

Rappel: Fonctions réelles de plusieurs variables réelles.

-97-

Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in E$ dans $\mathbb{R}$.
 E est le domaine de définition de f , et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

§ 3.2. Limites et continuité.

Déf Une fonction définie au voisinage de $\bar{x}_0$ (mais pas nécessairement en $\bar{x}_0$)
 $[\exists \delta > 0 : B(\bar{x}_0, \delta) \subset E \cup \{\bar{x}_0\}]$ admet pour limite le nombre réel l
lorsque $\bar{x}$ tend vers $\bar{x}_0$ si pour tout $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que
pour tout $\bar{x} \in E$ et $0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta$, on a $|f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$.

Notation: $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$.

Déf. Soit $\bar{x}_0 \in E$ un point intérieur de E . Alors $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ est continue
en $\bar{x} = \bar{x}_0$ $\stackrel{\text{dét}}{\iff} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = f(\bar{x}_0)$.

Ex 1. $f(x, y) = x + 2y$ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$

$$\begin{aligned} \text{Soit } \varepsilon > 0. \quad |f(x, y) - f(x_0, y_0)| &= |(x + 2y) - (x_0 + 2y_0)| \stackrel{\Delta}{\leq} |x - x_0| + 2|y - y_0| \leq \\ &\leq \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\geq |x - x_0|} + 2 \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\geq |y - y_0|} = 3\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq 3\delta = 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

on choisit $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \leq \delta$$

$\Rightarrow$ par la définition de la limite $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} (x + 2y) = x_0 + 2y_0$. $\forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow$ la fonction $f(x, y) = x + 2y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex 2. $f(x, y) = x \cdot y$ Soit $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0 \quad \forall (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ -99-
 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

Dém. Si $x_0 = 0 \Rightarrow$ exercice. Supposons que $x_0 \neq 0$. Soit $\varepsilon > 0$

$$|f(x, y) - f(x_0, y_0)| = |xy - x_0 y_0| = \overset{-x_0 y + x_0 y}{| (x - x_0)y + x_0(y - y_0) |} \leq |x - x_0| \cdot |y| + |y - y_0| \cdot |x_0|$$

$$|y - y_0| \cdot |x_0| \leq \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\leq \delta} |x_0| \overset{\text{on veut}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \delta \leq \frac{\varepsilon}{2|x_0|} \quad (x_0 \neq 0)$$

on choisit

$$|x - x_0| \cdot |y| \leq \underbrace{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}_{\leq \delta} \cdot |y| \leq \delta (|y_0| + \delta) \leq \delta (|y_0| + 1) \overset{\text{on veut}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}$$

on choisit $\delta < 1$ on choisit

$$\Rightarrow \delta = \min \left(\frac{\varepsilon}{2|x_0|}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0|+1)}, 1 \right) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow \text{par la déf de la limite} \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \cdot y = x_0 \cdot y_0$$

Conclusion Les fonctions $f(x, y) = x + 2y$ et $f(x, y) = x \cdot y$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.

Caractérisation de la limite à partir des suites convergentes.

-100-

Thm. Une fonction $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0$ admet pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0 \iff$ pour toute suite d'éléments $\{\bar{a}_k\}$ de $\{\bar{x} \in E : \bar{x} \neq \bar{x}_0\}$, qui converge vers $\bar{x}_0$, la suite $\{f(\bar{a}_k)\}$ converge vers l .

$$\left(\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \right) \iff \left(\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = l \text{ pour toute suite } \{\bar{a}_k\} \subset E \setminus \{\bar{x}_0\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0 \right)$$

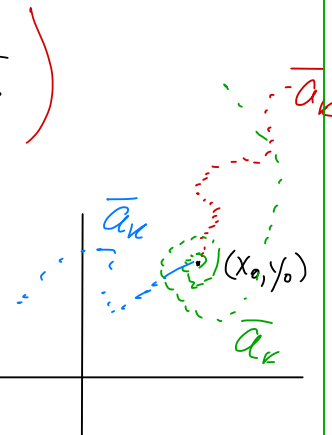
P

Q

Dém: $(\Rightarrow)$ $P \Rightarrow Q$

$$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall \bar{x} : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{x}) - l| \leq \varepsilon$$

Si on a $\{\bar{a}_k\} : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0 \Rightarrow$ pour $\delta > 0 \exists k_0 : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|\bar{a}_k - \bar{x}_0\| \leq \delta \Rightarrow |f(\bar{a}_k) - l| \leq \varepsilon$
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = l$



$(\Leftarrow)$ par contraposée: $\neg P \Rightarrow \neg Q$

Supposons que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) \neq l \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists \bar{x}_\delta : \|\bar{x}_\delta - \bar{x}_0\| \leq \delta \text{ et } |f(\bar{x}_\delta) - l| > \varepsilon$.

On peut choisir $\delta = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \exists \bar{x}_k \in E : \|\bar{x}_k - \bar{x}_0\| \leq \frac{1}{k} \text{ et } |f(\bar{x}_k) - l| > \varepsilon$.

$\Rightarrow$ on obtient la suite $\{\bar{x}_k\}_{k=1}^\infty : \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{x}_k = \bar{x}_0$, mais $|f(\bar{x}_k) - l| > \varepsilon \forall k \in \mathbb{N}^*$
 $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{x}_k) \neq l$



Opérations algébriques sur les limites.

Soient f, g deux fonctions : $E_{\mathbb{R}^n} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l_1$ et $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l_2$.

Alors :

$$(1) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (\alpha f + \beta g)(\bar{x}) = \alpha l_1 + \beta l_2$$

$$(2) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} (f \cdot g)(\bar{x}) = l_1 l_2$$

$$(3) \text{ Si } l_2 \neq 0, \text{ alors } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} \left(\frac{f}{g} \right)(\bar{x}) = \frac{l_1}{l_2}$$

} par la caractérisation
à partir des suites.

Conclusion: Tous les polynômes en plusieurs variables et toutes les fonctions rationnelles sont continues sur leur domaines de définition.

Remarque. La caractérisation de la limite à partir des suites convergentes est pratique pour montrer qu'une fonction n'admet pas de limite en $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$

Il suffit de trouver deux suites $\{\bar{a}_k\}$ et $\{\bar{b}_k\}$ telles que $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \bar{b}_k = \bar{x}_0$

$\{\bar{a}_k, \bar{b}_k\} \subset E$, mais $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k)$

Ex. 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = ?$$

Soit $\bar{a}_k = (\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k} \cdot \frac{1}{k}}{\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2}} = \frac{1}{2}$

$\bar{b}_k = (\frac{1}{k}, 0) \rightarrow (0, 0) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{0 \cdot \frac{1}{k}}{0 + \frac{1}{k^2}} = 0$

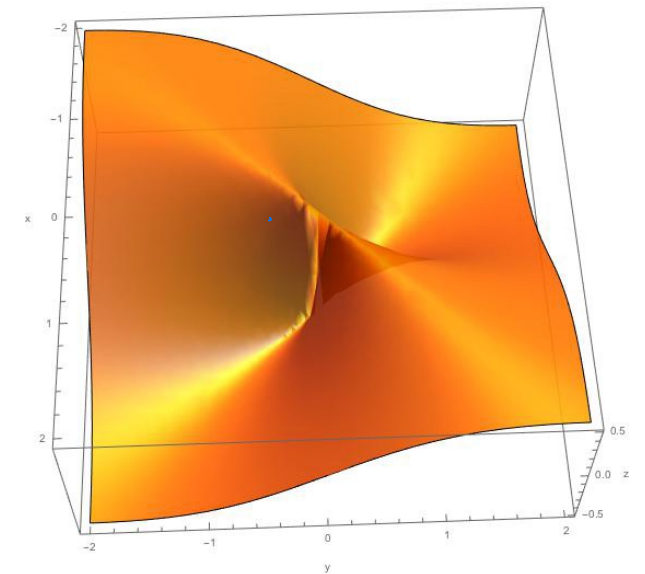
$\Rightarrow$ Par la caractérisation à partir des suites

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ n'existe pas!

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

$\bar{c}_k = (-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{c}_k) = -\frac{1}{2}$

$\bar{d}_k = (\frac{1}{k^2}, \frac{2}{k}) \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{d}_k) = 0$



Proposition Version du critère le long d'une courbe.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $\bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n$. Alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$ si et seulement si pour toute courbe $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \bar{x}_0$, on a $\lim_{t \rightarrow a^+} f(f(t)) = l$.

 $\Leftrightarrow$ fonction continue $f(t) = (f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t))$

$f([a, b]) \subset D \setminus \{\bar{x}_0\}$ et $\lim_{t \rightarrow a^+} f(t) = \bar{x}_0$, on a $\lim_{t \rightarrow a^+} f(f(t)) = l$.

Ex 1. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{0 + t^2} = 0$

Remarque. On ne peut pas calculer la limite d'une fonction de plusieurs variables en faisant de manière consecutive par rapport à chaque variable.

Ex. 1 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

Soit $x \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} 0 = 0$

Soit $y \neq 0$ $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0 \Rightarrow \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} 0 = 0$

mais $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ n'existe pas.

Ex 2. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$\gamma_1(t) = (t, 0)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_1(t) = \bar{0}$$

$$\gamma_2(t) = (0, t)$$

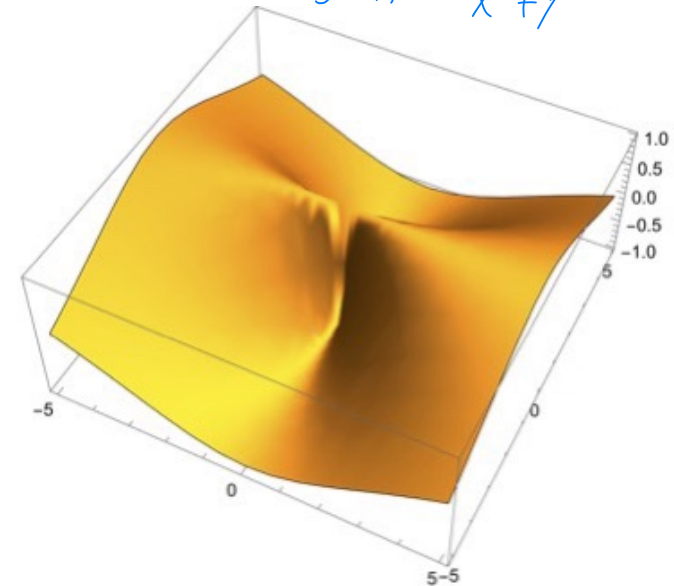
$$\lim_{t \rightarrow 0} \gamma_2(t) = \bar{0}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_1(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 - 0}{t^2 + 0} = 1$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(\gamma_2(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^2}{0 + t^2} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$
n'existe pas

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$



Ex 3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$f_1(t) = (t, 0) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f_1(t) = \overline{0}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + 0}{t^2 + 0} = 0$$

$$f_2(t) = (0, -t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f_2(t) = \overline{0}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 - t^3}{0 + t^2} = 0$$

$$f_3(t) = (t, t) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f_3(t) = \overline{0}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^3 + t^3}{t^2 + t^2} = 0$$

hypothèse : $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$

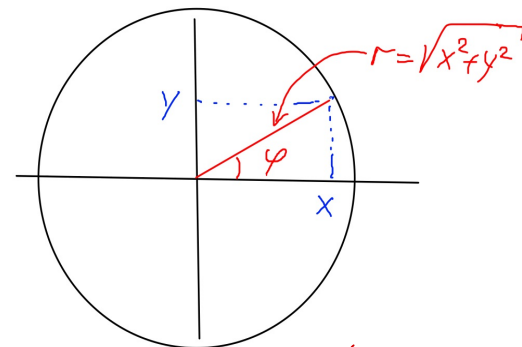
Méthode de changement de variables polaires:

(2) On peut démontrer l'existence de cette limite par le changement de variables en coordonnées polaires.

$$x = r \cos \varphi \quad r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$$

$$y = r \sin \varphi \quad \text{si } r \neq 0 \Rightarrow \varphi \in [0, 2\pi[$$

Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0 \Leftrightarrow$
 $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0$



$\varphi = \varphi(r)$ est une fonction inconnue de r .

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} \Rightarrow f(r, \varphi) = \frac{r^3 \cos^3 \varphi + r^3 \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} =$$

$$= \frac{r^3 (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)}{r^2} = r (\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} \varphi(r, \varphi)$$

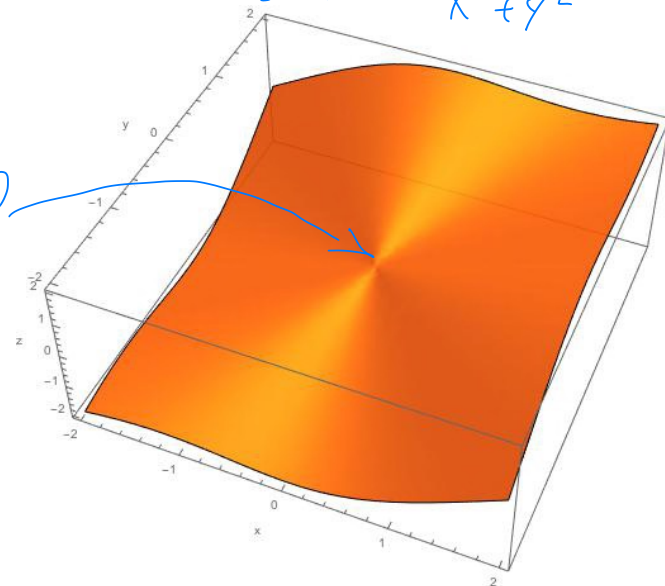
$$\lim_{r \rightarrow 0} |\varphi(r, \varphi)| = \lim_{r \rightarrow 0} |r (\underbrace{\cos^3 \varphi + \sin^3 \varphi}_{\leq 2})| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Cette méthode est efficace pour montrer l'existence des limites $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$

$$f(x,y) = \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$



Théorème des 2 gendarmes. Soient $f, g, h : E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$, telles que

$$(1) \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$$

(2) Il existe $\alpha > 0$: pour tout $x \in \{x \in E : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \alpha\}$, on a

$$f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x}).$$

$$\text{Alors } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l.$$

Dém: Soit $\{\bar{a}_k\} \subset E$ une suite convergente, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0$

Alors (1) $\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} g(\bar{a}_k) = l$ (caractérisation à partir des suites)

(2) $\exists k_0 \in \mathbb{N} : \|\bar{a}_k - \bar{x}_0\| \leq \alpha \quad \forall k \geq k_0 \Rightarrow f(\bar{a}_k) \leq h(\bar{a}_k) \leq g(\bar{a}_k) \xRightarrow{\text{2 gendarmes pour les suites}}$

$\Rightarrow \exists \lim_{k \rightarrow \infty} h(\bar{a}_k) = l \Rightarrow$ par la caractérisation à partir des suites,

puisque $\{\bar{a}_k\}$ est une suite arbitraire convergente vers $\bar{x}_0$,

$$\Rightarrow \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$$



En particulier, critère de 2 gendarmes en coordonnées polaires. -108-

Proposition. Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$

Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = l$ si et seulement si

$\exists \delta > 0$ et $\psi:]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R} : (1) \forall \varphi \in [0, 2\pi], \forall r \in]0, \delta[\Rightarrow |f(x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi) - l| \leq \psi(r).$

(2) $\lim_{r \rightarrow 0^+} \psi(r) = 0$

Ex 5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^2}{x^2 + y^2 + 3y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = ?$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 + 3r^4 \sin^4 \varphi} = \frac{4r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r^2 (1 + 3r^2 \sin^4 \varphi)}$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| = \frac{4r^3 \overbrace{|\cos \varphi \sin^2 \varphi|}^{\leq 1}}{r^2 \underbrace{|1 + 3r^2 \sin^4 \varphi|}_{\geq 1}} \leq \frac{4r^3}{r^2} = 4r = \psi(r)$$

$\lim_{r \rightarrow 0} \psi(r) = 0 \Rightarrow$ par les 2 gendarmes en coordonnées polaires

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

Question 7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{\cos(xy)(x^2 + \ln(y^2))}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{autrement} \end{cases}$

$g(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + y^4}{y^2 + x^4 + x^6}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{autrement} \end{cases}$ -109-

Alors:

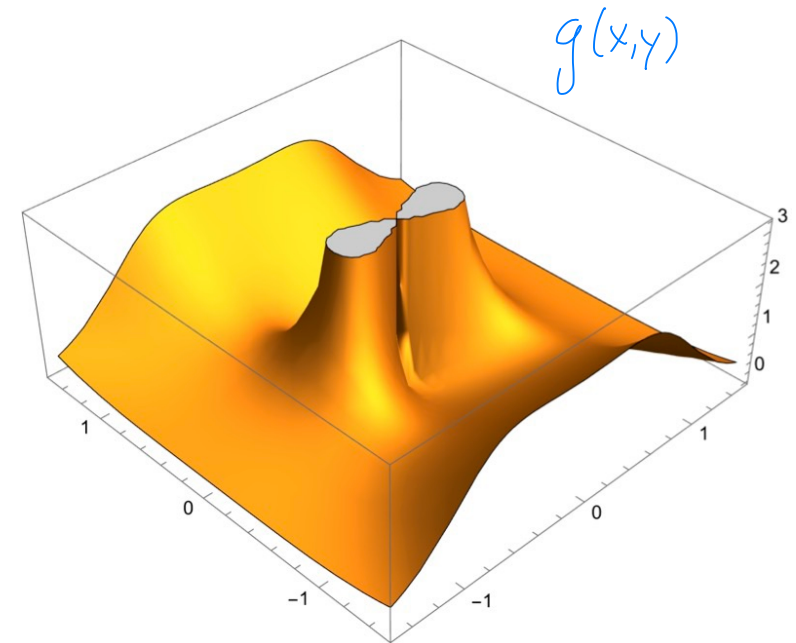
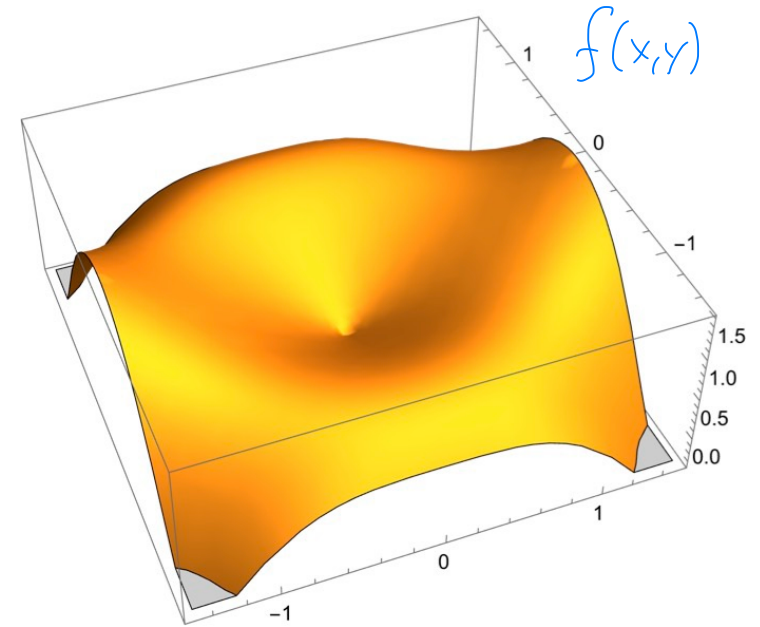
A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$ n'existe pas

D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$ n'existe pas

E. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$



(1)

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi) (r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi))}{r}$$

$$|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - 0| = \frac{\overbrace{|\cos(r^2 \sin \varphi \cos \varphi)|}^{\leq 1} |r^2 \cos \varphi + \sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}{r} \leq \frac{\overbrace{|r^2 \cos \varphi|}^{\leq r^2} + \overbrace{|\sin(r^2 \sin^2 \varphi)|}^{\leq |r^2 \sin^2 \varphi| \leq r^2}}{r} \leq \frac{2r^2}{r} = 2r$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} 2r = 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$

$$(2) \quad g(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^2 \cos^2 \varphi + r^4 \sin^4 \varphi}{r^2 (\sin^2 \varphi + r^2 \cos^4 \varphi + r^4 \cos^6 \varphi)} = \frac{\cos^2 \varphi + r^2 \sin^4 \varphi}{\sin^2 \varphi + r^2 \cos^4 \varphi + r^4 \cos^6 \varphi}$$

peut être = 0.

le long des courbes: $f_1(t) = (0, t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$, $f_2(t) = (t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (0, 0)$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} g(0, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4}{t^2} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} g(t, 0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^4 + t^6} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^2 + t^4} = \infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) \text{ n'existe pas.}$$