Rappel: Sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$.

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\left[\begin{array}{l} (1)\ E = \emptyset \\ (2)\ E \neq \emptyset \text{ et pour chaque point } \bar{x} \in E \\ \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar{x}, \delta) \subset E \end{array}\right.$

Déf: $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ son complémentaire $CE = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\}$ est ouvert.

($C_{\mathbb{R}^n}$)

§ 2.3. L'adhérance et la frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

Déf. (Adhérance) Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide. Alors l'intersection de tous les sous-ensembles fermés contenant E est appelée l'adhérance de E.

Notation: $\overline{E}$ est l'adhérance de E dans $\mathbb{R}^n$.

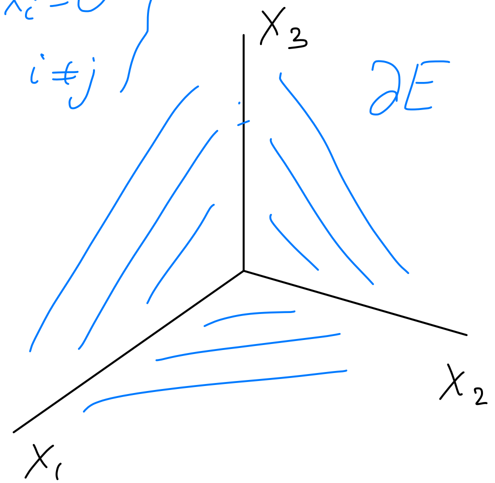
Remarque. $E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé $\Leftrightarrow$ $E = \overline{E}$ (par déf)

Déf. $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide, $E \neq \mathbb{R}^n$. Un point $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ est un point de frontière de E si toute boule ouverte de centre x contient au moins un point de E et au moins un point de CE.

L'ensemble des points frontières de E est la frontière de E. Notation: ∂E

Ex 1. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i > 0,\ i = 1\dots n\} \Rightarrow \partial E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \exists i : x_i = 0,\ x_j \geq 0\ i \neq j\}$

$\bar{E} = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0,\ i = 1 \dots n\}$



Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors:

(1) $\partial E \cap \mathring{E} = \emptyset$ (par déf)

(2) $\mathring{E} \cup \partial E = \bar{E}$ ($\mathring{E} \cup \partial E$ est fermé, et $E \subset \mathring{E} \cup \partial E$)
minimal fermé

l'interieur de E

(3) $\partial E = \bar{E} \setminus \mathring{E} = \bar{E} \cap C\mathring{E} \Rightarrow \partial E$ est fermé.

(4) $\partial \emptyset = \emptyset$, $\partial \mathbb{R}^n = \emptyset$

Pourquoi faut-il distinguer entre les sous-ensembles ouverts et fermés dans $\mathbb{R}^n$?

La topologie de $\mathbb{R}^n$ est liée aux propriétés des limites des suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

§2.4. Suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$.

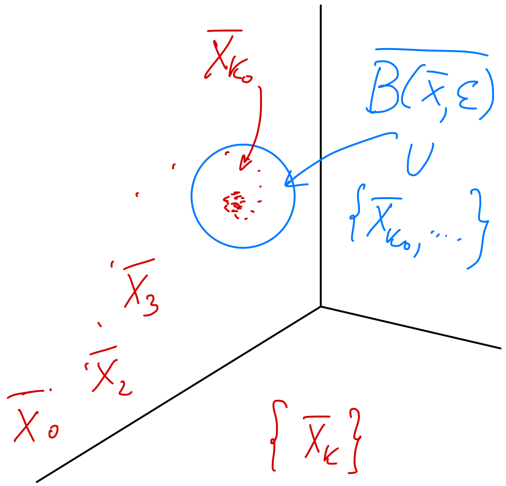
Déf Une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$ est une application $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$

$$f: k \to \bar{x}_k = (x_{1_k}, x_{2_k}, \dots x_{n_k}) \in \mathbb{R}^n$$

$\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{R}^n$

Déf. $\{\bar{x}_k\}_{k=0}^{\infty}$ est convergente et admet pour limite $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ si pour tout $\varepsilon > 0$ $\exists k_0 \in \mathbb{N}$: $\forall k \geq k_0$, $\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon$

$$(\Longleftrightarrow \bar{x}_k \in \overline{B(\bar{x}, \varepsilon)} \quad \forall k \geq k_0).$$



Notation: $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x}$

Remarque. $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x}_k = (x_{1,k} \dots x_{n,k})$, $\lim\limits_{k \to \infty} \bar{x}_k = \bar{x}$

$\Longleftrightarrow$ $\lim\limits_{k \to \infty} x_{j,k} = x_j$ pour tout $j = 1 \dots n$

$$\underbrace{\|\bar{x}_k - x\|}_{\leq \varepsilon} \underset{\Longleftrightarrow}{=} \Big(\sum_{j=1}^{n} \underbrace{(x_{j,k} - x_j)^2}_{\leq \varepsilon_j \ \forall j = 1 \dots n} \Big)^{\frac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ Si $\|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \varepsilon \Rightarrow$ chaque $|x_{j,k} - x_j| \leq \varepsilon$

$\Leftarrow$ Si $|x_{j,k} - x| \leq \varepsilon \ \forall j \Rightarrow \|\bar{x}_k - \bar{x}\| \leq \sqrt{n}\, \varepsilon$

Propriétés: (1) La limite d'une suite $\{\bar{x}_k\}$, si elle existe, est unique.

(2) Toute suite convergente $\{\bar{x}_k\}$ est bornée.

($\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists M>0$: est contenue dans une boule fermé $\overline{B(\bar{0},M)}$)

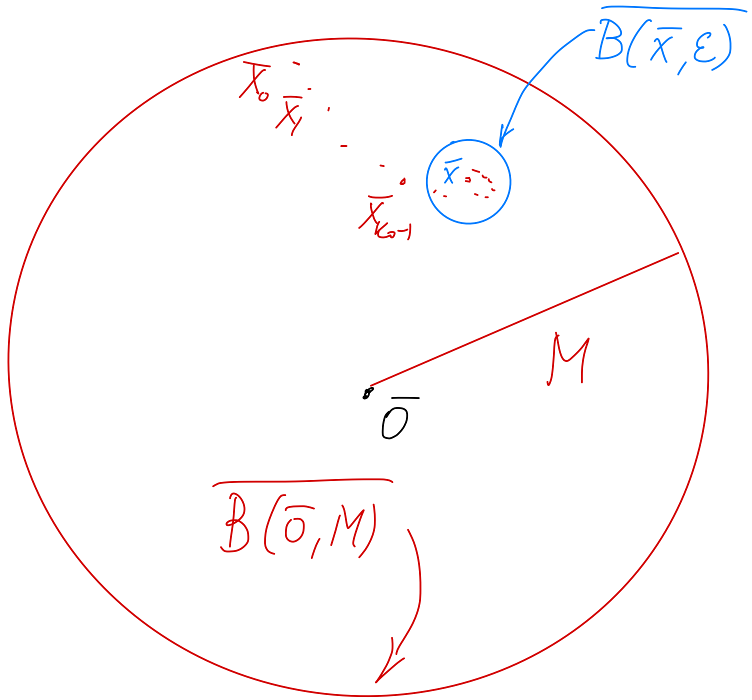
$\lim \bar{x}_k = \bar{x} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq k_0 \Rightarrow \|\bar{x} - \bar{x}_k\| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \{\bar{x}_{k_0}, \dots\} \subset \overline{B(\bar{x}, \varepsilon)}$

$\{\bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k_0-1}\} \cup \{\bar{x}_k, k \geq k_0\} = \{\bar{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}}$

$M = \max\{\|\bar{x}_i\|, i = 0..k_0-1, \|\bar{x}\| + \varepsilon\}$

$\Rightarrow \{x_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \overline{B(\bar{0}, M)}$



(3) **Thm Bolzano-Weierstrass:**

De toute suite bornée $\{\bar{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ on peut extraire une sous-suite convergente.

[DZ § 13.2.16].

Thm: $\underbrace{\text{(Un sous-ensemble non-vide } E\subset\mathbb{R}^n \text{ est fermé)}}_{P}$ $\Longleftrightarrow$

$\underbrace{\text{(toute suite } \{\bar{x}_k\}\subset E \text{ d'éléments de } E \text{ qui converge, a pour limite un élément de } E.\text{)}}_{Q}$

Dém: $\Rightarrow$) par absurde P et $\neg Q \Rightarrow$ absurde.

Soit $\bar{x}=\lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_k$, $\bar{x}_k\in E$ $\forall k\in\mathbb{N}$. Supposons par absurde que $\underbrace{\bar{x}\notin E}_{\neg Q}$, $\underbrace{E \text{ est fermé}}_{P}$

$\Rightarrow \bar{x}\in CE$ où CE est ouvert dans $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists\,\delta>0 : B(\bar{x},\delta)\subset CE \Rightarrow \{\bar{x}_k\ \forall k\in\mathbb{N}\}\cap B(\bar{x},\delta)=\emptyset$

D'autre côté, $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{x}_k=\bar{x} \Rightarrow \exists\, k_0\in\mathbb{N} : \forall k\geq k_0,\ \bar{x}_k\in\overline{B(\bar{x},\tfrac{\delta}{2})}\subset B(\bar{x},\delta)$

$\Rightarrow$ absurde. Alors $P\Rightarrow Q$.

$\Leftarrow$) par contraposée: $\neg P \Rightarrow \neg Q$. $Q\Rightarrow P$

Supposons que E n'est pas fermé. $\Leftrightarrow$ CE n'est pas ouvert.

$\Rightarrow \exists\,\bar{y}\in CE : \forall k\in\mathbb{N}_+\ B(\bar{y},\tfrac{1}{k})\cap E\neq\emptyset \Rightarrow \exists\,\bar{y}_k\in B(\bar{y},\tfrac{1}{k})$ tel que $\bar{y}_k\in E$

$\Rightarrow$ on a obtenu une suite $\{\bar{y}_k\}_{k\in\mathbb{N}_+}\subset E$, et $\lim\limits_{k\to\infty}\bar{y}_k=\bar{y}\in CE \Leftrightarrow \bar{y}\notin E$.

$\Rightarrow \neg Q$. Alors $Q\Rightarrow P$. $\blacksquare$

Remarque. Pour construire l'adhérance $\overline{E}$ d'un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$, il faut et il suffit d'ajouter les limites de toutes suites convergentes d'éléments de E. [Voir DZ §13.3.15].

Déf. Un sous-ensemble non-vide de $\mathbb{R}^n$ est compact s'il est fermé et borné.

Ex 1. Boule fermé $\overline{B(\bar{x},\delta)} = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\| \le \delta\}$

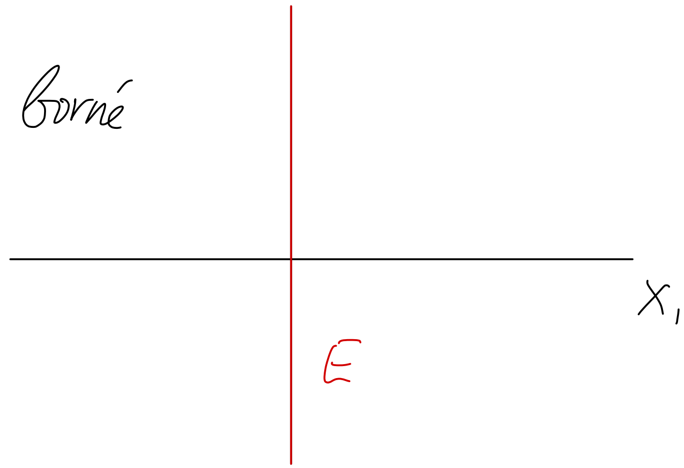
$$\left.\begin{array}{l} \overline{B(\bar{x},\delta)} \subset \overline{B(\bar{0}, \|\bar{x}\|+\delta)} \text{ borné} \end{array}\right\} \Rightarrow \text{compact}$$

Ex 2. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : n \ge 2,\ x_1 = 0\}$ - fermé, mais non borné

$\{\bar{a}_k = (0,k,0,\dots)\}_{k \in \mathbb{N}}$ les normes $\|a_k\| = k \in \mathbb{N}$

$\in E$ $\Rightarrow$ E n'est pas borné

$\Rightarrow$ E n'est pas compact.



Ex 3. $B(\bar{x},\delta)$ n'est pas compact: n'est pas fermé

mais borné : $B(\bar{x},\delta) \subset \overline{B(\bar{0}, \|\bar{x}\|+\delta)}$.

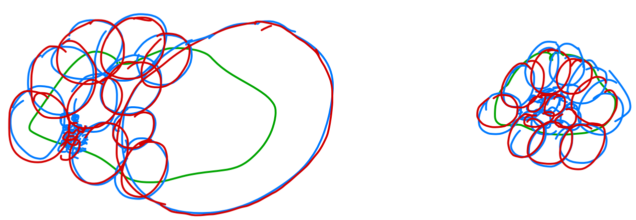
Thm (Heine-Borel-Lebesgue) Un sous-ensemble non-vide $E \subset \mathbb{R}^n$ est compact $\Longleftrightarrow$ de tout recouvrement de E par des sous-ensembles ouverts dans $\mathbb{R}^n$

($E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, $A_i \subset \mathbb{R}^n$ ouverts, $\forall i \in I$ - un recouvrement de E)

on peut extraire une famille finie d'ensembles que forment un recouvrement de E.

$\left(E \subset \bigcup_{i\in I} A_i \quad A_i \subset \mathbb{R}^n \text{ ouverts} \Rightarrow \exists \{A_{i_j}\}_{j=1}^m : E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}\right)$

peut être innombrable !



$E \subset \bigcup_{i\in I} A_i$

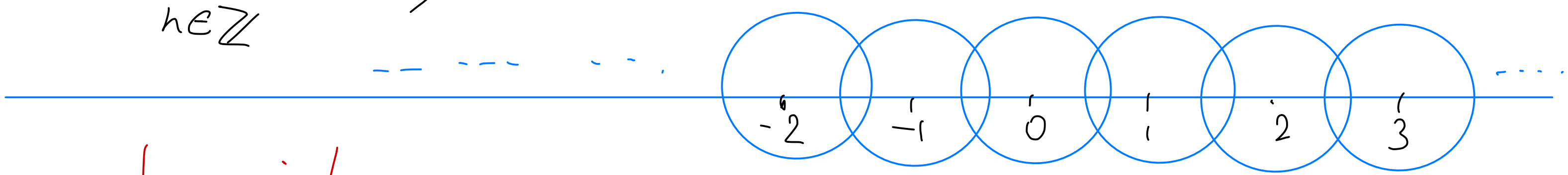
$E \subset \bigcup_{j=1}^m A_{i_j}$

infini d'ensembles $\Rightarrow$ # fini d'ensembles

Ne marche pas si E n'est pas compact !!

Ex1 Une droite dans $\mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ est fermé, pas borné $\Rightarrow$ pas compact

$E \subset \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} B(n, \frac{2}{3})$

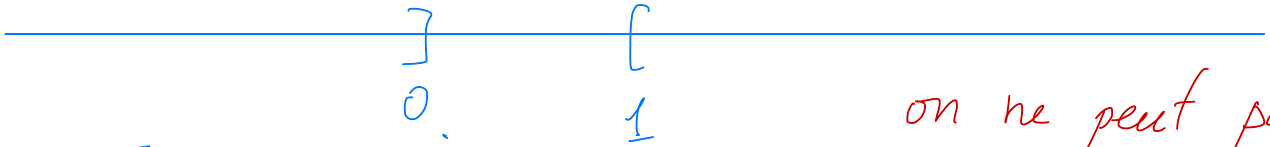


$E \subset \mathbb{R}^2$

on ne peut pas jeter un seul disque $\Rightarrow$ on ne peut pas choisir de sous-recouvrement fini.

Ex2

Intervalle ouvert $E =]0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas fermé $\Rightarrow$ n'est pas compact.



$$E \subset \bigcup_{i \in \mathbb{N}}]0, \tfrac{i}{i+1}[$$

on ne peut pas choisir un sous-recouvrement fini.

Exemples des sous-ensembles dans $\mathbb{R}^n$: ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé

Ex 1. $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ln(\sin(y-x)) \leq 0\}$

$\ln \sin(y-x)$ est bien défini $\Leftrightarrow \sin(y-x) > 0$

$\Leftrightarrow \quad y - x \in \,]2\pi k, \pi + 2\pi k[\,, \ k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \quad 2\pi k < y - x < \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

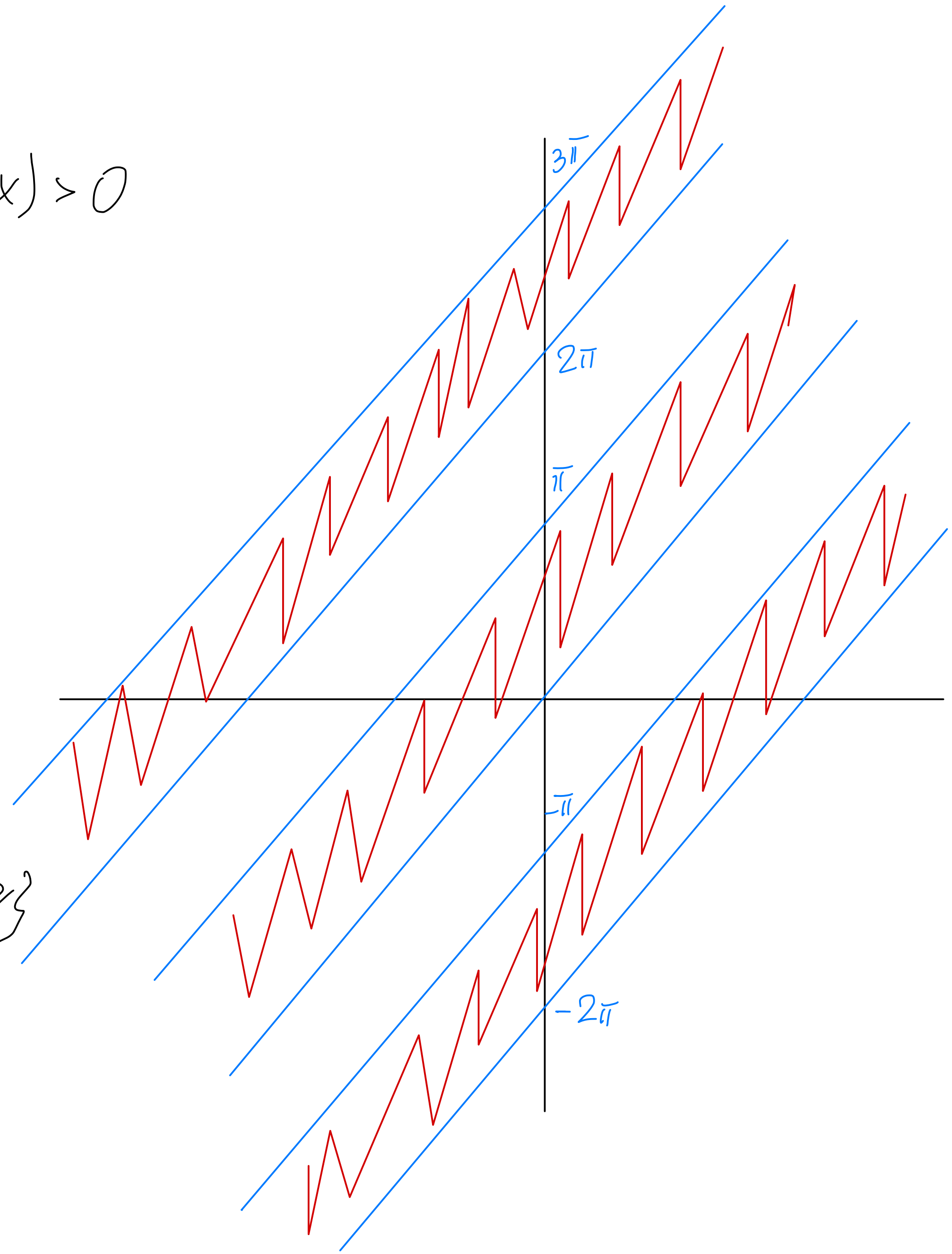
$\Leftrightarrow \quad 2\pi k + x < y < x + \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}$

$\ln(\sin(y-x)) \leq 0 \Rightarrow \sin(y-x) \leq 1$

toujours vrai !

$\Rightarrow A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2\pi k + x < y < x + \pi + 2\pi k, \ k \in \mathbb{Z}\}$

$\Rightarrow A$ est ouvert, non borné.



Question 6

$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sqrt{y \cdot \ln x} < 1\}$

Alors S est

A. compact

B. ouvert et borné

C. ni ouvert, ni fermé et non borné

D. fermé et non borné

E. ouvert et non borné

F. ni ouvert, ni fermé et borné

(1) $\ln x \Rightarrow x > 0$

(2) Soit $y = 0 \Rightarrow \{y = 0, x > 0\} \in S$

Aussi $\{x = 1, y \in \mathbb{R}\} \in S$

(3) Soit $y > 0 \Rightarrow y \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \geq 0$

$x \geq 1$

$y \ln x < 1 \Rightarrow y < \frac{1}{\ln x}$

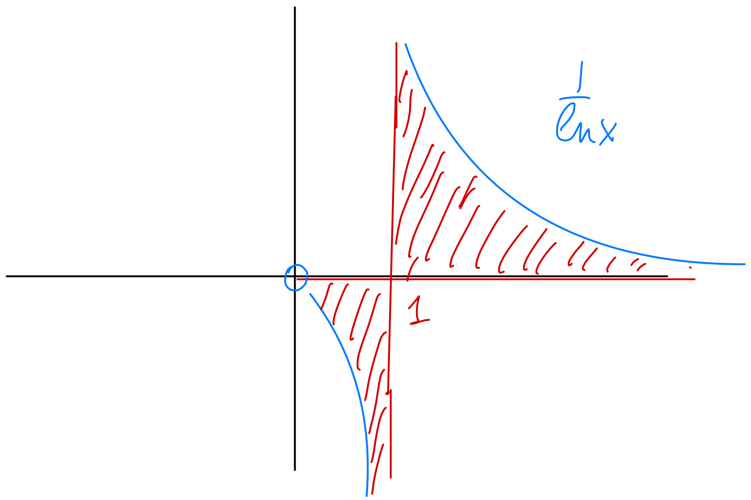
$\{y > 0, x > 1, y < \frac{1}{\ln x}\} \subset S$

(4) Soit $y < 0 \Rightarrow y \ln x \geq 0 \Rightarrow \ln x \leq 0$

$0 < x \leq 1$

$y \ln x < 1 \Rightarrow y > \frac{1}{\ln x}$

$\{y < 0, 0 < x < 1, y > \frac{1}{\ln x}\} \in S$



ni ouvert, ni fermé et non borné.

Chapitre 3. Fonctions réelles de plusieurs variables réelles : limites et continuité.

§31. Définitions et exemples.

Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ sous-ensemble non-vide, $n \geq 1$. Une fonction $f: E \to \mathbb{R}$ est une application qui envoie chaque point $\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \in E$ dans $\mathbb{R}$.
E est le domaine de définition de f, et $f(E) \subset \mathbb{R}$ est l'ensemble image.

Ex 1 $\quad f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$. $\qquad E = \{(x,y) \subset \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1\}$
disque de rayon 1 et centre $(0,0)$.

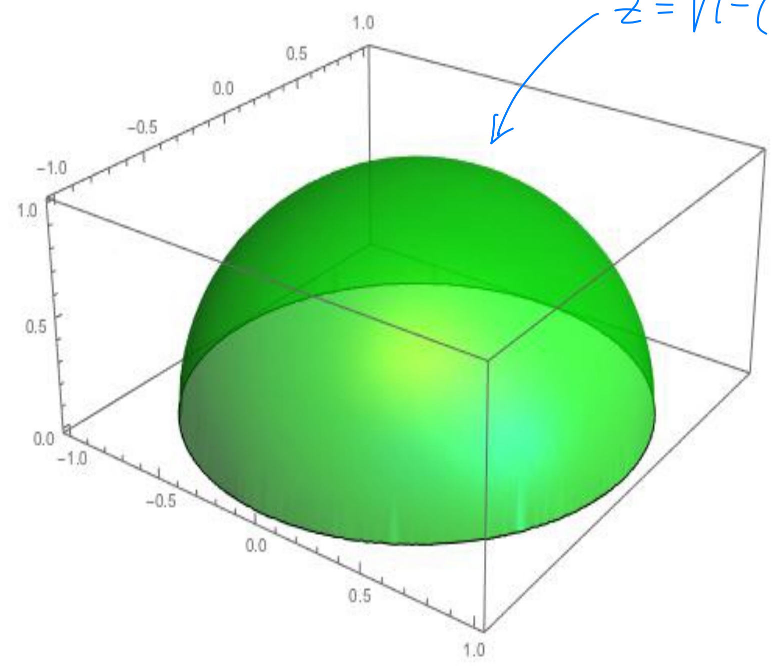
$$z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{cases} z \geq 0 \\ z^2 = 1-(x^2+y^2) \end{cases} \iff \begin{cases} z \geq 0 \\ x^2+y^2+z^2 = 1 \end{cases}$$

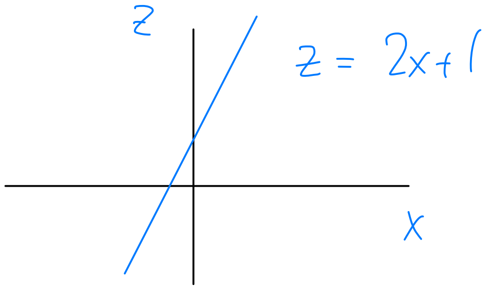
$\Rightarrow$ l'hemisphère de rayon 1
et de centre $(0,0,0) \in \mathbb{R}^3$

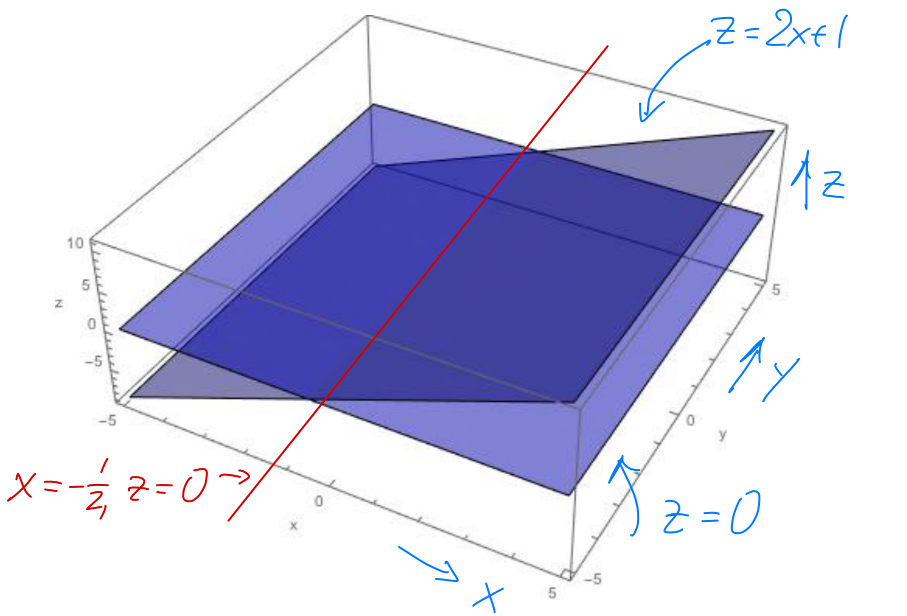
$z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$



Ex 2. $f(x,y) = 2x+1$

$z = 2x+1$





Ex 3. $f(x,y) = ax+by+c$; $a,b,c \in \mathbb{R}$, $E = \mathbb{R}^2$

Comment visualiser cette fonction ?

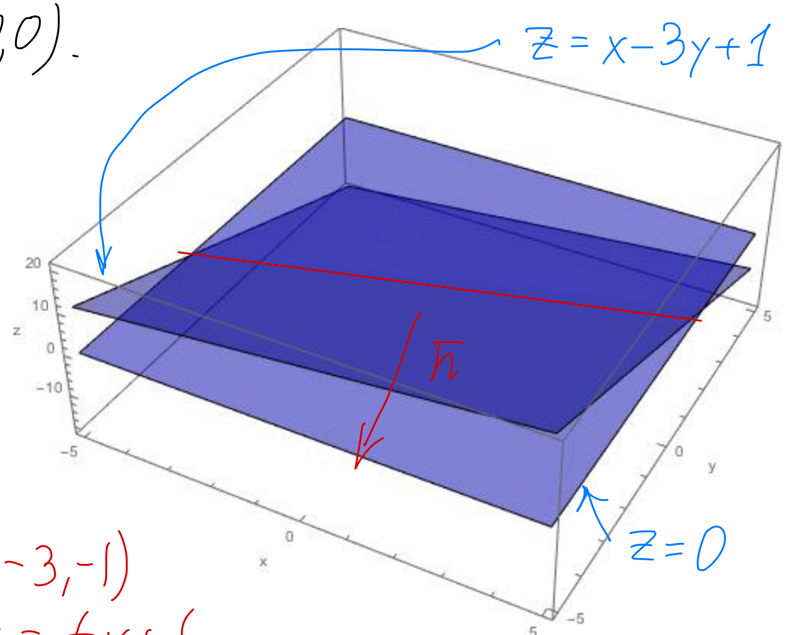
Soit $c=0$. Considérons $f(x,y) = ax+by$: Graphique $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by = z\} =$

$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : ax+by-z = 0\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \langle (x,y,z),(a,b,-1)\rangle = 0\}$

$=$ le plan orthogonal à $\bar{n} = (a,b,-1)$ et contenant $(0,0,0)$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ arbitraire. Il faut monter le plan par c unités le long de l'axe z pour obtenir le graphique de $f(x,y) = ax+by+c$

$z = ax+by+c$: le plan $\perp$ $\bar{n} = (a,b,-1)$ qui contient $(0,0,c)$.



$n = (1,-3,-1)$

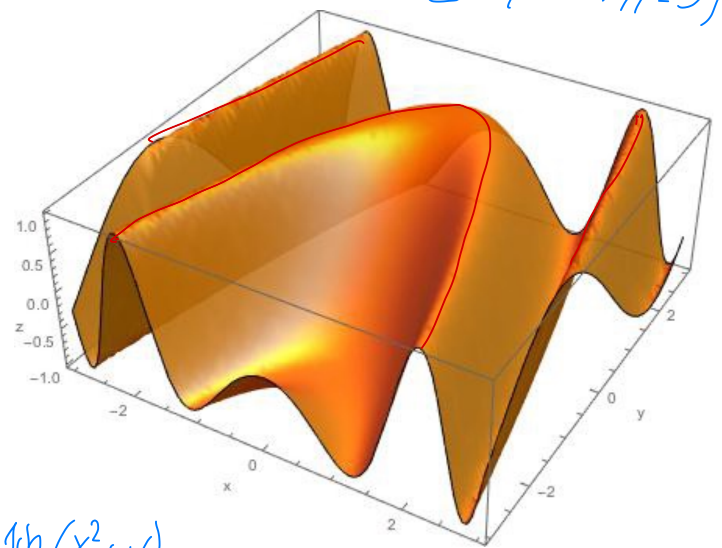
Si $z=0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$.

Déf. Soit $f: E \to \mathbb{R}$ et $c \in f(E)$. Alors $N_f(c) = \{\bar{x} \in E : f(\bar{x}) = c\} \subset E$ est appelé *l'ensemble de niveau* de f pour $c \in \mathbb{R}$

Ex 4. $f(x,y) = \sin(x^2+y)$: $E = \mathbb{R}^2$

$E = \{-3 \leq x, y \leq 3\}$

$$f(E) = [-1, 1]$$

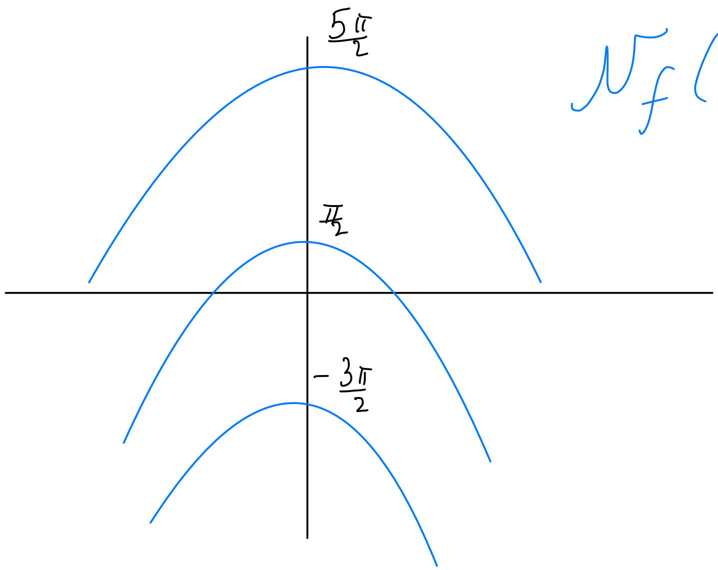


$f(x,y) = \sin(x^2+y)$

$$N_f(1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \sin(x^2+y) = 1\} =$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^2 + \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$



$N_f(1)$

$E = \{-5 \leq x \leq 5, -8 \leq y \leq 8\}$