes pour le théorème de la condition suffisante pour un extremum local quand $n = 2$**

Dans le cas où $n = 2$, nous pouvons réécrire les conditions de notre théorème. Notre matrice Hessienne est donnée par :

$$\operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

Nous avons les équivalences suivantes :

1. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff \det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) > 0$ et $r > 0$
2. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff \det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) > 0$ et $r < 0$
3. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \iff \det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) < 0$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve*

Pour commencer, nous savons que le déterminant et la trace d'une matrice sont des invariants de conjugaisons. Ainsi, si on a :

$$O\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}O^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} = O^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}O$$

Alors, on obtient :

$$rt - s^2 = \det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \det(O)\lambda_1\lambda_2 \det\left(O^{-1}\right) = \lambda_1\lambda_2$$

$$r+t = \operatorname{Tr} \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \operatorname{Tr}\left(ODO^{-1}\right) = \operatorname{Tr}\left(O^{-1}OD\right) = \operatorname{Tr}(D) = \lambda_1+\lambda_2$$

*Preuve point 1* $\implies$

Commençons par montrer la direction $\implies$. Ainsi, nous supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.
Alors, clairement, $\det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Aussi, nous voyons que :

$$\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0 \implies rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$$

donc $r$ et $t$ sont de même signe.
Nous pouvons aussi voir que :

$$\operatorname{Tr} \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \underbrace{\lambda_1}_{>0} + \underbrace{\lambda_2}_{>0} = r + t > 0$$

donc $r$ et $t$ doivent être les deux strictement positifs, puisqu'ils ont le même signe.
Nous en déduisons bien que $\det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) > 0$ et $r > 0$.

*Preuve point 1* $\impliedby$

Supposons que $\det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) > 0$ et $r > 0$.
Alors, puisque $\det \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, nous en déduisons que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de même signe. De plus, nous voyons aussi que $rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$.
Ainsi, puisque $rt > 0$ et $r > 0$, nous obtenons que $t > 0$. De plus, cela implique que :

$$\operatorname{Tr} \operatorname{Hess}_f\left(\vec{a}\right) = \lambda_1 + \lambda_2 = \underbrace{r}_{>0} + \underbrace{t}_{>0} > 0$$

Puisque $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de mêmes signes, et $\lambda_1 + \lambda_2 > 0$, nous en déduisons bien que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$.

*Preuve point 2* $\Longrightarrow$

Commençons par montrer la direction $\Longrightarrow$. Ainsi, nous supposons que $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$.

Alors, clairement, $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \lambda_1\lambda_2 > 0$. Aussi, nous voyons que :

$$\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0 \implies rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$$

donc $r$ et $t$ sont de même signe.

Nous pouvons aussi voir que :

$$\operatorname{Tr} \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \underbrace{\lambda_1}_{<0} + \underbrace{\lambda_2}_{<0} = r + t < 0$$

donc $r$ et $t$ doivent être les deux strictement négatifs, puisqu'ils ont le même signe.

Nous en déduisons bien que $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) > 0$ et $r < 0$.

*Preuve point 2* $\Longleftarrow$

Supposons que $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) > 0$ et $r < 0$.

Alors, puisque $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \lambda_1\lambda_2 > 0$, nous en déduisons que $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de même signe. De plus, nous voyons aussi que $rt > s^2 \geq 0 \implies rt > 0$.

Ainsi, puisque $rt > 0$ et $r < 0$, nous obtenons que $t < 0$. De plus, cela implique que :

$$\operatorname{Tr} \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \lambda_1 + \lambda_2 = \underbrace{r}_{<0} + \underbrace{t}_{<0} < 0$$

Puisque $\lambda_1$ et $\lambda_2$ sont de mêmes signes, et $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$, nous en déduisons bien que $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$.

*Preuve point 3*

Nous voyons que :

$$\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 < 0 \iff \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ sont de signes opposés}$$

*Note personnelle*

La démonstration de ce théorème peut sembler très longue et compliquée, mais elle ne l'est pas ! À partir du moment où on sait que le déterminant est donné par $ad - bc$ et que la trace est donnée par la somme des éléments diagonaux, il suffit de poser nos hypothèses et de simplement voir ce que nous pouvons en déduire, en gardant en tête où nous voulons aller.

**Résumé du cas $n = 2$**

Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2)$, et soit sa matrice Hessienne :

$$\operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$$

1. Si $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = rt - s^2 > 0$ et $r > 0$, alors nous avons un minimum local :

$$f(u,v) - f(\overrightarrow{a}) \approx \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_1(u - a_1)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_2(v - a_2)^2}_{>0} > 0$$

2. Si $\det \operatorname{Hess}_f(\overrightarrow{a}) = rt - s^2 > 0$ et $r < 0$, alors nous avons un un maximum local :

$$f(u,v) - f(\overrightarrow{a}) \approx \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_1(u - a_1)^2}_{<0} + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_2(v - a_2)^2 < 0}_{<0}$$

3. Si $\det \operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = rt - s^2 < 0$, alors il existe $u, v$ dans tout voisinage de $\overrightarrow{a}$ tels que nous n'avons pas d'extremum local :

$$f(u,v) - f\left(\overrightarrow{a}\right) \approx \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_1 (u - a_1)^2}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_2 (v - a_2)}_{<0}$$

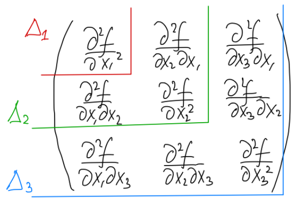
4. Si $\det \operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = 0$, alors nous n'avons pas de conclusion. Par exemple, $f(x,y) = x^4 + y^4$ a un maximum local en $\overrightarrow{0}$, $f(x,y) = -x^4 - y^4$ a un minimum local en $\overrightarrow{0}$, et $f(x,y) = x^4 - y^4$ n'a pas d'extremum local en $\overrightarrow{0}$, alors que le déterminant de toutes leurs matrice Hessiennes est nul en ce point.

**Conditions équivalentes aux conditions suffisantes pour $n = 3$**

Soit $f$ une fonction de classe $C^2$ au voisinage de $\overrightarrow{a}$, et soit sa matrice Hessienne :

$$\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Nous définissons $\Delta_1$ le déterminant de la matrice $1 \times 1$ avec le coin en haut à gauche (mineure principale de taille $1 \times 1$), $\Delta_2$ le déterminant de la matrice $2 \times 2$ avec le coin au même endroit (mineure principale de taille $2 \times 2$), et $\Delta_3 = \det \operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right)$ :




Nous avons donc :

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \Delta_3 = \det \operatorname{Hess}_f$$

1. Si $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0$, alors $\overrightarrow{a}$ est un point de minimum local (et $\operatorname{Hess}_f\left(\overrightarrow{a}\right)$ est dite définie positive).
2. Si $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0$, alors $\overrightarrow{a}$ est un point de maximum local.
3. Autrement, si $\Delta_3 \neq 0$, alors il n'y a pas d'extremum local en $\overrightarrow{a}$.
4. Si $\Delta_3 = 0$, alors nous ne pouvons rien conclure.

> *Preuve* Nous acceptons ce théorème sans preuve.

**Exemple**

Prenons la fonction suivante :

$$f(x,y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$$

Nous pouvons remarquer que $f$ est de classe $C^\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$, donc ses points critiques sont ses point stationnaires. Nous cherchons de tels points, ainsi calculons le gradient :

$$\nabla f(x,y) = \left(-4y + 2x, 3y^2 + 6y - 4x\right)$$

En posant $\nabla f(x,y) = (0,0)$ on obtient :

$$\begin{cases} 4y = 2x \\ 3y^2 + 6y - 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y(3y-2) = 0 \end{cases}$$

Et donc, nous avons deux solutions. Soit $y = 0$, ce qui implique $x = 0$, soit $y = \frac{2}{3}$, ce qui implique $x = \frac{4}{3}$. Nous avons donc deux points stationnaires : $(0,0)$ et $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

Regardons le premier point :

$$\text{Hess}_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \implies \det \text{Hess}_f(0,0) = 12 - 16 = -4 < 0$$

Nous pouvons en déduire qu'il n'y a pas d'extremum local en $(0,0)$. Regardons maintenant le deuxième point :

$$\text{Hess}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \implies \det \text{Hess}_f\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) = 20 - 16 = 4 > 0$$

Or, puisque $r = 2 > 0$, nous avons un minimum local en $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$.

## 5.10 Minimum et maximum d'une fonction continue sur un compact

**Rappel : Théorème** Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$ atteint son minimum et son maximum. En d'autres mots, $\exists \overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$ tels que :

$$f\left(\overrightarrow{c_1}\right) = \min_{\overrightarrow{x} \in D} f\left(\overrightarrow{x}\right), \quad f\left(\overrightarrow{c_2}\right) = \max_{\overrightarrow{x} \in D} f\left(\overrightarrow{x}\right)$$

**Méthode** Nous voulons une méthode pour trouver ces $\overrightarrow{c_1}, \overrightarrow{c_2}$. Pour faire cela, il faut :

1. Trouver les points critiques $\left\{\overrightarrow{c_i}\right\}$ de $f$ sur $\mathring{D}$ (l'intérieur de $D$). Calculer les valeurs $f\left(\overrightarrow{c_i}\right)$.
2. Trouver les points $\left\{\overrightarrow{d_j}\right\}$ de minimum et maximum de $f(\partial D)$ ($\partial D$ est la frontière de $D$). Calculer les valeurs $f\left(\overrightarrow{d_j}\right)$.
3. Choisir le minimum et le maximum parmi les valeurs qu'on a trouvées.

Notez que le deuxième point peut être très dur à calculer. La frontière peut par exemple être donnée par morceaux, auquel cas il ne faut pas oublier les coins. Ensuite, nous évaluons $f$ sur la frontière à l'aide de cette dépendance entre $x$ et $y$.

**Exemple** Soit la fonction $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2y + 3$. Nous voulons trouver son minium et maximum absolus sur le disque fermé suivant :

$$D = \left\{x^2 + y^2 \leq 4\right\}$$

*Points critiques* Notre fonction est de classe $C^\infty\left(\mathring{D}\right)$, donc les points critiques sont les points stationnaires.

Le gradient de notre fonction est donné par $\nabla f(x,y) = (2x, 4y-2)$, ainsi en posant $\nabla f(x,y) = (0,0)$, nous trouvons :

$$x = 0, \quad y = \frac{1}{2}$$

Ainsi, $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in \mathring{D}$ est le seul point critique. Notez que nous n'avons pas besoin de faire d'analyse supplémentaire pour savoir si c'est réellement un extremum ou non, puisque nous allons comparer la valeurs avec celles de la frontière de toutes façons.

*Frontière* Notre frontière est donnée par $\partial D = \left\{x^2 + y^2 = 4\right\}$, donc nous avons la contrainte suivante :

$$x^2 = 4 - y^2$$

Donc, la fonction sur notre frontière est donnée par :

$$\widetilde{f}(y) = \underbrace{4 - y^2}_{=x^2} + 2y^2 - 2y + 3 = y^2 - 2y + 7, \quad \text{sur } [-2, 2]$$

Cette une fonction d'une seule variable, donc nous pouvons la dériver et faire notre analyse habituelle (qui semble si triviale maintenant) :

$$\widetilde{f}'(y) = 2y - 2 = 0 \implies y = 1 \implies x = \pm\sqrt{3}$$

Nous avons donc deux points candidats : $\left(\pm\sqrt{3}, 1\right)$. Aussi, nous ne devons pas oublier les points au bord, avec $y = 2$ et $y = -2$.

*Comparaison* Calculons la valeur de nos fonctions à nos différents points :

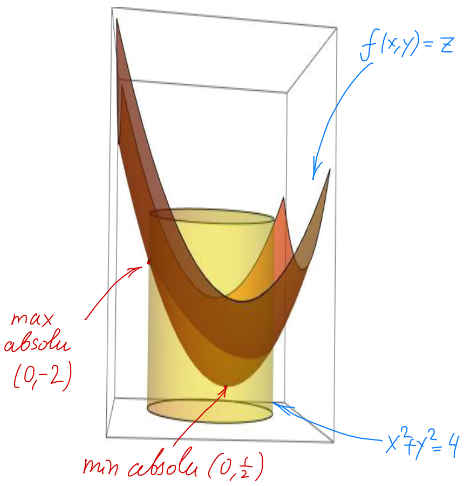
$$f\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$$f\left(\pm\sqrt{3}, 1\right) = \widetilde{f}(1) = 1 - 2 + 7 = 6$$

$$\widetilde{f}(-2) = 4 + 4 + 7 = 15 = f(0, -2)$$

$$\widetilde{f}(2) = 4 - 4 + 7 = 7 = f(0, 2)$$

Nous trouvons donc finalement que le minimum global (absolu) de $f$ sur $D$ est en $\left(0, \frac{1}{2}\right)$, et que son maximum global (absolu) sur $D$ est en $(0, -2)$.




## 5.11 Théorème des fonctions implicites

**Définition : Fonction implicite** Une **fonction implicite** est une dépendance $f = f\left(\overrightarrow{x}\right)$ qui est définie par une équation.

**Exemple 1** Prenons $F(x, y) = 2x + 3y$. Alors, $F(x, y) = 0$ définit une fonction implicite $y = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, cela nous donne :

$$2x + 3f(x) = 0 \iff f(x) = -\frac{2}{3}x, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

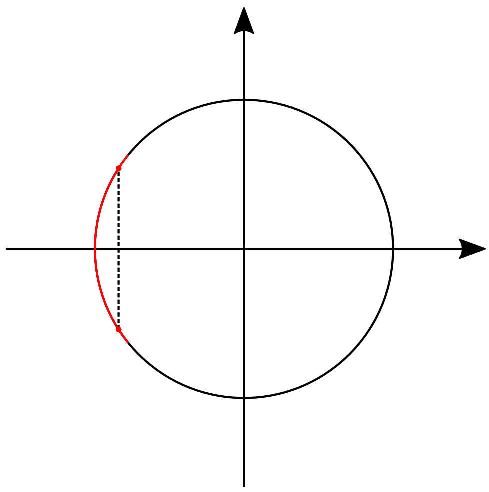
Nous aurions aussi pu considérer $x = g(y)$ :

$$2g(y) + 3y = 0 \iff g(y) = -\frac{3}{2}y, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

Nous obtenons la même fonction, décrite différemment.

**Exemple 2**

Prenons $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1$. Nous nous demandons si $F(x,y) = 0$ nous définit une fonction.
Soit $(a,b)$ un point sur le cercle de rayon 1, donc tels que $a^2 + b^2 = 1$. Si $b > 0$, alors nous trouvons $y = \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $(a,b)$. Si $b < 0$, alors nous trouvons $y = -\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de $(a,b)$.
Cependant, si $b = 0$, nous avons deux solutions pour chaque $x$ dans tout voisinage de $b$. Par exemple, en considérant un voisinage de $(-1,0)$, nous pouvons voir que tout $y$ aurait besoin de deux valeurs pour un $x$ :



Donc, puisqu'il faudrait avoir deux valeurs pour un $x$, nous ne pouvons pas avoir une fonction $y = f(x)$ au voisinage de $b = 0$.

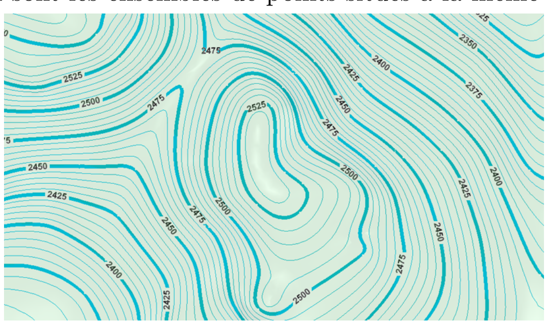
Mercredi 4 mai 2022 — **Cours 20 : Fonctions implicites**

**Définition : Surface de niveau**

Une **surface de niveau** d'une fonction $F(x,y,z)$ est la surface définie par l'équation $F(x,y,z) = C \in \mathbb{R}$. $C$ s'appelle le **niveau**.
De manière similaire, une ligne de niveau d'une fonction $F(x,y)$ est la ligne définie par l'équation $F(x,y) = C \in \mathbb{R}$. $C$ s'appelle le niveau.

*Exemple*

Par exemple, sur une carte géographique, il y a les courbes d'altitudes, qui sont les ensembles de points situés à la même altitude.



**Exemple 3**

Prenons $F(x,y) = 1 - ye^x + xe^y = 0$. Nous nous demandons si nous pouvons prendre $y = f(x)$ autour d'un point donné. Nous ne pouvons pas résoudre cette équation d'une manière explicite, mais la fonction est bien définie autour de tout point donné.
Nous pouvons considérer $F(x,y)$ comme une fonction de deux variables de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui défini une surface $z = F(x,y)$. Nous considérons l'intersection de cette surface avec le plan $z = 0$. La courbe obtenue s'appelle la **ligne de niveau** de $F(x,y)$ à $z = 0$.

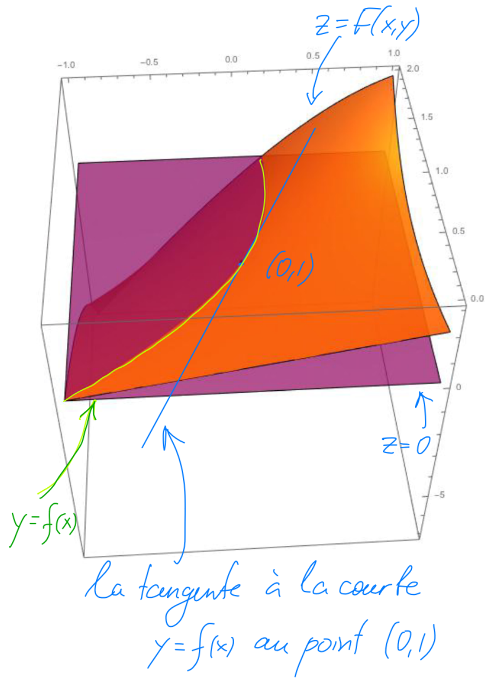
Prenons par exemple le point $(0, 1)$, qui est bien tel que $F(0, 1) = 0$. Nous cherchons donc $y = f(x)$ telle que $F(x, f(x)) = 0$ pour tout $x$ proche de 0. Ainsi, supposant que $y = f(x)$ existe, nous pouvons trouver sa dérivée :

$$\begin{aligned} & F(x, f(x)) = 0 \\ \implies & F'(x, f(x)) = 0 \\ \implies & \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f'(x) = 0 \\ \implies & f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{ye^x + e^y}{-e^x + xe^y} \end{aligned}$$

Si nous regardons en $(0, 1)$ :

$$f'(0) = \left.\frac{-ye^x + e^y}{-e^x + xe^y}\right|_{(0,1)} = -\frac{-1 + e}{-1} = -1 + e$$

qui est la pente de la tangente à $y = f(x)$ au point $(0, 1)$.




**Théorème des fonctions implicites (TFI)**

Soit $n \geq 2$ et $E \subset \mathbb{R}^n$. Soit aussi $F : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ au voisinage de $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in E$ telle que :

1. $F(\vec{a}) = 0$
2. $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a}) \neq 0$

Alors, il existe un voisinage $B(\check{\boldsymbol{a}}, \delta)$ de $\check{\boldsymbol{a}} = (a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ (remarquez que $\check{\boldsymbol{a}}$ a $n - 1$ composante et non pas $n$) et une fonction $f : B(\check{\boldsymbol{a}}, \delta) \mapsto \mathbb{R}$ telle que :

1. $a_n = f(a_1, \ldots, a_{n-1})$
2. $F(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0, \quad \forall (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B(\check{\boldsymbol{a}}, \delta)$
3. $f$ est de classe $C^1$ dans un voisinage de $\check{\boldsymbol{a}}$, et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))}, \quad \forall p = 1, \ldots, n-1$$

> *Intuition* Puisque la fonction est de classe $C^1$, elle se comporte comme une droite dans un voisinage de chaque point. Il est facile de voir pourquoi

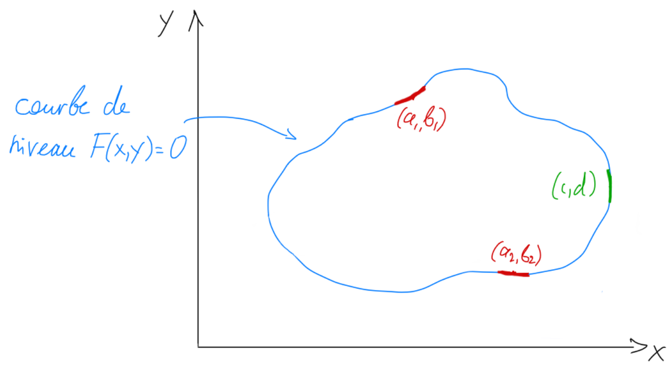
> $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\vec{a})$ doit être non-nulle en considérant le cas de $n = 2$. Si $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, alors la droite est verticale, ce qui est un problème.
> De plus, nous pouvons remarquer que si nous voulions que la fonction $f$ n'existe pas, c'est qu'il faudrait un point où elle devrait prendre deux valeurs différentes. Pour arriver à cela, sa dérivée doit clairement passer de positive à négative ou inversement, ce qui est impossible par le TVI puisqu'elle est non-nulle et continue partout.

**Cas $n = 2$**

Considérons le cas où $n = 2$. Reformulons notre théorème.
Soit $E \subset \mathbb{R}^2$, et soit $F(x, y) : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^1$ telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$.
Alors, l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de $(a, b)$ une fonction $y = f(x)$ telle que $f(a) = b$, $F(x, f(x)) = 0$ pour tout $x$ dans un voisinage de $x = a$, et :

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

Nous pouvons donc calculer $f'(a)$ sans savoir la formule pour $f(x)$.
Nous pouvons faire le schéma suivant, où la fonction est bien définie dans les voisinages rouges, mais pas dans le voisinage vert (puisqu'elle n'y respecte pas les hypothèses de notre théorème) :




**Exemple**

Reprenons l'exemple du cercle, $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Nous avons :

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 2y \neq 0 \iff y \neq 0$$

Ainsi, prenons $y > 0$, ce qui implique que $F(x, y) = 0 \iff y = \sqrt{1 - x^2}$. Calculons sa dérivée directement :

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2} \implies f'(x) = \frac{-2x}{2\sqrt{1 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Cependant, nous pouvons aussi utiliser notre théorème. En effet, par le TFI, il existe $y = f(x)$ où :

$$f'(x) = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} = -\frac{2x}{2y}\Big|_{y=\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

comme attendu.

**Cas $n = 3$**

Considérons le cas $n = 3$, reformulons notre théorème.
Soit $E \subset \mathbb{R}^3$ et $F(x, y, z) : E \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$ telle que $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Alors, il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que $f(a, b) = c$, $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout couple $(x, y)$ dans un voisinage de $(a, b)$ et :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$$

**Exemple**

Soit la fonction suivante :

$$F(x, y, z) = x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - 1$$

Pour commencer, on remarque que $F(0, 0, 1) = 0$ :

$$F(0, 0, 1) = 0 + 0 + 1\cos(0) - 1 = 0$$

Nous voulons maintenant savoir si $F(x, y, z) = 0$ définit autour de $(0, 0, 1)$ une fonction $z = f(x, y)$ telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$, et, si oui, quelles sont ses dérivées partielles.
On remarque que :

$$\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = -y\sin(z) + \cos(x)\Big|_{(0,0,1)} = \cos(0) = 1 \neq 0$$

Ainsi, par le TFI, la fonction $z = f(x, y)$ est bien définie au voisinage de $(0, 0)$ et est de classe $C^1$. Calculons les dérivées partielles de $(x, y)$ au point $(0, 0)$ :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} = \frac{\cos(y) - z\sin(x)}{-y\sin(z) + \cos(x)}\Big|_{(0,0,1)} = -\frac{1}{1} = -1$$

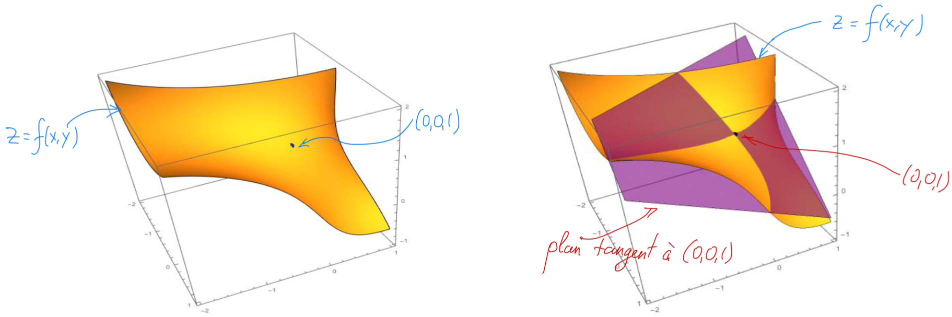
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))} = \frac{-x\sin(y) + \cos(z)}{-y\sin(z) + \cos(x)}\Big|_{(0,0,1)} = -\frac{\cos(1)}{1} = -\cos(1)$$

Ceci nous donne donc le gradient de $f$ en $(0, 0)$ :

$$\nabla f(0, 0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\right) = (-1, -\cos(1))$$

Ceci nous permet de calculer l'équation du plan tangent :

$$z = f(a, b) + \langle \nabla f(a, b), (x - a, y - b)\rangle$$




**Application : Équation de l'hyperplan tangent**

Reconstruisons la formule pour trouver un hyperplan tangent.
Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction de classe $C^1$ sur $E \subset \mathbb{R}^n$ telle qu'il existe un $i$, où $1 \leq i \leq n$, tel que, pour un $\overrightarrow{a} \in E$, nous avons $F(\overrightarrow{a}) = 0$ et :

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(\overrightarrow{a}) \neq 0$$

Par le TFI, nous savons que l'équation $F(x_1, \ldots, x_n) = 0$ définit une hypersurface $x_i = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ ($f$ ne contient pas $a_i$ dans son paramètre) qui est de classe $C^1$.
Or, nous savons que $\exists i$ pour lequel $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\vec{a}) \neq 0$, est équivalent à $\nabla F(\vec{a}) \neq 0$. Ceci implique que $DF(\vec{a}, \vec{v}) = \langle \nabla F(\vec{a}), \vec{v} \rangle = 0$ si et seulement si $\vec{v}$ est tangent à l'hypersurface de niveau. En d'autres mots, pour tout vecteur $\vec{v}$ dans l'hyperplan tangent à $F(\vec{x}) = 0$ au point $\vec{x} = \vec{a}$, nous devons avoir :

$$DF(\vec{a}, \vec{v}) = \left\langle \underbrace{\nabla F(\vec{a})}_{\neq \vec{0}}, \underbrace{\vec{v}}_{\vec{x} - \vec{a}} \right\rangle = 0$$

L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\vec{x}) = 0$ au point $\vec{a}$ tel que $F(\vec{a}) = 0$ est donc :

$$\langle \nabla F(\vec{a}), \vec{x} - \vec{a} \rangle = 0$$

*Observation* Nous pouvons voir que, parfois, nous avons besoin d'utiliser différentes variables pour représenter le plan tangent d'une fonction à chacun de ses points. Par exemple, pour une sphère, à chaque pôle il y a une variable que nous ne pouvons pas utiliser (puisque sa dérivée est nulle). Ainsi, nous ne pouvons pas écrire le plan tangent à chaque point d'une sphère sous la forme $z = h(x, y)$.

*Remarque* Notez qu'un hyperplan est l'équivalent d'un plan en dimension $n$. Par exemple, en dimension 2 c'est une droite, en dimension 3 c'est un plan, etc.

**Exemple 1** Nous avions trouvé que pour $F(x, y, z) = x\cos(y) + y\cos(z) + z\cos(x) - 1$, nous avons :

$$\nabla F(0, 0, 1) = (1, \cos(1), 1) \neq \vec{0}$$

Ainsi, le plan tangent nous est donné par :

$$\langle (1, \cos(1), 1), (x - 0, y - 0, z - 1) \rangle = 0 \implies x + y\cos(1) + z - 1 = 0 \implies z = 1 - x - y\cos(1)$$

Il est possible de vérifier que nous pouvons obtenir la même équation en prenant $z = f(0, 0) + \langle \nabla f(0, 0), (x - 0, y - 0) \rangle$.

**Exemple 2** Considérons l'équation d'une sphère de rayon 1, donc $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Nous cherchons une équation du plant tangent en $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que $a^2 + b^2 + c^2 - 1 = 0$.
Premièrement, remarquons que :

$$\nabla F(a, b, c) = (2x, 2y, 2z)\Big|_{(a,b,c)} = (2a, 2b, 2c) \neq \vec{0}$$

puisque $a = b = c = 0$ n'appartient pas à la sphère.
L'équation du plan tangent au point $(a, b, c)$ est donc donné par :

$$\begin{aligned}
&\langle (2a, 2b, 2c), (x - a, y - b, z - c) \rangle = 0 \\
\iff\ &2a(x - a) + 2b(y - b) + 2c(z - c) = 0 \\
\iff\ &ax + by + cz - \underbrace{(a^2 + b^2 + c^2)}_{=1} = 0 \\
\iff\ &ax + by + cz = 1
\end{aligned}$$

**Exemple 3** Considérons l'équation suivante :

$$F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0$$

Nous voulons trouver l'équation de la ligne tangente au point $(a, b) = \left(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}}\right)$. Commençons par vérifier qu'il appartient bien à la courbe :

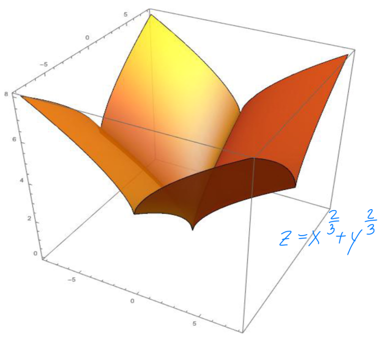
$$\left(2^{\frac{3}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = 2 + 2 = 4 \implies F(a, b) = 0$$

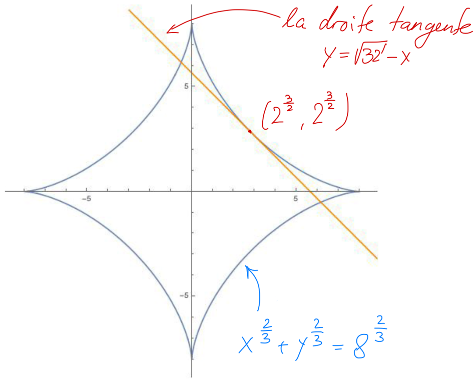
Calculons maintenant le gradient à ce point :

$$\nabla F(a, b) = \left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}y^{-\frac{1}{3}}\right)\Big|_{\left(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}}\right)} = \left(\frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3}\left(2^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right) \neq \vec{0}$$

Nous pouvons donc appliquer notre formule, pour trouver que l'équation de la tangente est :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nabla F(a, b), (x - a, y - b) \right\rangle = 0 \\
\implies &\left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right), \left(x - 2^{\frac{3}{2}}, y - 2^{\frac{3}{2}}\right) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3}\left(x - 2^{\frac{3}{2}}\right) + \frac{\sqrt{2}}{3}\left(y - 2^{\frac{3}{2}}\right) = 0 \\
\implies &x + y = 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{5}{2}} \\
\implies &y = 2^{\frac{5}{2}} - x = \sqrt{32} - x
\end{aligned}$$




Notez que l'équation $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$, celle qui est dessinée ci-dessus, donne une figure appelée un astroïde.

**Remarque** Considérons le cas $n = 3$, et faisons le lien avec l'équation du plan tangent au graphique de $z = f(x, y)$.
Si $F(x, y, z) = z - f(x, y)$, où $f$ est une fonction de classe $C^1$, alors nous avons $\frac{\partial f}{\partial z} = 1$, et donc $\nabla F(x, y, z) \neq 0$ pour tout $(x, y, z)$ où $z = f(x, y)$ est bien définie.
Ainsi, si $c = f(a, b)$, c'est à dire si $a, b, c$ appartient à la surface de niveau $F(x, y, z) = 0$, on trouve par le TFI que l'équation du plan tangent au point $(a, b, c)$ est :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \right\rangle = 0 \\
\iff &\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}_{-\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}(x - a) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}_{-\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}(y-b) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}_{1}\Bigg(z - \underbrace{c}_{f(a,b)}\Bigg) = 0
\end{aligned}$$

Nous retrouvons donc l'équation :

$$\begin{aligned}
&-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y - b) + (z - f(a, b)) = 0 \\
\iff &z = f(a, b) + \left\langle \nabla f(a, b), (x - a, y - b) \right\rangle
\end{aligned}$$

**Examen** Notez qu'à l'examen qu'il y a toujours une question sur les plans tangents, ou sur le calcul d'une dérivée d'une fonction dont on n'a pas la forme explicite.

Mercredi 11 mai 2022 — **Cours 21 : Lagrange à Laferme avec Lescochons**

## 5.12 Extrema liés — Méthode des multiplicateurs de Lagrange

**Théorème : Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte quand $n = 2$**

Soit l'ensemble $E \subset \mathbb{R}^2$ et soient les fonctions $f, g : E \mapsto \mathbb{R}$ de classe $C^1$. Supposons que $f(x,y)$ admette un extremum en $(a,b) \in E$ sous la contrainte $g(x,y) = 0$, et que $\nabla g(a,b) \neq \vec{0}$.
Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$, appelé le **multiplicateur de Lagrange**, tel que :

$$\nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b)$$

**La démonstration de ce théorème doit être connue pour l'examen.**

*Preuve*

Nous savons que $\nabla g(a,b) \neq \vec{0}$, donc au moins l'une des dérivées partielles est non-nulle. Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ est similaire).

Nous avons $g(a,b) = 0$ puisque $(a,b)$ satisfait la contrainte $g(x,y) = 0$. Ainsi, par le TFI, il existe une fonction $y = h(x)$ de classe $C^1$ au voisinage de $x = a$ telle que :

$$h'(x) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))}, \quad \text{avec } g(x, h(x)) = 0$$

Aussi, pour $(x,y)$ satisfaisant notre contrainte $g(x,y) = 0$, nous pouvons remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x,y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable :

$$f(x,y) \overset{\text{si } g(x,y)=0}{=} f(x, h(x))$$

Nous savons que les extrema de cette fonction, respectent :

$$f'(x, h(x)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) h'(x) = 0$$

Par hypothèse, $(a,b)$ est un point d'extremum, et il respecte la contrainte $g(a,b) = 0$, donc les hypothèses de l'équation que nous venons d'obtenir sont bien respectées, ce qui nous permet de trouver que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) h'(a)$$

Pour résumer, nous avons trouvé jusque là que :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = -\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) h'(a), \quad h'(a) \overset{\text{TFI}}{=} -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}$$

Ceci implique que :

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}_{v_1} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}_{v_2} \frac{\overbrace{\frac{\partial g}{\partial x}(a,b)}^{u_1}}{\underbrace{\frac{\partial g}{\partial y}(a,b)}_{u_2 \neq 0}}$$

Séparons notre preuve en différents cas. Si $u_1 = 0$, alors $v_1 = 0$ et donc $\nabla f(a, b) = (0, v_2)$ et $\nabla g(a, b) = (0, u_2)$. Ceci implique bien qu'il existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $v_2 = \lambda \underbrace{u_2}_{\neq 0}$ et donc :

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Sinon (si $u_1 \neq 0$), alors, en définissant $\frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R}$, nous trouvons :

$$(v_1, v_2) = \lambda(u_1, u_2) \iff \nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

□

*Intuition de la preuve*

Nous trouvons $f(x, y)$ sous la forme d'une fonction d'une seule variable et la dérivons, puis nous utilisons le théorème des fonctions implicites, ce qui nous permet de trouver un lien entre les dérivées de $f$ et celles de $g$.

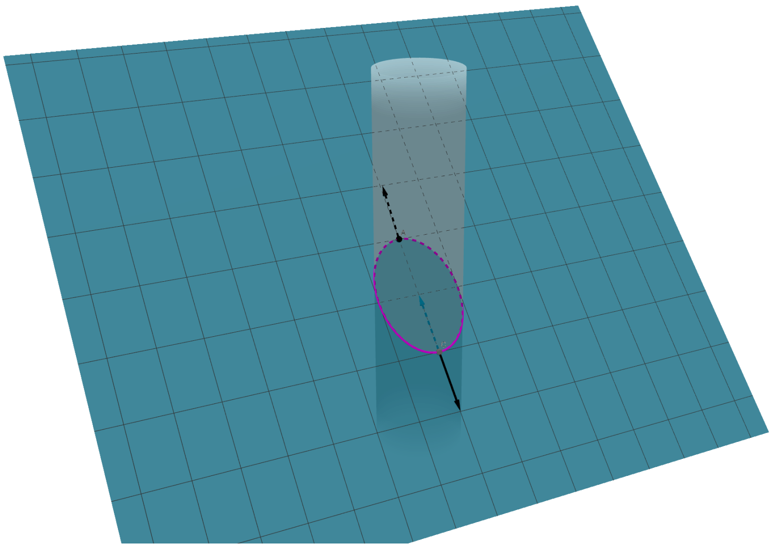
*Remarque*

Géométriquement, $g(x, y) = 0$ est une courbe de niveau. Or, on sait que $\nabla g(x, y)$ est toujours orthogonal à cette courbe. Maintenant, si $(a, b)$ est un extremum local de $f(x, y)$ sur cette courbe, cela implique que, pour un $\overrightarrow{v}$ tangent à la courbe, $D_{\overrightarrow{v}} f(a, b) = \left\langle \nabla f(a, b), \overrightarrow{v} \right\rangle = 0$ puisque c'est un extremum (ce point est visible sur l'image ci-dessous).

Ainsi, ceci nous avons plusieurs possibilités. Soit $\nabla f(a, b) = 0$, auquel cas nous pouvons prendre $\lambda = 0$, et l'extremum est un extremum local de la fonction, même sans contrainte. Sinon, $\nabla f(a, b)$ est orthogonal à la courbe, et donc il est parallèle au gradient de $g$, nous disant $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$ où $\lambda \neq 0$.

*Note personnelle : Exemple*

Regardons par exemple la fonction $f(x, y) = x$ avec la contrainte $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$. La courbe sous contrainte est présentée en violet, et il est clair que, aux extrema, $\nabla g$ (les vecteurs en noirs) est colinéaire à $\nabla f$ (le vecteur en bleu) :



**Théorème : Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et soient $f, g_1, \ldots, g_m E \mapsto \mathbb{R}$ des fonctions de classe $C^1$, où $m \leq n - 1$. Soit $\overrightarrow{a} \in E$ un extremum de $f\left(\overrightarrow{x}\right)$ sous les contraintes $g_1\left(\overrightarrow{x}\right) = \ldots = g_m\left(\overrightarrow{x}\right) = 0$.

Supposons que les vecteurs $\nabla g_1(\overrightarrow{a}), \ldots, \nabla g_m(\overrightarrow{a})$ sont linéairement indépendants. Alors, il existe un vecteur $\overrightarrow{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que :

$$\nabla f(\overrightarrow{a}) = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \nabla g_k(\overrightarrow{a}) = \lambda_1 \nabla g_1(\overrightarrow{a}) + \ldots + \lambda_m \nabla g_m(\overrightarrow{a})$$

En particulier, si on cherche un extremum de $f(\overrightarrow{x})$ sous une seule contrainte $g(\overrightarrow{x}) = 0$, on obtient les équations :

$$\begin{cases} \nabla f(\overrightarrow{x}) = \lambda \nabla g(\overrightarrow{x}) \\ g(\overrightarrow{x}) = 0 \end{cases} \qquad \text{si } \nabla g(\overrightarrow{x}) \neq 0$$

**Exemple 1** Nous voulons trouver toutes les extrema de la fonction $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.
Commençons par remarquer que pour $(x, y, z)$ sur notre sphère de rayon 3 :

$$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$$

puisque $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ n'appartient à pas la sphère de rayon 3.
Par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, si un point $(x, y, z)$ appartenant à la sphère est un point d'extremum de $f(x, y, z)$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} (1, -2, 2) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9 \end{cases}$$

Clairement, $\lambda \neq 0$, donc nous pouvons diviser la première équation par $\lambda$ :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2\lambda}, \\ y = -\frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}z \\ y = -z \end{cases}$$

En mettant ceci dans notre contrainte, on obtient :

$$9 = x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}z^2 + z^2 + z^2 = \frac{9}{4}z^2 \implies z^2 = 4 \implies z = \pm 2$$

Ainsi, si $z = 2$, on obtient $x = 1$, $y = -2$ et donc on a le point $(1, -2, 2)$. Si $z = -2$, on obtient le point $(-1, 2, -2)$. Nous pouvons maintenant regarder leur image par $f$ :

$$f(1, -2, 2) = 1 + 4 + 4 = 9, \quad f(-1, 2, -2) = -1 - 4 - 9 = -9$$

Nous devons encore vérifier que ce sont bien des extrema. Cependant, puisque la sphère est un compact et $f$ est continue, nous savons que $f$ atteint son minimum et son maximum. On sait aussi qu'elle est de classe $C^1$, donc les points critiques sont les point stationnaires. Donc, parmi les points stationnaires il existe forcément les points de minimum et de maximum sous la contrainte. Mais, nous n'avons trouvé que deux points, nous savons donc que ce sont notre minimum et maximum.

**Exemple 2** Nous voulons trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = xyz$ sous les contraintes :

$$g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0, \quad g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0$$

Commençons par vérifier que les gradients de $g_1$ et $g_2$ sont linéairement indépendants :

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1), \quad \nabla g_2(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y)$$

Pour savoir s'ils sont linéairement indépendants, nous posons :

$$\nabla g_2(x, y, z) = k \nabla g_1(x, y, z) \implies (y + z = x + z, x + y) = (k, k, k) \implies x = y = z$$

Cependant, nous pouvons voir que $x = y = z$ ne marche pas avec nos contraintes :

$$\begin{cases} g_1(x,x,x) = 3x - 5 = 0 \implies x = \frac{5}{3} \\ g_2(x,x,x) = 3x^2 - 8 = 0 \end{cases}$$

mais $3\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3} \neq 8$.
Nous en déduisons que le théorème des multiplicateurs de Lagrange s'applique, et on obtient les équations :

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = \lambda_1 \overbrace{(1,1,1)}^{\nabla g_1} + \lambda_2 \overbrace{(y+z, x+z, x+y)}^{\nabla g_2} \\ g_1(x,y,z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x,y,z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases}$$

Ceci nous donne le système de 5 équations à 5 inconnues suivant :

$$\begin{cases} yz = \lambda_1 + \lambda_2(y+z) \\ xz = \lambda_1 + \lambda_2(x+z) \\ xy = \lambda_1 + \lambda_2(x+y) \\ x + y + z = 5 \\ xy + yz + xz = 8 \end{cases}$$

On voit que la quatrième équation nous donne $x + y = 5 - z$. Ainsi, en additionnant les deux premières équations :

$$z(x+y) = 2\lambda_1 + \lambda_2(x + y + 2z) \implies z(5-z) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+z)$$

Nous pouvons utiliser la même idée en additionnant la deuxième et la troisième équation, et en additionnant la première et la troisième équation. Ceci nous donne le système :

$$\begin{cases} z(5-z) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+z) \\ x(5-x) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+x) \\ y(5-y) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+y) \end{cases} \implies \begin{cases} z^2 + (\lambda_2 - 5)z + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ x^2 + (\lambda_2 - 5)x + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ y^2 + (\lambda_2 - 5)y + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

Nous savons qu'une équation quadratique a au plus deux solutions différentes. Nous savons déjà que $x = y = z$ n'est pas possible, donc la seule possibilité qui nous arrangerait (qui dirait que des solutions existe) serait qu'une variable est différente des deux autres. Prenons par exemple $x = y \neq z$. Alors, les équations 4 et 5 de notre premier système nous donnent :

$$\begin{cases} 2x + z = 5 \\ x^2 + 2xz = 8 \end{cases} \implies \begin{cases} z = 5 - 2x \\ x^2 + 2x(5-2x) - 8 = 0 \implies -3x^2 + 10x - 8 = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons donc résoudre :

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6} = \frac{10 \pm 2}{6} \implies x_1 = 2, x_2 = \frac{4}{3} \implies z_1 = 1, z_2 = \frac{7}{3}$$

Ceci nous donne 6 points candidats pour un extremum de $f$ sous les contraintes (en considérant aussi $x = z \neq y$ et $y = z \neq x$) :

$$\left\{(2,2,1), (1,2,2), (2,1,2), \left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)\right\}$$

Calculons les valeurs de nos fonctions :

$$f(2,2,1) = f(1,2,2) = f(2,1,2) = xyz\Big|_{(2,2,1)} = 4$$

$$f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27} = 4 + \frac{4}{27}$$

Par un argument similaire à l'exemple précédent, si nous arrivons à démontrer que les contraintes définissent un compact dans $\mathbb{R}^3$, nous pourrons en déduire que les premiers points nous donnent un minimum de $f$ sous les contraintes, et les deuxième nous donnent un maximum de $f$ sous les contraintes. En effet, nous savons déjà que $f$ est continue, ainsi, si les contraintes définissent un compact, cela implique que $f$ atteint son minimum et son maximum, qui sont à des points stationnaires puisqu'elle est de classe $C^1$, qui sont donnés par le théorème des multiplicateurs de Lagrange. Démontrons donc que les contraintes forment un compact. Il est possible de trouver à partir des contraintes que :

$$\frac{1}{2}(x+y)^2 + \frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{2}(y-5)^2 = 17$$

Ceci nous dit que $\frac{1}{2}(x-5)^2 \leq 17$ et $\frac{1}{2}(y-5)^2 \leq 17$, et donc que $x$ et $y$ sont bornées. De plus, puisque $z = 5 - x - y$, cette variable est aussi bornée. Ceci nous permet en effet de conclure que notre ensemble est en effet compact.

# Chapitre 6

# Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables

## 6.1 Intégrale sur un pavé fermé

**Définition : Pavé** Un **pavé fermé** est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est le produit Cartésien de $n$ intervalles fermés bornés :

$$P = [a_i, b_i] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n], \quad a_i < b_i \ \forall i = 1, \ldots, n$$

Nous notons le **pavé ouvert** par :

$$\mathring{P} = ]a_1, b_1[ \times \ldots \times ]a_n b_n[$$

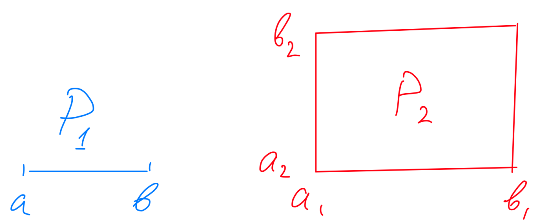
*Exemple* Un pavé de dimension 1 est donné par :

$$P_1 = [a, b]$$

c'est un intervalle fermé borné.
Un pavé de dimension 2 est donné par :

$$P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$$

Nous pouvons les représenter géométriquement :




**Définition : Volume** Le **volume** d'un pavé fermé est défini par :

$$|P| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)$$

*Exemple* En reprenant nos deux pavés ci-dessus, nous avons :

$$|P_1| = b - a, \quad |P_2| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

**Définition : Subdivision** Soit $\sigma_j$ une subdivision de $[a_j, b_j]$ (comme nous l'avions définie en Analyse 1), où $a_j < b_j$. Notez que chaque subdivision n'a pas besoin d'être régulière. Nous avons donc :

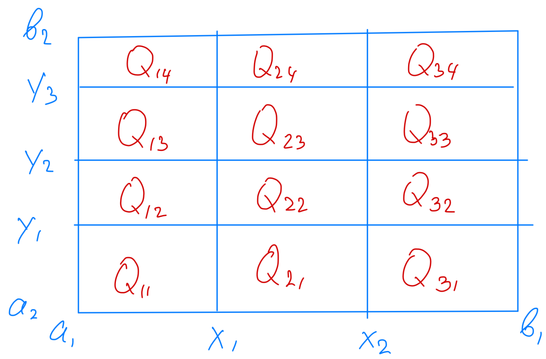
$$\sigma_j = \left\{a_j = x_{j,0} < x_{j,1} < \ldots < x_{j,n_j} < b_j\right\}$$

Alors, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ est appelée une **subdivision** de $P$.
Nous notons $D(\sigma)$ la collection des pavés engendrés par la subdivision.

*Exemple* Considérons $P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$. Alors, nous pourrions prendre :

$$\sigma = \{\{a, x_1, x_2, b\}, \{a_2, y_1, y_2, y_3, b_2\}\}$$

Nous pouvons représenter cela graphiquement




La subdivision nous donne :

$$P_2 = \bigcup_{Q \in D(\sigma)} Q = \bigcup_{\substack{i=1,\ldots,3 \\ j=1,\ldots,4}} Q_{ij}$$

Nous pouvons aussi calculer le volume du pavé :

$$|P_2| = \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q| = \sum_{\substack{i=1,\ldots,3 \\ j=1,\ldots,4}} |Q_{ij}|$$

**Définition : Sommes de Darboux** Soit $P$ un pavé fermé et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $P$. Alors, on définit les sommes de Darboux de $f$ sur $P$.
Soit $D(\sigma)$ une collection de pavés fermés engendrée par la subdivision $\sigma$. Alors :

$$\underline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q)|Q|, \quad \text{où } m(Q) = \inf_{\vec{x} \in Q} \left(f(\vec{x})\right)$$

$$\overline{S}_\sigma(f) \overset{\text{déf}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q)|Q|, \quad \text{où } M(Q) = \sup_{\vec{x} \in Q} \left(f(\vec{x})\right)$$

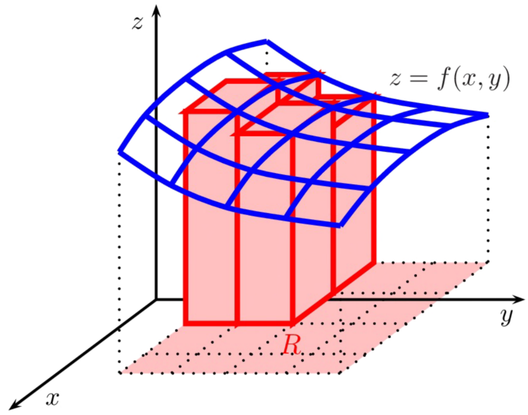
Notez que nous ne savons pas s'il existe un minimum et un maximum, puisque la fonction n'est pas supposée continue. Cependant, puisqu'elle est bornée, nous savons qu'il existe un infimum et un suprémum. Aussi, nous remarquons que plus nous rajoutons de points, plus $\underline{S}_\sigma(f)$ augmente et plus $\overline{S}_\sigma(f)$ diminue, ce qui nous amène aux définitions suivantes.
La **somme de Darboux inférieure** est définie par :

$$\underline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \sup\{\underline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P\}$$

La **somme de Darboux supérieure** est définie par :

$$\overline{S}(f) \overset{\text{déf}}{=} \inf\left\{\overline{S}_\sigma(f) : \sigma \text{ est une subdivision de } P\right\}$$

*Exemple* La somme de Darboux inférieure $\underline{S}_\sigma$ associé à une subdivision donnée est la somme des parallélépipèdes rouges sur l'image suivante :




*Observations* Nous remarquons que, toujours $\underline{S}(f) \leq \overline{S}(f)$.

**Définition : Fonction intégrable** Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée. $f$ est **intégrable** sur $P$ si et seulement si :

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

Dans ce cas, **l'intégrale de $f$ sur $P$** est définie par :

$$\int_P f(\vec{x})d\vec{x} = \int \!\!\cdots\!\! \int_P f(x_1, \ldots, x_n)dx_1 \ldots dx_n \overset{\text{déf}}{=} \underline{S}(f) = \overline{S}(f)$$

Notez que le deuxième terme n'est qu'une notation, donc nous ne pouvons par échanger les intégrales par exemples (pour l'instant). Nous verrons avec le théorème de Fubini que cette notation est, en fait, très cohérente.

*Remarque mathématique* Quand nous définissons un objet en mathématiques, il faut toujours donner un exemple immédiatement après, car nous pourrions avoir défini un objet qui n'existe pas. Il est mieux que cet exemple soit trivial.

**Exemple** Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction constante, i.e. $f(\vec{x}) = C \in \mathbb{R}$. Clairement, $f$ est bornée sur $P$. Nous allons montrer qu'elle est aussi intégrable sur $P$.
Soit $\sigma$ une division de $P$. Alors, nous avons :

$$\underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \underbrace{\inf_Q(f)}_{=C}|Q| = C \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q| = C|P|$$

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \underbrace{\sup_Q(f)}_{=C}|Q| = C \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q| = C|P|$$

pour n'importe quelle subdivision $\sigma$.
Donc, nous avons :

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f) = C|P| = \int_P C d\vec{x}$$

Nous avons bien démontré que $f$ était intégrable.

*Observation*

En particulier, si $C = 1$ :

$$\int_P d\vec{x} = \int \cdots \int_P dx_1 \ldots dx_n = |P|$$

Ceci nous donne donc le volume de $P$ :

$$P = [a, b] \implies |P| = \int_a^b 1dx = b - a$$

$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \implies \iint_P 1dxdy = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$$

**Théorème** Toute fonction continue est intégrable sur un pavé fermé.

*Idée de preuve (assez complète)* Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.

Pour commencer, puisque $P$ est un sous-ensemble compact et $f$ est une fonction continue, elle atteint son minimum et son maximum, et donc, en particulier, $f$ est bornée sur $P$.

Considérons maintenant l'intégrabilité, nous voulons montrer $\underline{S}(f) = \overline{S}(f)$.

Soit $\varepsilon > 0$ *("l'Analyse sérieuse commence si on commence à parler d'epsilons"* Prof. Lachowska). Puisque $f$ est continue en chaque point de $P$, nous savons que pour tout $\vec{x_0} \in P$, il existe $\delta_{\vec{x_0}}$ tel que :

$$\|\vec{x_0} - \vec{x}\| \leq \delta_{\vec{x_0}} \implies |f(\vec{x}) - f(\vec{x_0})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Notez que nous pouvons prendre $\frac{\varepsilon}{2}$ car cette proposition est vraie pour toute constante positive.

Nous considérons maintenant le recouvrement de $P$ par les boules ouvertes $B(\vec{x_0}, \delta_{\vec{x_0}})$. C'est bien un recouvrement car chaque point de $P$ est contenu dans une boule. Il y a beaucoup d'intersections, mais nous avons bien :

$$P \subset \bigcup_{\vec{x_0} \in P} B(\vec{x_0}, \delta_{\vec{x_0}})$$

Par le théorème de Heine-Borel-Lebesgue, il existe un sous-recouvrement fini :

$$P \subset \bigcup_{\vec{x_j} \in P} B\left(\vec{x_j}, \delta_{\vec{x_j}}\right)$$

Or, si $\vec{x_1}, \vec{x_2} \in B(\vec{x_j}, \delta_j)$, nous avons :

$$\begin{aligned} |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_2})| &\overset{\dagger}{\leq} |f(\vec{x_1}) - f(\vec{x_j})| + |f(\vec{x_j}) - f(\vec{x_2})| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

où l'inégalité † est l'inégalité triangulaire.

Il existe une subdivision de $P$ qui correspond à ce recouvrement fini (cette affirmation est la partie de la preuve où nous ne donnons pas l'argument complet). Ainsi, soit $\sigma$ une telle subdivision. Puisque, sur chaque sous-pavé, le minimum et le maximum sont dans la boule ouverte, nous pouvons utiliser notre inégalité ci-dessus, ce qui nous donne :

$$\max_Q f - \min_Q f \leq \varepsilon, \quad \forall Q \in D(\sigma)$$

Nous trouvons donc que :

$$\overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \left(\max_Q f - \min_Q f\right)|Q| \leq \varepsilon \sum_{Q \in D(\sigma)} |Q| = \varepsilon |P|$$

Mais, nous savons que $\overline{S}_\sigma(f) \geq \overline{S}(f)$ et $\underline{S}_\sigma(f) \leq \underline{S}(f)$, ce qui nous dit que :

$$0 \leq \overline{S}(f) - \underline{S}(f) \leq \overline{S}_\sigma(f) - \underline{S}_\sigma(f) \leq \varepsilon |P|$$

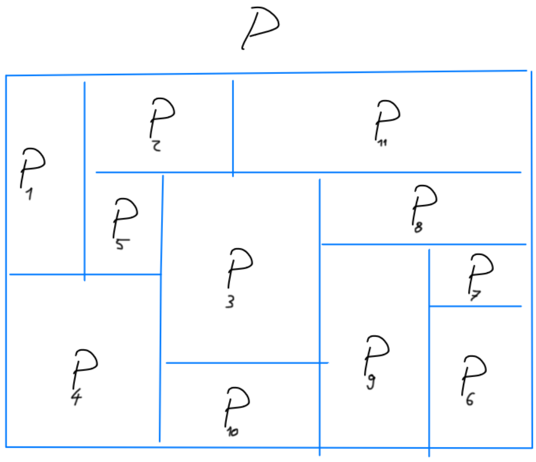
Cependant, c'est vrai pour tout $\varepsilon > 0$, et le seul nombre qui est tel que $0 \leq x < \alpha$ pour tout $\alpha > 0$ est $x = 0$, donc nous avons bien trouvé que :

$$\overline{S}(f) - \underline{S}(f) = 0 \iff \overline{S}(f) = \underline{S}(f)$$

**Propriétés de l'intégrale**

*Propriété 1 : Additivité*

Soit $P$ un pavé fermé, et $\{P_i\}_{i \in I}$ une famille dénombrable de pavés fermés disjoints (l'intersection entre l'intérieur de n'importe quel deux pavé est vide, $\mathring{P}_i \cap \mathring{P}_j = \varnothing$ pour $i \neq j$) telle que $P = \bigcup_{i \in I} P_i$. Par exemple, cela pourrait ressembler à :




Alors, pour toute fonction continue $f : P \mapsto \mathbb{R}$, nous avons :

$$\int_P f(\vec{x}) d\vec{x} = \sum_{i \in I} \int_{P_i} f(\vec{x}) d\vec{x}$$

*Propriété 2 : Linéarité*

Soit $P$ un pavé fermé, et soient $f, g : P \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Alors, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ :

$$\int_P (\alpha f(\vec{x}) + \beta g(\vec{x})) d\vec{x} = \alpha \int_P f(\vec{x}) d\vec{x} + \beta \int_P g(\vec{x}) d\vec{x}$$

*Propriété 3*

Soit $P$ un pavé fermé, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée, intégrable sur $P$, et telle que :

$$|f(\vec{x})| \leq K \in \mathbb{R}_{\geq 0} \iff -K \leq f(\vec{x}) \leq K, \quad \forall \vec{x} \in P$$

Alors :

$$-K|P| \leq \int_P f(\vec{x}) d\vec{x} \leq K|P|$$

Les deux premières propriétés découlent directement de la définition des sommes de Darboux.

**Définition : Volume** Soit $P \subset \mathbb{R}^2$ un pavé fermé de dimension 2, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}_+$ une fonction intégrable. Alors, le **volume** de l'ensemble sous la surface $z = f(x, y) \geq 0$ est défini par :

$$V \overset{\text{déf}}{=} \iint_P f(x, y)dxdy$$

En d'autres mots, $V$ est le volume du sous-ensemble entre $z = 0$ et $z = f(x, y) \geq 0$ au dessus du pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^2$.

**Théorème de Fubini** Soit $P = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors, $f$ est intégrable sur $P$, et on a :

$$\int_P f(\vec{x})d\vec{x} = \int_{a_n}^{b_n}\left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}}\cdots\left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1\right)\cdots dx_{n-1}\right)dx_n$$

Ceci marche pour n'importe quel choix de l'ordre d'intégration.

*Reformulation* En d'autres mots, nous pouvons calculer :

$$g_1(x_2, \ldots, x_n) = \int_{a_1}^{b_1} f(x_1, \ldots, x_n)dx_1$$

où $x_1$ est une variable d'intégration, et $x_2, \ldots, x_n$ sont des paramètres. Nous pouvons ensuite prendre :

$$g_2(x_3, \ldots, x_n) = \int_{a_2}^{b_2} g_1(x_2, \ldots, x_n)dx_2$$

Nous pouvons continuer ainsi de suite, jusqu'à calculer :

$$\int_{a_n}^{b_n} g_{n-1}(x_n)dx_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

*Remarque* Ce théorème n'est uniquement valide sur un pavé fermé, nous verrons ensuite une autre version de ce théorème pour d'autres ensembles.

**Cas $n = 2$** Soit $P = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ un pavé fermé de dimension 2, et soit $f : P \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors, nous avons :

$$\int_c^d\left(\int_a^b f(x, y)dx\right)dy = \int_a^b\left(\int_c^d f(x, y)dy\right)dx = \iint_P f(x, y)dxdy$$

*Idée de preuve* Nous pouvons trouver une subdivision de $P$ assez fine telle que $P = \bigcup_{i,j} P_{i,j}$ et $f(x, y) \approx C_{i,j} \in \mathbb{R}$ sur $P_{ij}$ (en d'autres mots, $f$ est presque constante sur chaque subdivision).

Dans ce cas, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy &\overset{\text{add.}}{=} \sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j}\left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)dx\right)dy \\ &\overset{\text{lin.}}{=} \sum_{i,j}\int_{y_{j-1}}^{y_j}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x,y)dxdy \\ &\approx \sum_{i,j} C_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \\ &= \sum_{i,j} C_{ij}(y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) \\ &\approx \sum_{i,j}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)dy\right)dx \\ &= \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$

Mercredi 18 mai 2022 — **Cours 23 : Fubini on steroids**

**Exemple** Nous voulons calculer le volume du sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : 0\leq x\leq 4, 0\leq y\leq 3, 0\leq z\leq (1+3x+x\sin(xy))\right\}$$

Nous remarquons que $f(x,y) = 1 + 3x + x\sin(xy)$ est continue, et que $f(x) > 0$ sur cet intervalle. Ainsi, nous pouvons utiliser le théorème de Fubini sur le pavé fermé $P = [0,4]\times[0,3]$. Pour commencer, utilisons la linéarité et l'additivité de l'intégrale :

$$V = \iint_P (1+3x+x\sin(xy))dxdy = \iint_P 1dxdy + 3\iint_P xdxdy + \iint_P x\sin(xy)dxdy$$

La première intégrale est le volume du pavé fermé, qui est $(4-0)(3-0) = 12$. Regardons maintenant la deuxième intégrale. Nous pouvons choisir l'ordre des variables, et il est souvent mieux d'utiliser la variable "qui participe le moins", donc commençons par $y$ :

$$3\iint_P xdxdy = 3\int_0^4\left(\int_0^3 xdy\right)dx = 3\int_0^4 xy\Big|_{y=0}^{y=3}dx = 3\int_0^4 3xdx = \frac{9}{2}x^2\Big|_0^4 = 72$$

Pour l'exemple, calculons cette même intégrale en intégrant d'abord par $x$ :

$$3\iint_P xdxdy = \int_0^3\left(\int_0^4 3xdx\right)dy = \int_0^3\left(\frac{3}{2}x^2\Big|_{x=0}^{x=4}\right)dy = \int_0^3 24dy = 24y\Big|_0^3 = 72$$

comme attendu.
Calculons maintenant notre troisième intégrale, en commençant par intégrer par $y$ puisqu'elle est plus simple :

$$\iint_P x\sin(xy)dxdy = \int_0^4\left(\int_0^3 x\sin(xy)dy\right)dx$$

Prenons maintenant le changement de variable $u(y) = xy$, ce qui nous donne :

$$\int_0^4\left(\int_0^3 \sin(u)du\right)dx = \int_0^4 -\cos(xy)\Big|_0^3 dx = \int_0^4(-\cos(3x)+1)dx$$

Nous trouvons donc finalement que notre troisième intégrale est égale à :

$$x - \frac{1}{3}\sin(3x)\Big|_0^4 = 4 - \frac{1}{3}\sin(12)$$

Considérons encore cette troisième intégrale, mais en prenant un autre ordre d'intégration :

$$\iint_P x\sin(xy)dxdy = \int_0^3 \left(\int_0^4 x\sin(xy)dx\right)dy$$

Calculons l'intégrale intérieure :

$$\int_0^4 x\sin(xy)dx = -\frac{x}{y}\cos(xy)\Big|_0^4 + \frac{1}{y}\int_0^4 \cos(xy)dx = -\frac{x}{y}\cos(xy)\Big|_{x=0}^{x=4} + \frac{1}{y}\frac{\sin(xy)}{y}\Big|_{x=0}^{x=4}$$

Ce qui est égal à :

$$-\frac{4}{y}\cos(4y) + \frac{1}{y^2}\sin(4y)$$

Nous voulons intégrer ce résultat entre 0 et 3, donc regardons sa limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{y\to 0}\frac{\sin(4y)-4y\cos(4y)}{y^2} &= \lim_{y\to 0}\frac{4y-\frac{(4y)^3}{6}+\ldots-4y\left(1-\frac{1}{2}(4y)^2+\ldots\right)}{y^2} \\
&= \lim_{y\to 0}\frac{-\frac{(4y)^3}{6}+32y^3}{y^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

Calculons finalement notre intégrale extérieure (qui, malheureusement, ne peut pas être séparée en deux intégrales, puisque celles-ci ne s'expriment pas en fonctions élémentaires) :

$$\begin{aligned}
&\int_0^3 \left(-\frac{4}{y}\cos(4y) + \frac{1}{y^2}\sin(4y)\right)dy \\
=& \int_0^3 \frac{\sin(4y)-4y\cos(xy)}{y^2}dy \\
=& \int_0^3 (4y\cos(4y)-\sin(4y))d\left(\frac{1}{y}\right) \\
=& -\frac{\sin(4y)}{y} + 4\cos(4y)\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{4\cos(4y)-16y\sin(4y)-4\cos(4y)}{y}dy \\
=& -\frac{\sin(12)}{3} + 4\cos(12) + \underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{\sin(4y)}{y}}_{=4} -4 + \int_0^3 16\sin(4y)dy \\
=& -\frac{\sin(12)}{3} + 4\cos(12) - 4\cos(4y)\Big|_0^3 \\
=& -\frac{1}{3}\sin(12) + 4\cos(12) - 4\cos(12) + 4 \\
=& \, 4 - \frac{1}{3}\sin(12)
\end{aligned}$$

comme attendu. Cependant, clairement, le choix prudent de l'ordre d'intégration est important, car nous sommes allé beaucoup plus rapidement en intégrant par $y$ d'abord.

Nous trouvons donc finalement que notre volume est donné par :

$$V = 12 + 72 + 4 - \frac{1}{3}\sin(12) = 88 - \frac{1}{3}\sin(12)$$

## 6.2 Intégrales sur un ensemble borné

**Définition : Fonction intégrable sur un ensemble borné quelconque**

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble borné. Clairement, puisqu'il est borné, il existe un pavé fermé tel que $E \subset P \subset \mathbb{R}^n$. Soit aussi $f : E \mapsto \mathbb{R}$ une fonction bornée sur $E$. Posons maintenant la fonction suivante :

$$\hat{f}(\vec{x}) = \begin{cases} f(\vec{x}), & \text{si } \vec{x} \in E \\ 0, & \text{si } \vec{x} \in P \setminus E \end{cases}$$

La fonction $f$ est **intégrable** sur $E$, si $\hat{f}$ est intégrable sur $P$. Dans ce cas, on pose :

$$\int_E f(\vec{x}) d\vec{x} \overset{\text{déf}}{=} \int_P \hat{f}(\vec{x}) d\vec{x}$$

*Remarque* La définition ne dépend pas du choix du pavé fermé autour de notre sous-ensemble $E$.

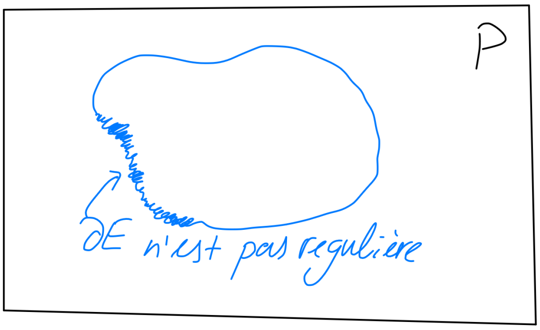
**Définition : Frontière régulière**

Une frontière est dite régulière (de mesure nulle) si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble de pavé fermés $\{q_1, q_2, \ldots\}$ tels que :

$$\sum_{i \in I} |q_i| < \varepsilon \quad \text{et} \quad \partial E \subset \bigcup_{i \in I} q_i$$

*Intuition* En gros, cela veut dire que la frontière n'a pas d'aire.

Voici un exemple d'une frontière qui n'est pas régulière :




De manière similaire, la courbe d'Osgood n'est pas régulière (je vous laisser aller jeter un œil sur Wikipédia, *Osgood Curve* en anglais).

**Théorème**

Si $f : E \mapsto \mathbb{R}$ est bornée sur $E$, continue sur l'intérieur $\mathring{E}$, et la frontière $\partial E$ est assez régulière, alors $f(\vec{x})$ est intégrable sur $E$.

**Théorème de Fubini pour les domaines à frontière régulière**

1. Soient :
   - $[a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, où $a < b$.
   - $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pour tout $x \in \,]a, b[$.
   - $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\}$ (appelé le domaine à frontière régulière de type 1).

   Alors, pour tout fonction continue $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$, nous avons :

   $$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$

   Le choix du sens des variables d'intégration *ne peut pas* se faire arbitrairement.
2. Soient :
   - $[c, d] \subset \mathbb{R}$ un intervalle, où $c < d$.
   - $\psi_1, \psi_2 : [c, d] \mapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues telles que $\psi_1(y) < \psi_2(y)$ pour tout $y \in \,]c, d[$.

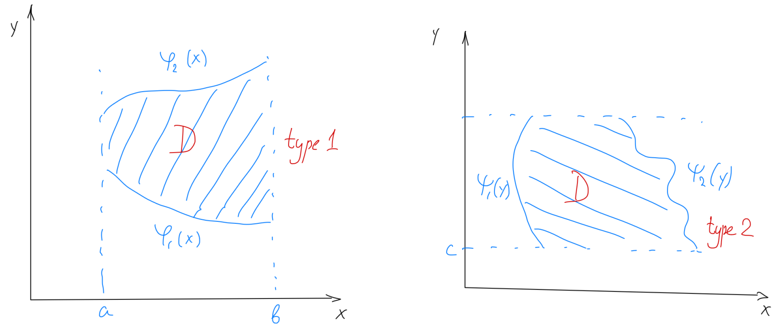
- $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \psi_1(y) < x < \psi_2(y)\}$ (appelé le domaine à frontière régulière de type 2).

Alors, pour toute fonction continue $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$, nous avons :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_c^d \left( \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)dx \right) dy$$

Le choix du sens des variables d'intégration *ne peut pas* se faire arbitrairement.

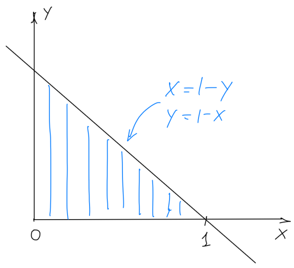
*Exemple* Voici un exemple de type 1 (à gauche) et un exemple de type 2 (à droite) :




**Exemple** Soit la fonction $f(x, y) = x^2y$ et le domaine suivant :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 1 - x\}$$

Ceci nous donne le graphe suivant :




Nous pouvons l'interpréter comme un domaine de type 1, donc le théorème de Fubini nous dit que :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} x^2ydy \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2(1 - x^2)dx$$

Ce qui est égal à :

$$\frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 - 2x^3 + x^4)dx = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{10}x^5 \Big|_0^1 = \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} = \frac{10 - 15 + 6}{60} = \frac{1}{60}$$

Cependant, nous pouvons aussi réécrire notre domaine de manière à ce qu'il soit de type 2 :

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 1, 0 < x < 1 - y\}$$

Ainsi, le théorème de Fubini nous dit que :

$$\iint_D f(x, y)dxdy = \int_0^1 \left( \int_0^{1-y} x^2ydx \right) dy = \int_0^1 \frac{1}{3}(1 - y)^3ydy$$

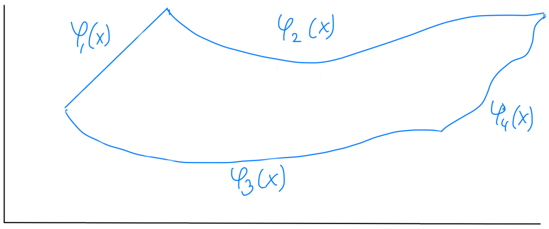
Ce qui est égal à :

$$\frac{1}{3} \int_0^1 (y - 3y^2 + 3y^3 - y^4)dy = \frac{1}{6}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{15}y^5 \Big|_0^1 = \frac{10 - 20 + 15 - 4}{60} = \frac{1}{60}$$

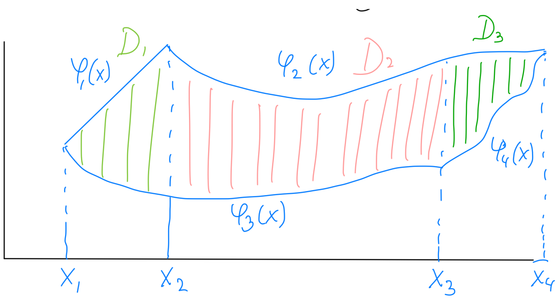
comme attendu.

Parfois, il est donc possible de changer notre domaine d'un type à l'autre, mais le choix est souvent forcé.

**Remarque** Regardons le domaine $D$ suivant, qui n'est malheureusement ni de type 1 ni de type 2 :




Nous pouvons le séparer en trois sous-ensembles de type 1 :

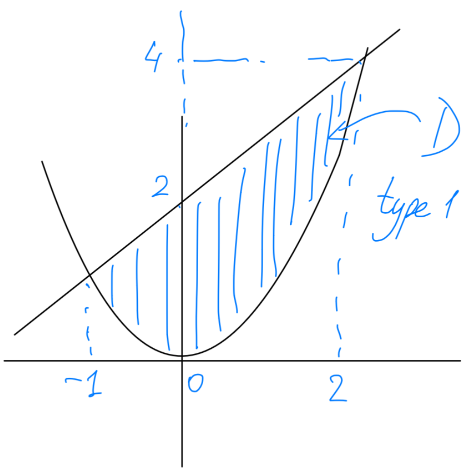



De manière générale, il est possible de diviser le domaine en réunion de domaines de type 1 ou 2, et nous pouvons ensuite utiliser l'additivité de l'intégrale. Ici, nous aurions, pour une fonction $f : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$ continue :

$$\begin{aligned}&\iint_D f(x,y)dxdy\\ &= \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy + \iint_{D_3} f(x,y)dxdy\\ &= \int_{x_1}^{x_2}\left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{x_2}^{x_3}\left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx + \int_{x_3}^{x_4}\left(\int_{\varphi_4(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right)dx\end{aligned}$$

Il peut arriver qu'il y ait certains sous-ensembles qui soient de type 1, et certains de type 2.

**Exemple 1** Nous voulons calculer l'aire du domaine entre $y = x^2$ et $y = x+2$, quand $-1 \leq x \leq 2$. Il est souvent une bonne idée de se faire un dessin pour comprendre ce qu'on nous demande :



Il est plus simple de considérer ce domaine comme un ensemble de type 1 :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq x + 2\right\}$$

Nous cherchons l'aire, donc :

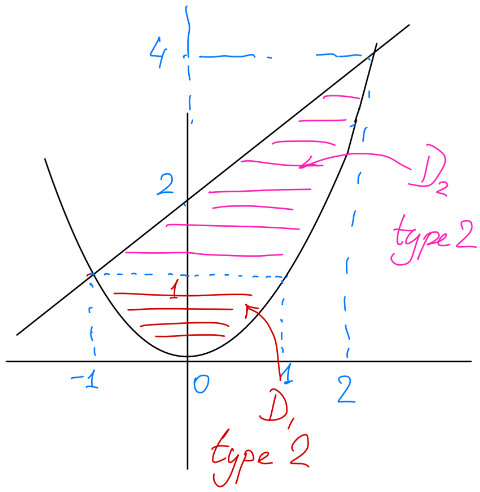
$$\iint_D 1dxdy = \int_{-1}^{2} \left( \int_{x^2}^{x+2} dy \right) = \int_{-1}^{2} (x + 2 - x^2)dx = \frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{1}{3}x^3 \Big|_{-1}^{2}$$

Ce qui est égal à :

$$2 + 4 - \frac{8}{3} - \frac{1}{2} + 2 - \frac{1}{3} = 8 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$$

Cependant, nous aurions aussi pu considérer notre domaine comme une réunion de deux domaines de type 2 :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1, -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq y \leq 4, y - 2 \leq x \leq \sqrt{y}\right\}$$




Nous avons alors :

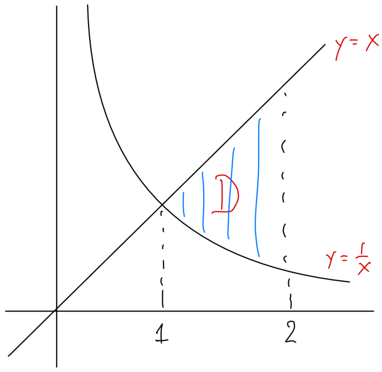
$$\begin{aligned}
\iint_D 1dxdy &= \iint_{D_1} 1dxdy + \iint_{D_2} 1dxdy \\
&= \int_0^1 \left( \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} 1dx \right) dy + \int_1^4 \left( \int_{y-2}^{\sqrt{y}} 1dx \right) dy \\
&= \int_0^1 2\sqrt{y}dy + \int_1^4 (\sqrt{y} - y + 2)dy \\
&= 2 \cdot \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 + \frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} y^2 + 2y \Big|_1^4 \\
&= \frac{4}{3} + \frac{16}{3} - 8 + 8 - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{9}{2}
\end{aligned}$$

Lundi 23 mai 2022 — **Cours 24 : Changements de variables**

**Exemple 2** Nous voulons calculer l'intégrale de $f(x, y) = \frac{x^2}{y^2}$ sur le domaine suivant :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, \frac{1}{x} < y < x\right\}$$

Nous pouvons voir notre ensemble comme un domaine régulier de type 1 :



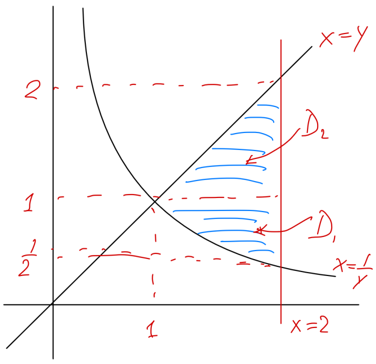

Clairement, puisque $(x, 0) \notin D$, notre fonction est continue et donc nous pouvons appliquer notre théorème :

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_1^2 \left(\int_{\frac{1}{x}}^{x} \frac{x^2}{y^2} dy\right) dx = \int_1^2 \left(\frac{-x^2}{y}\bigg|_{y=\frac{1}{x}}^{y=x}\right) dx = \int_1^2 \left(-x + x^3\right) dx$$

Ce qui est égal à :

$$-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4\bigg|_1^2 = -2 + \frac{1}{2} + 4 - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Nous pouvons maintenant aussi considérer notre ensemble comme deux domaines réguliers de type 2 :




Appliquons notre théorème sur cette autre vision du même ensemble :

$$\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left(\int_{\frac{1}{y}}^{2} \frac{x^2}{y^2} dx\right) dy + \int_1^2 \left(\int_y^2 \frac{x^2}{y^2} dx\right) dy = \ldots = \frac{9}{4}$$

Ici, cela ne change pas grand chose de savoir interpréter notre domaine de deux manières différentes, mais, même si ce n'est pas toujours possible, cela permet parfois de grandement simplifier notre intégrale

**Théorème de Fubini pour les intégrales triples**

Soient :

- Un intervalle $[a, b]$, où $a < b$.
- Deux fonctions $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que $\varphi_1(x) < \varphi_2(x)$ pour tout $x \in ]a, b[$
- L'ensemble défini par :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\right\}$$

- Deux fonctions $G, H : \overline{D} \mapsto \mathbb{R}$ continues telles que $G(x, y) < H(x, y)$ pour tout $(x, y) \in D$.
- L'ensemble défini par :

$$E = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D : G(x, y) < z < H(x, y)\right\}$$

- Une fonction $f : \overline{E} \mapsto \mathbb{R}$.

Alors, $f$ est intégrable sur $E$, et on a :

$$\int_E f(x,y,z)dxdydz = \int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx$$

Nous ne pouvons pas choisir l'ordre d'intégration.

*Notation* Pour simplifier la notation d'intégrales multiples, nous pouvons écrire :

$$\int_a^b \left( \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \left( \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz \right) dy \right) dx \overset{\text{not.}}{=} \int_a^b dx \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} dy \int_{G(x,y)}^{H(x,y)} f(x,y,z)dz$$

*Remarque* Si nous voulions formuler ce théorème de la même manière que pour le théorème pour les intégrales de deux variables, nous aurions besoin de définir 6 types différents de domaines. En d'autres mots, le nom des variables dans le théorème n'est pas important (il serait donc valide pour un $D = \left\{(z,x) \in \mathbb{R}^2 : a < z < b, \varphi_1(z) < x < \varphi_2(z)\right\}$ si tout le reste est cohérent avec).

**Exemple** Nous voulons intégrer $f(x,y,z) = e^{x^3}$ sur le domaine suivant :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < z < y < x < 1\right\}$$

Nous remarquons que $f(x,y,z)$ n'a pas directement de primitive selon $x$, donc nous voudrons intégrer selon cette variable en dernier. Nous faisons ensuite un choix arbitraire pour l'ordre en $y$ et $z$, afin de réécrire notre domaine comme :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < y < x, 0 < z < y\right\}$$

Calculons maintenant notre intégrale :

$$\begin{aligned}
\int_E e^{x^3} dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y e^{x^3} dz = \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(z e^{x^3}\right)\Big|_{z=0}^{z=y} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x dy \left(y e^{x^3}\right) = \int_0^1 dx \frac{1}{2} y^2 e^{x^3}\Big|_{y=0}^{y=x} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} d(x^3) \\
&= \frac{1}{6} e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{6}
\end{aligned}$$

Notez qu'il est absolument nécessaire d'intégrer selon $x$ en dernier (comme mentionné ci-dessus, $e^{x^3}$ n'a pas de primitive exprimée en fonctions élémentaires). Cependant, nous pouvons échanger l'ordre d'intégration entre $y$ et $z$ :

$$E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < x < 1, 0 < z < x, z < y < x\right\}$$

Ceci nous donne ainsi que :

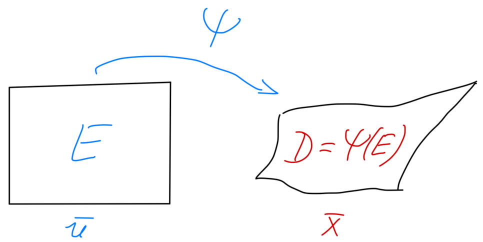
$$\begin{aligned}
\int_E e^{x^3} dxdydz &= \int_0^1 dx \int_0^x dz \int_z^x e^{x^3} dy = \int_0^1 dx \int_0^x dz y e^{x^3}\Big|_{y=z}^{y=x} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^x dz (x-z) e^{x^3} = \int_0^1 dx \left(xz - \frac{1}{2} z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=x} \\
&= \int_0^1 dx \left(x^2 - \frac{1}{2} x^2\right) e^{x^3} = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^3} dx \\
&= \frac{1}{6} \int_0^1 e^{x^3} d(x^3) \frac{1}{6} e^{x^3}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{6}
\end{aligned}$$

comme attendu.

## 6.3 Changement de variables dans une intégrale multiple

**Théorème** Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble tel que $\overline{E}$ est compact. Soit aussi $\psi : E \mapsto \mathbb{R}^n$ telle que $\psi \in C^1(E)$ et $\psi : E \mapsto \psi(E)$ est bijective (ce qui est équivalent à $J_\psi(\overrightarrow{u})$ est inversible pour tout $\overrightarrow{u} \in E$, comme vu précédemment). Soit finalement $f : \overline{D} \mapsto \overline{\psi(E)} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors :

$$\int_D f(\overrightarrow{x}) d\overrightarrow{x} = \int_E f(\psi(\overrightarrow{u})) \left|\det(J_\psi(\overrightarrow{u}))\right| d\overrightarrow{u}$$




**Exemple 1** Nous voulons intégrer $f(x, y) = 1 = f(u, v)$ en utilisant un changement de variable (clairement non nécessaire, mais c'est pour l'exemple). Soient les deux sous-ensembles suivants :

$$E = [0, 1]^2, \quad D = \psi(E) = [0, 2]^2$$

Prenons la fonction de changement de variable suivante :

$$\psi(u, v) = \begin{pmatrix} 2u \\ 2v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad J_\psi = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \implies |\det(J_\psi)| = 4, \ \forall (u, v) \in E$$

Calculons finalement notre intégrale :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_E 1 |\det J_\psi| du dv = \int_0^1 du \int_0^1 dv 1 \cdot 4 = 4(1-0)(1-0) = 4$$

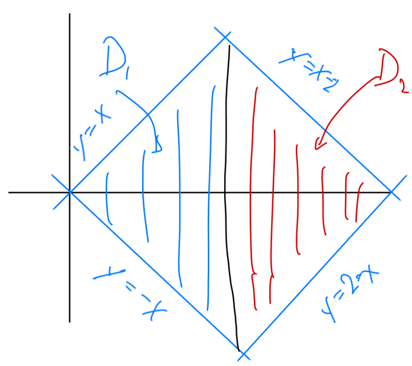
Ce qui est cohérent avec le résultat que nous aurions obtenu sans changement de variable :

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_0^2 dx \int_0^2 1 dy = 1(2-0)(2-0) = 4$$

**Exemple 2** Nous voulons intégrer la fonction $f(x, y) = x^2$ sur le domaine suivant :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, -x < y < x\right\} \cup \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x < 2, x - 2 < y < 2 - x\right\}$$

Nous pouvons dessiner notre domaine $D = D_1 \cup D_2$ de la manière suivante :



Clairement, $D_1$ et $D_2$ sont des domaines réguliers de type 1. Ainsi, utilisons le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)dxdy &= \int_0^1 dx \int_{-x}^{x} x^2 dy + \int_1^2 dx \int_{x-2}^{2-x} x^2 dy \\ &= \int_0^1 dx\big(yx^2\big)\Big|_{y=-x}^{y=x} + \int_1^2 dx\big(yx^2\big)\Big|_{y=x-2}^{y=2-x} \\ &= \int_0^1 2x^3 dx + \int_1^2 (4-2x)x^2 dx \\ &= \frac{1}{2}x^4\Big|_0^1 + \frac{4}{3}x^3\Big|_1^2 - \frac{1}{2}x^4\Big|_1^2 \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Cependant, il est plus simple de voir notre ensemble comme un carré, que nous pouvons tourner. Ainsi, nous pouvons introduire les variables suivantes :

$$\begin{cases} u = x - y \\ v = x + y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases} \implies 0 < u < 2, 0 < v < 2$$

En d'autres mots, nous avons trouvé :

$$\psi(u,v) = (x,y) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$$

Calculons le déterminant de son Jacobien :

$$J_\psi(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \implies \det(J_\psi(u,v)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \neq 0$$

donc $\psi : E \mapsto D$ est bien bijective.
Nous pouvons maintenant calculer notre intégrale :

$$\begin{aligned}\iint_D x^2 dxdy = \iint_E \frac{1}{4}(u+v)^2 |\det(J_\psi(u,v))| dudv &= \int_0^2 du \int_0^2 dv \cdot \frac{1}{8}(u+v)^2 \\ &= \frac{1}{24}\int_0^2 du(u+v)^3\Big|_{v=0}^{v=2} = \frac{1}{24}\int_0^2 \Big((u+2)^3 - u^3\Big)du \\ &= \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{4}\Big((u+2)^4 - u^4\Big)\Big|_0^2 = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\big(4^4 - 2^4 - 2^4 + 0\big) \\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{16}\big(16(2^4-2)\big) = \frac{1}{6}\cdot 14 = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

comme attendu.

**Application : Changement de variables polaire**

Par définition, le changement de variable polaire nous donne :

$$\psi : \mathbb{R}_+ \times [0, 2\pi[ \mapsto \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad \psi(r,\varphi) = (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi))$$

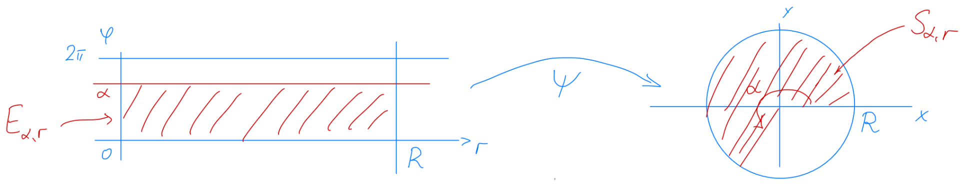
Calculons son déterminant Jacobien :

$$J_\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix} \implies \det(J_\psi(r,\varphi)) = r\big(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\big) = r$$

Elle est donc bien bijective lorsque $r \neq 0$.
Si nous avons un domaine circulaire dans $\mathbb{R}^2$, il est souvent une bonne idée de faire un changement de variable polaire.

**Exemple 1**

Nous voulons calculer l'aire du secteur circulaire $S_{\alpha,r}$ d'angle $\alpha$ et rayon $R$, où $0 < \alpha \leq 2\pi$ et $R > 0$ :




Soit le domaine suivant :

$$E_{\alpha,R} = \{(r,\varphi) : 0 < r < R, 0 < \varphi < \alpha\}$$

Ainsi, l'aire est donnée par :

$$\begin{aligned} A_{\alpha,R} &= \iint_{S_{\alpha,R}} dxdy = \iint_{E_{\alpha,r}} 1|\det(J_\psi)|drd\varphi = \int_0^\alpha d\varphi \int_0^R rdr \\ &= \int_0^\alpha d\varphi \cdot \frac{1}{2}r^2\Big|_0^R = \frac{1}{2}R^2 \int_0^\alpha d\varphi = \frac{1}{2}R^2\alpha \end{aligned}$$

En particulier, si $\alpha = 2\pi$, l'aire du disque de rayon $R$ est donnée par :

$$A_{2\pi,R} = \frac{1}{2}R^2 2\pi = \pi R^2$$

comme attendu.

*Remarque* Notez qu'il aurait été possible de calculer l'aire d'un cercle en coordonnée cartésienne — il est d'ailleurs un bon exercice de le faire pour un cercle de rayon 1 — mais le changement de variable nous simplifie grandement la tâche.

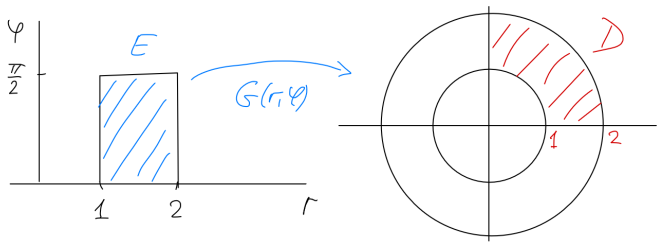
Mercredi 25 mai 2022 — **Cours 25 : $\pi$ apparaît de nulle part**

**Exemple 2** Nous voulons calculer l'intégrale de $f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ sur le domaine suivant :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\right\}$$

Clairement, il est plus simple d'exprimer notre domaine en coordonnées polaires :

$$D = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}, 1 < r < 2\right\}$$




Calculons donc notre intégrale :

$$\begin{aligned} \iint_D \sqrt{4 - x^2 - y^2}dxdy &= \iint_E \sqrt{4 - r^2} \cdot rdrd\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_1^2 r\sqrt{4 - r^2}dr \\ &= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \int_1^2 \sqrt{4 - r^2}d(r^2) = \frac{\pi}{4}\left(-\int_1^2 (4 - r^2)^{\frac{1}{2}} d(4 - r^2)\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\left(\frac{-2}{3}\right)(4 - r^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_{r=1}^{r=2} = -\frac{\pi}{6}\left(-3^{\frac{3}{2}}\right) \\ &= \frac{\pi}{2}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Le résultat de cette intégrale est positif, comme ce à quoi nous pourrions nous attendre. Il n'est jamais une mauvaise idée de vérifier le signe après avoir calculé une intégrale.

**Exemple 3**

Nous voulons calculer l'intégrale de $f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, où $a > 0$, sur le domaine $D$ (qui représente une boucle de Lemniscate de Bernoulli ; une figure géométrique sur laquelle il a travaillé en 1694) :

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, \left(x^2 + y^2\right)^2 = a^2\left(x^2 - y^2\right)\right\}$$

Écrivons ce résultat en coordonnées polaires, car cela semble infiniment plus facile :

$$r^4 = a^2\left(r^2\cos^2(\varphi) - r^2\sin^2(\varphi)\right) \overset{r \neq 0}{\Longrightarrow} r^2 = a^2\left(\cos^2(\varphi) - \sin^2(\varphi)\right) = a^2\cos(2\varphi)$$

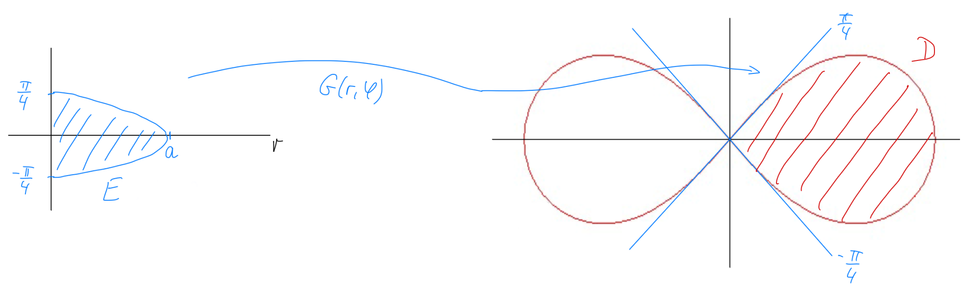
Ainsi, nous avons deux conditions sur $\varphi$ :

$$\begin{cases} a^2\cos(2\varphi) = r^2 > 0 \\ x > 0 \end{cases} \implies \begin{cases} -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4} \text{ ou } \frac{3\pi}{4} < \varphi < \frac{5\pi}{4} \\ -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \end{cases} \implies -\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}$$

Ceci nous donne ainsi :

$$E = \left\{-\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{4}, r < a\sqrt{\cos(2\varphi)}\right\}$$

Nous pouvons dessiner la lemniscate (nous ne travaillons que sur la boucle de droite) :




Nous avons un domaine régulier de type 2, donc nous pouvons calculer notre intégrale :

$$I = \iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}dxdy = \iint_E \sqrt{a^2 - r^2}rdrd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} d\varphi \int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \sqrt{a^2 - r^2}rdr$$

Commençons par calculer l'intégrale interne. Pour y arriver, nous devons remarquer que :

$$(1 - \cos(2\varphi))^{\frac{3}{2}} = \left(1 - \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}\left(\sin^2(\varphi)\right)^{\frac{3}{2}} = 2^{\frac{3}{2}}|\sin(\varphi)|^3$$

Ainsi, calculons notre intégrale interne :

$$\begin{aligned} \int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \sqrt{a^2 - r^2}rdr &= -\frac{1}{2}\int_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \sqrt{a^2 - r^2}d\left(a^2 - r^2\right) \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)\left(a^2 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{a\sqrt{\cos(2\varphi)}} \\ &= -\frac{1}{3}\left(a^2 - a^2\cos(2\varphi)\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{3}a^2 \\ &= -\frac{1}{3}a^3 2^{\frac{3}{2}}|\sin(\varphi)|^3 + \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

Calculons maintenant l'intégrale extérieure :

$$I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{1}{3}a^3 2^{\frac{3}{2}}|\sin(\varphi)|^3 + \frac{1}{3}a^3\right)d\varphi = \frac{1}{3}a^3\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{3}a^3 2^{\frac{3}{2}}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} |\sin(\varphi)|^3 d\varphi$$

Cependant, la fonction que nous voulons intégrer est paire, et nous savons que pour $f(x)$ paire, $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$ :

$$I = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{1}{3}a^3 2^{\frac{3}{2}} \cdot 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(\varphi)d\varphi$$

Calculons cette dernière intégrale. Puisque nous avons la puissance d'un sinus ou un cosinus impaire, nous devons changer vers l'autre fonction :

$$\begin{aligned}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin^3(\varphi)d\varphi &= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(1 - \cos^2(\varphi)\right)d(-\cos(\varphi)) = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left(\cos^2(\varphi) - 1\right)d(\cos(\varphi)) \\ &= \frac{1}{3}\cos^3(\varphi) - \cos(\varphi)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{3} + 1 \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{6} - 1\right) = \frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}\end{aligned}$$

Ainsi, nous trouvons finalement que :

$$I = \frac{\pi a^3}{6} - \frac{a^3 2^{\frac{3}{2}} 2}{3}\left(\frac{2}{3} - \frac{5}{6\sqrt{2}}\right) = \frac{a^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8\sqrt{2} - 10}{3}\right) > 0$$

Notre fonction $f(x, y)$ est toujours positive, donc notre résultat est cohérent.

**Remarque personnelle** J'ai un exemple que je trouve personnellement incroyable et, vu que nous ne l'avons pas vu en classe, je vais le mettre là. Nous voulons calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx$$

Cependant, nous savons que les primitives de la fonction $f(x) = e^{-x^2}$ ne peuvent pas s'exprimer avec des fonctions élémentaires. Ainsi, nous allons devoir utiliser un trick de *5head*. Commençons par remarquer que, dans notre intégrale, $x$ est juste une variable fictive, ainsi nous pouvons écrire :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy$$

Maintenant vient le coup de génie, auquel vous n'avez probablement pas pensé (et c'est bien normal, c'est non-trivial). Calculons le carré de notre intégrale :

$$\begin{aligned}I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cdot e^{-y^2}dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2+y^2\right)}dxdy\end{aligned}$$

Faisons maintenant un changement de variable polaire ; le $r$ qui apparaît nous aide infiniment :

$$I^2 = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\infty} re^{-r^2}drd\varphi = \int_{0}^{2\pi} -\frac{1}{2}\cdot e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r\to\infty}d\varphi = \int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}d\varphi = \pi$$

Ceci nous permet finalement de trouver que :

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Le fait que $\pi$ apparaisse dans cette intégrale est tout simplement magnifique.

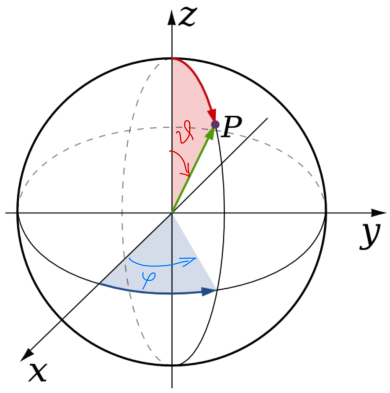
*Remarque* Cette intégrale peut sembler anodine, mais être capable de la calculer de manière formelle comme cela est notamment très important en statistique. Nous voulons que l'intégrale entre $-\infty$ et $+\infty$ de la Gaussienne nous donne 1, donc vous savez pourquoi on divise par $\sqrt{\pi}$ dans cette formule.

**Application : Changement de variables en coordonnées sphériques**

Le changement de variable vers les coordonnées sphériques est défini par :

$$G(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

où $G : ]0, +\infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[ \mapsto \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
Nous pouvons illustrer ceci de la manière suivante :




Si $r > 0$, nous avons :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \arccos\left(\frac{z}{r}\right)$$

De plus, si $\sin(\theta) \neq 0$, nous pouvons trouver $\varphi$ en voyant que :

$$\cos(\varphi) = \frac{x}{r\sin(\theta)}, \quad \sin(\varphi) = \frac{y}{r\sin(\theta)}$$

Calculons la matrice Jacobienne de notre fonction $G$ :

$$J_G(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{pmatrix}$$

Nous pouvons maintenant calculer la valeur absolue de son déterminant :

$$\begin{aligned} &|\det J_G(r, \theta, \varphi)| \\ &= \left|r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\cos^2(\varphi) + r^2\sin^3(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta)\sin^2(\varphi) + r^2\sin^3(\theta)\cos^2(\varphi)\right| \\ &= \left|r^2\cos^2(\theta)\sin(\theta) + r^2\sin^3(\theta)\right| \\ &= \left|r^2\sin(\theta)\right| \end{aligned}$$

Puisque $0 \leq \theta \leq \pi$, nous savons que $\sin(\theta) > 0$, ainsi :

$$|\det J_G(r, \theta, \varphi)| = r^2\sin(\theta)$$

Nous en déduisons que quand $r > 0$ et $\sin(\theta) > 0$ (c'est-à-dire $\theta \neq 0$ et $\theta \neq \pi$), alors $G$ est bijective.

*Remarque*

Il est important de se souvenir de ce résultat.

**Exemple** Calculons le volume d'une boule de rayon $a > 0$. Pour commencer, regardons notre domaine :

$$E = \{0 < r < a, 0 < \theta < \pi, 0 < \varphi < 2\pi\} = B\left(\vec{0}, a\right)$$

Nous trouvons donc :

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{B\left(\vec{0}, a\right)} 1 dxdydz = \iiint_E |\det J_G(r, \theta, \varphi)| d\varphi d\theta dr \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \int_0^a \sin(\theta) r^2 dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \cdot \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \cdot \int_0^a r^2 dr \\ &= 2\pi(-\cos(\theta))\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^a = 2\pi(1+1)\frac{1}{3}a^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi a^3 \end{aligned}$$

comme attendu.

**Application : Masse totale d'un objet solide de densité donnée** Pour calculer la masse totale $M$ d'un objet solide de volume $V$ et de densité $\rho(x, y, z)$, nous pouvons calculer :

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dxdydz$$

*Note personnelle : Intuition* Nous prenons une grande somme des morceaux de masses infinitésimaux $dm = \rho dV$ sur les petits morceaux de volumes $dV = dxdydz$.

**Exemple** Nous voulons trouver la masse totale d'un secteur sphérique, où :

$$S = \left\{x, y, z > 0, x^2 + y^2 + z^2 < a^2\right\}, \quad \rho(x, y, z) = x^2 + y^2$$

Nous pouvons tout écrire avec des coordonnées sphériques :

$$E = \left\{0 < r < a, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right\}, \quad \rho(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin^2(\theta)$$

Ainsi, nous pouvons calculer notre masse :

$$\begin{aligned} M &= \iiint_S \left(x^2 + y^2\right) dxdydz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^a \underbrace{r^2 \sin^2(\theta)}_{\rho(r,\theta,\varphi)} \underbrace{r^2 \sin(\theta)}_{|J_G|} dr \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(\theta) d\theta \cdot \int_0^a r^4 dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^2(\theta) - 1\right) d(\cos\theta) \cdot \frac{1}{5} a^5 \\ &= \frac{\pi a^5}{10} \left(\frac{1}{3}\cos^3(\theta) - \cos(\theta)\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^5}{10}\left(-\frac{1}{3} + 1\right) \\ &= \frac{\pi a^5}{15} \end{aligned}$$

Lundi 30 mai 2022 — **Cours 26 : Toutes les bonnes choses ont une fin**

**Exemple** Nous voulons calculer le volume d'une ellipsoïde, c'est à dire :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\right\}, \quad a, b, c > 0$$

Commençons par faire le changement de variable suivant, nous permettant d'obtenir une sphère :

$$(x, y, z) = H(u, v, w) = (au, bv, cw) \implies E = \left\{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : u^2 + v^2 + w^2 \leq 1\right\}$$

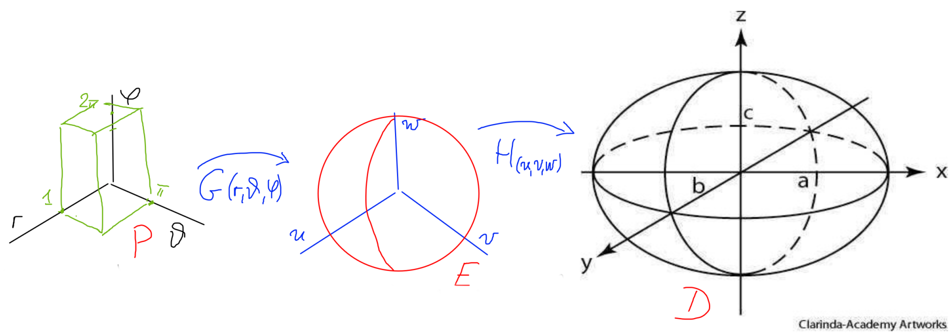
Notre Jacobien est donc :

$$J_H(u, v, w) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \implies |\det J_H(u, v, w)| = abc > 0$$

Nous pouvons ensuite faire un changement de coordonnées sphériques, nous donnant :

$$P = \left\{(r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi < 2\pi\right\}$$

Pour résumer, nous avons :




Calculons maintenant notre volume :

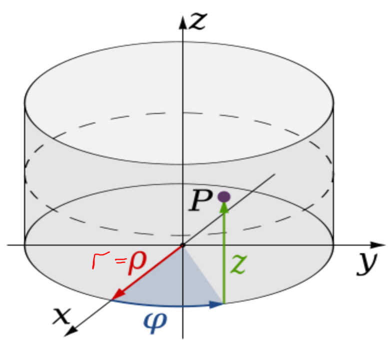
$$\begin{aligned} V &= \iiint_D 1 dxdydz = \iiint_E abcdudvdw = abc \iiint_P r^2 \sin(\theta) dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin(\theta) d\theta \int_0^1 r^2 dr = abc2\pi(-\cos(\varphi))\Big|_0^{\pi} \cdot \frac{1}{3} r^3\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi abc \end{aligned}$$

**Coordonnées cylindriques**

Nous définissons le changement de variables en coordonnées cylindriques par :

$$G(r, \varphi, z) = \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases}$$

où $G : [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$.
Nous pouvons faire le schéma suivant :



Calculons maintenant la matrice Jacobienne :

$$J_G(r, \varphi, z) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \det J_G(r, \varphi, z) = 1 \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} = r\left(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)\right) = r$$

**Exemple** Soit $a > 0$. Nous voulons trouver le volume du domaine ayant les frontières suivantes et qui contient $(0, 0, a)$ :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2za \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

On voit que $z$ est un peu spécial par rapport à $x$ et $y$ (qui elles cependant jouent un rôle symétrique), mais nous voyons tout de même qu'il semble y avoir un lien avec un cercle. Essayons de réorganiser nos équations :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2za + a^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

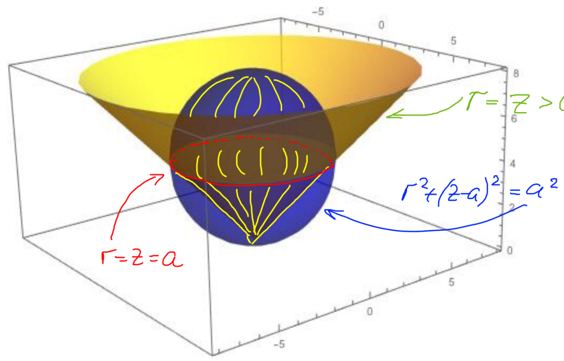
Faisons maintenant un changement de variables vers les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} r^2 + (z-a)^2 = a^2 \\ r = z, z \geq 0 \text{ ou } r = -z, z < 0 \end{cases}$$

Cependant, le volume dont nous voulons calculer le volume contient $(0, 0, a)$ où $a > 0$, donc seul le cône $r = z > 0$ est valide, l'autre cône définit un autre volume. Nous obtenons que notre domaine est borné par la sphère de rayon $a$ et de centre $(0, 0, a)$ et par le cône $r = z$ (où $z > 0$). Calculons l'intersection entre ces deux surfaces (donc nous prenons $r = z$) :

$$r^2 + (r-a)^2 = a^2 \implies 2r^2 = 2ra \implies r = a = z \text{ ou } r = 0 = z$$

Le point $r = 0 = z$ est une solution triviale, donnée par le bas du cône. Cependant, le deuxième résultat $r = a = z$ est beaucoup plus intéressant. C'est un un cercle de rayon $a$ et de centre $(0, 0, a)$, ce qui est le cercle équatorial de notre sphère. Nous pouvons le voir sur l'image ci-dessous :




Nous pouvons maintenant séparer notre volume en deux calculs : la demi-sphère du haut et le cône du bas. Le volume de la première est donné par $\frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi a^3 = \frac{2}{3}\pi a^3$, auquel nous devons calculer le volume de notre cône :

$$V_{cone} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a dz \int_0^z \underbrace{r}_{|\det(J_G)|} dr = 2\pi \int_0^a dz \cdot \frac{1}{2} r^2 \bigg|_0^z = \pi \int_0^a z^2 dz = \frac{1}{3}\pi z^3 \bigg|_0^a = \frac{1}{3}\pi a^3$$

En additionnant nos deux volumes, nous obtenons que le volume total est donné par :

$$V = \frac{2}{3}\pi a^3 + \frac{1}{3}\pi a^3 = \pi a^3$$

**Remarque** Dans les changements de variables sphériques et cylindriques, la coordonnée $z$ joue un rôle spéciale (son expression est plus simple que les deux autres). Cependant, selon la géométrie du domaine et selon la fonction donnée, nous pouvons choisir une autre coordonnée cartésienne pour avoir cette forme spéciale. Par exemple, pour un changement de variable sphérique avec $y$ ayant la forme spéciale, nous aurions :

$$G_{sph} = \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ z = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ y = r\cos(\theta) \end{cases}$$

où $G_{sph} : [0, +\infty[ \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \mapsto \mathbb{R}^3$ comme d'habitude, et :

$$\left|J_{G_{sph}}\right| = \left|-J_{\widetilde{G}}\right| = r^2\sin(\theta)$$

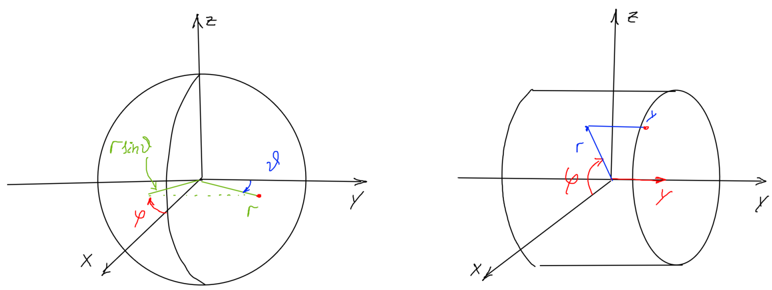
puisqu'échanger deux lignes d'une matrice correspond à multiplier son déterminant par $-1$, mais nous ne considérons que la valeur absolue de notre déterminant.
Nous pouvons bien sûr faire la même chose avec un changement de variable cylindrique. Par exemple :

$$G_{cyl} = \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ z = r\sin(\varphi) \\ y = y \end{cases}$$

où $G_{cyl} = [0, +\infty[ \times [0, 2\pi[ \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$, et :

$$\left|J_{G_{cyl}}\right| = |-r| = r$$

pour la même raison.




*Observation* Une autre manière de voir ceci, est que nous pouvons faire un changement de variable afin de réordrer nos variables :

$$G(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \begin{cases} x = \widetilde{x} \\ y = \widetilde{z} \\ z = \widetilde{y} \end{cases}$$

Clairement, $\det J_G = -1$, donc nous avons bien $|\det J_G| = 1$, ce qui nous permet en effet de réordrer nos variables sans conséquence (sans avoir à multiplier par quoi que ce soit).

**Exemple** Soit $a > 0$. Nous voulons trouver le volume du domaine ayant les frontières suivantes et qui contient $(0, a, 0)$ :

$$\begin{cases} x^2 + z^2 + y^2 = 2ya \\ x^2 + z^2 = y^2 \end{cases}$$

C'est exactement les mêmes frontières que dans notre exemple ci-dessus, en prenant $(x, y, z) \mapsto (\widetilde{x}, \widetilde{z}, \widetilde{y})$. Ainsi, nous trouvons de la même manière que :

$$V_D = \pi a^3$$

**Résumé des changements de variables**

Nous avons vu les changements de variables remarquables suivants :

$$G_{polaire}(r, \varphi) = \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \end{cases} \implies |\det(J_G)| = r$$

$$G_{spherique}(r, \theta, \varphi) = \begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ z = r\cos(\theta) \end{cases} \implies |\det(J_G)| = r^2\sin(\theta)$$

$$G_{cylindrique}(r, \varphi, z) = \begin{cases} x = r\cos(\varphi) \\ y = r\sin(\varphi) \\ z = z \end{cases} \implies |\det(J_G)| = r$$

Avec :

$$r > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

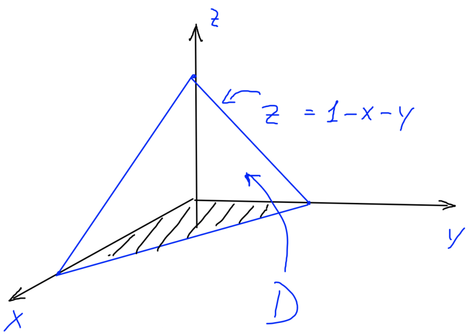
## 6.4 Exemples d'examen pour terminer

**Exemple 1**

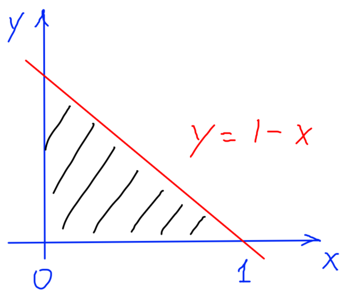
Nous voulons calculer l'intégrale suivante :

$$I = \iiint_D \frac{1}{(1 + x + y + z)^3} dxdydz, \quad \text{où } D = \{x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$$

Le domaine $D$ est un tétraèdre :




Il n'y a pas vraiment de ressemblance avec un cercle ou une sphère (il n'y a pas de carré), donc cela semble peu judicieux de prendre un changement de variables sphérique ou cylindrique.
Coupons le volume sur le plan $xy$ :




Nous pouvons ainsi voir que :

$$D = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\right\}$$

Ainsi, calculons notre intégrale :

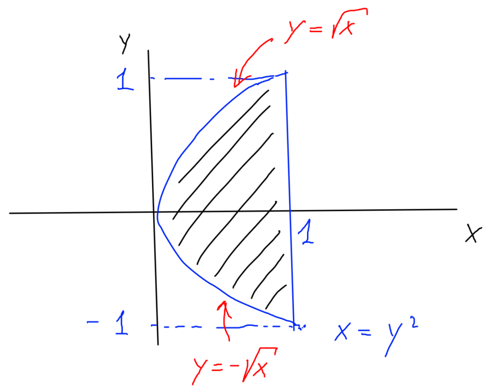
$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dz \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left(\frac{-1}{2}\right) \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{-1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y)^2}\right) dy \\
&= \int_0^1 dx \left(-\frac{1}{8}y - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y)}\right) \Big|_{y=0}^{y=1-x} \\
&= \int_0^1 \left(\frac{-1}{8}(1-x) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{8}(x-1) - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1+x}\right) dx \\
&= \frac{1}{16}(x-1)^2 - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\log|x+1| \Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\log(2) - \frac{1}{16} \\
&= \frac{1}{2}\log(2) - \frac{5}{16}
\end{aligned}$$

Nous pouvons vérifier que, comme ce à quoi nous pouvions nous attendre en regardant l'image ci-dessus, notre résultat est bien positif.

**Exemple 2** Il arrive que nous pouvons calculer certaines intégrales multiples sans calcul (y compris à l'examen !), voici un exemple. Considérons l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-1}^1 dy \int_{y^2}^1 \sin(y)\cos(x) dx$$

Comme souvent, il est une bonne idée de dessiner notre domaine :




Essayons de calculer notre intégrale :

$$\int_{-1}^1 \int_{y^2}^1 \sin(y)\cos(x) dx = \int_{-1}^1 \sin(y)\left(\sin(1) - \sin\left(y^2\right)\right) dy = \int_{-1}^1 f(y) dy$$

L'intégrale de $\sin\left(y^2\right)$ ne s'exprime pas avec des fonctions élémentaires, donc nous avons un problème. Cependant, nous pouvons voir que :

$$f(-y) = \sin(-y) \cdot \left(\sin(1) - \sin\left((-y)^2\right)\right) = -\sin(y)\left(\sin(1) - \sin\left(y^2\right)\right) = -f(y)$$

Donc $f(y)$ est impaire. Or nous savons que, pour $g(x)$ une fonction impaire, $\int_{-a}^a g(x) dx = 0$. Ainsi, nous avons trouvé que :

$$I = 0$$

Une autre manière pour arriver à ce résultat est de changer l'ordre d'intégration :

$$I = \int_{0}^{1} dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} \sin(y)\cos(x) dy = \int_{0}^{1} dx \left(\cos(x) \underbrace{\left(-\cos\left(\sqrt{x}\right) + \cos\left(-\sqrt{x}\right)\right)}_{=0}\right)$$
$$= \int_{0}^{1} 0 dx = 0$$

**Exemple 3** Nous allons voir un autre exemple d'intégrale qui pourrait apparaitre en vrai-faux (intégrales qui demandent généralement peu de calculs, mais plutôt une bonne compréhension du domaine). Nous nous demandons si l'intégrale suivante est positive :

$$I = \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \left(\int_{0}^{1} \frac{\sin\left(r^2\right)}{1 + e^3} r\right) dr d\varphi$$

Nous remarquons que le $r$ vient d'un changement de variable polaire, ainsi nous pouvons écrire :

$$f(r, \varphi) = \frac{\sin\left(r^2\right)}{1 + e^r}$$

Clairement $f(r, \varphi) > 0$. Ainsi, nous intégrons une fonction positive, ce qui veut bien dire que l'intégrale est positive.

**Exemple 4** Nous voulons écrire l'intégrale suivante en coordonnées polaires :

$$\iint_{D} \left(x^2 + y^2\right) dx dy, \quad \text{où } D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x+1)^2 + y^2 \leq 1, y \leq 0\right\}$$

La première inégalité nous donnée :

$$(x+1)^2 + y^2 \leq 1 \implies (r\cos(\varphi) + 1)^2 + r^2\sin^2(\varphi) \leq 1$$
$$\implies r^2\cos^2(\varphi) + 2r\cos(\varphi) + 1 + r^2\sin^2(\varphi) \leq 1 \implies r^2 \leq -2r\cos(\varphi)$$
$$\overset{r \geq 0}{\implies} r \leq -2\cos(\varphi)$$

Puisque nous voulons $r > 0$, cela nous donne $\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2}$. De plus, nous voulons aussi $y \leq 0$, ce qui force $\pi \leq \varphi \leq 2\pi$. En mettant ces deux conditions en commun, nous trouvons :

$$\pi \leq \varphi < \frac{3\pi}{2}$$

Ainsi, nous avons :

$$\iint_{D} r^2 dx dy = \iint_{E} r^2 \cdot r dr d\varphi = \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} d\varphi \int_{0}^{-2\cos(\varphi)} r^3 dr$$

**Exemple 5** Nous voulons dessiner le domaine suivant :

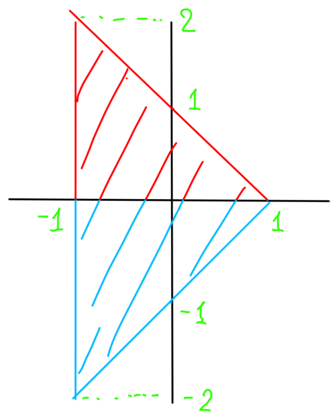
$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq -1, |y| \leq 1 - x\right\}$$

Séparons notre dessin en deux cas :

$$y \geq 0 \implies y \leq 1 - x$$

$$y < 0 \implies -y \leq 1 - x \implies y \geq x - 1$$

Ceci nous permet de dessiner :




**Exemple 6** Nous nous demandons l'aire de quelle figure géométrique l'intégrale suivante exprime :

$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} r dr$$

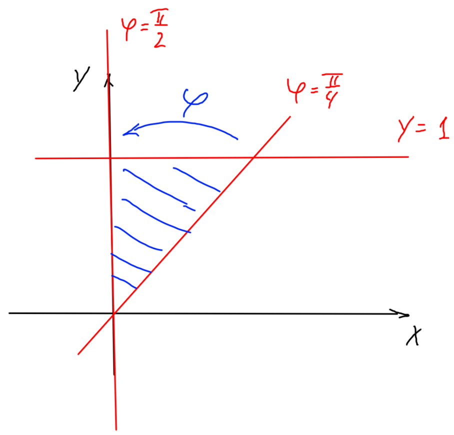
Clairement, $r$ vient d'un changement de variable depuis les coordonnées cartésiennes, ainsi essayons de trouver les inégalités sur $x$ et $y$. Pour commencer, nous voyons que :

$$\frac{\pi}{4} < \varphi < \frac{\pi}{2} \implies \sin(\varphi) > 0$$

Ceci nous permet de voir que :

$$0 < r < \frac{1}{\sin(\varphi)} \iff \underbrace{0 < r\sin(\varphi)}_{=y} < 1 \iff 0 < y < 1$$

Ainsi, nous pouvons faire notre dessin :




Nous trouvons donc que notre intégrale représente l'aire d'un triangle.

**Remarque** Pour conclure, il faut toujours dessiner le domaine quand on fait une intégration de plusieurs variables (sur deux variables, mais aussi sur trois variables).