Chapitre 2. Espace $\mathbb{R}^n$.

§ 2.1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

§ 2.2. Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

§ 2.3. L'adhérance et la frontière d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$.

§ 2.4. Suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$ et la topologie de $\mathbb{R}^n$.

Chapitre 2. Espace $\mathbb{R}^n$.

§2.1. $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

Déf $\mathbb{R}^n$ est un ensemble de tous les n-tuples ordonnés de nombres réels.

$$\bar{x} = (x_1 \dots x_n) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad \bar{x} \in \mathbb{R}^n \text{ un point (élément) } \bar{x} = (x_1 \dots x_n)$$

$\mathbb{R}^n$ est muni des 2 opérations

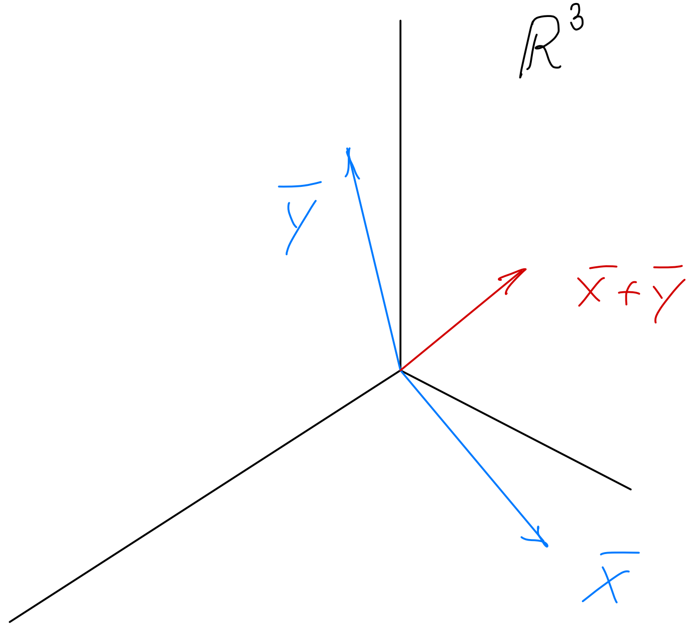
(1) $+$: $\bar{x} = (x_1 \dots x_n)$, $\bar{y} = (y_1 \dots y_n) \Rightarrow \bar{x} + \bar{y} \overset{\text{déf}}{=} (x_1 + y_1, \dots x_n + y_n)$

(2) multiplication par un nombre réel $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\bar{x} = (x_1 \dots x_n) \Rightarrow \lambda \cdot \bar{x} \overset{\text{déf}}{=} (\lambda x_1, \lambda x_2 \dots \lambda x_n).$$

les opérations satisfont les propriétés:

$$\begin{cases} (\lambda_1 \lambda_2)\bar{x} = \lambda_1(\lambda_2 \bar{x}) = \lambda_2(\lambda_1 \bar{x}) & \forall \bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \\ 1 \cdot \bar{x} = \bar{x} & \\ (\lambda_1 + \lambda_2)\bar{x} = \lambda_1 \bar{x} + \lambda_2 \bar{x} & \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \\ \lambda(\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bar{x} + \lambda \bar{y} & \forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$



Une base: $\left\{ \bar{e}_i = (0, 0, \dots \overset{i}{1}, \dots 0) \right\}_{i=1}^n \Rightarrow \bar{e}_i \in \mathbb{R}^n \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\bar{x} = \sum x_i \bar{e}_i = (x_1, x_2 \dots x_n)$$

Alors $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = (x_1 \dots x_n)$.

On introduit le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$:

Déf $\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \overset{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n$. et la norme euclidienne:

Déf $\|\bar{x}\| \overset{\text{déf}}{=} (\langle \bar{x}, \bar{x} \rangle)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \Rightarrow$ $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel normé.

Propriétés de la norme euclidienne:

(1) $\|\bar{x}\| \geq 0$ et $\|\bar{x}\| = 0 \Rightarrow \bar{x} = (0, 0, \dots 0)$

(2) $\bar{x} \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \|\lambda \cdot \bar{x}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{x}\|$ $\qquad \bar{x} = (x_1 \dots x_n) \in \mathbb{R}^n$

$\qquad \bar{y} = (y_1 \dots y_n) \in \mathbb{R}^n$

(3) Cauchy-Schwartz: $|\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle| \leq \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\|$ Voir la démonstration sur Moodle.

(4) Inégalité triangulaire : $\forall \bar{x}, \bar{y} \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \|\bar{x} + \bar{y}\| \leq \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|$.

(3) $\Rightarrow$ (4)

$$\|\bar{x} + \bar{y}\|^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$$

$$\qquad \qquad \| \qquad \qquad \wedge \text{ (Cauchy-Schwartz)} \qquad \| $$

$$(\|\bar{x}\| + \|\bar{y}\|)^2 = \langle \bar{x}, \bar{x} \rangle + 2 \|\bar{x}\| \cdot \|\bar{y}\| + \langle \bar{y}, \bar{y} \rangle$$

$$\Rightarrow \|\bar{x}\| + \|\bar{y}\| \geq \|\bar{x} + \bar{y}\|.$$

(5) Une autre inégalité triangulaire: $\|\bar{x} - \bar{y}\| \geq |\|\bar{x}\| - \|\bar{y}\||$

(4) $\Rightarrow$ (5) Exercice. Astuce: Cours 3, démonstration par disjonction des cas.

$$|x - y| \geq ||x| - |y|| \qquad \|\bar{x}\| = \|(\bar{x} - \bar{y}) + \bar{y}\|$$

Déf. L'expression $\|\bar{x}-\bar{y}\| = d(\bar{x},\bar{y})$ est appelée la distance entre $\bar{x}$ et $\bar{y}$ dans $\mathbb{R}^n$.

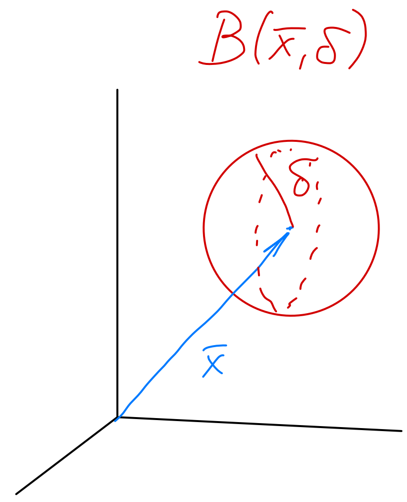
Alors: (1) $d(\bar{x},\bar{y}) = d(\bar{y},\bar{x})$

(2) $d(\bar{x},\bar{y}) = 0 \iff \bar{x}=\bar{y}$

(3) $d(\bar{x},\bar{y}) \leq d(\bar{x},\bar{z}) + d(\bar{z},\bar{y}) \quad \forall \bar{x},\bar{y},\bar{z} \in \mathbb{R}^n$

$\|\bar{x}-y\| = \|\bar{x}-\bar{z}+\bar{z}-\bar{y}\| \leq \|\bar{x}-\bar{z}\| + \|\bar{z}-\bar{y}\|$ triangulaire.

§ 2.2. Sous-ensembles ouverts et fermés de $\mathbb{R}^n$

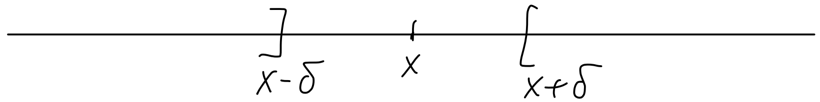


Déf. Pour tout $\bar x \in \mathbb{R}^n$ et tout nombre réel $\delta > 0$, soit
$$B(\bar x,\delta) = \{\bar y \in \mathbb{R}^n : \|\bar x - \bar y\| < \delta\}.$$
Alors $B(\bar x,\delta) \subset \mathbb{R}^n$ est appelé *la boule ouverte* de centre $\bar x$ et rayon δ.

Déf. $E \subset \mathbb{R}^n$ est *ouvert* $\overset{\text{déf}}{\Longleftrightarrow}$
$$\left[\begin{array}{l} (1)\ E = \emptyset \\ (2)\ E \neq \emptyset \text{ et pour tout } \bar x \in E \\ \quad \text{il existe } \delta > 0 \text{ tel que } B(\bar x,\delta) \subset E \end{array}\right.$$

Ex *Boule ouverte dans $\mathbb{R}$*: $B(x,\delta) = \{y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta\} = \,]x-\delta, x+\delta[$

intervalle ouvert



Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non-vide. Alors $\bar x \in E$ est *un point intérieur* de E s'il existe $\delta > 0$ tel que $B(\bar x,\delta) \subset E$. L'ensemble des points intérieurs est appelé *l'intérieure* de E. Notation: $\mathring{E}$.

Clairement, $\mathring{E} \subset E$

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ non vide. Alors $E \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert $\Longleftrightarrow$ $E = \mathring{E}$

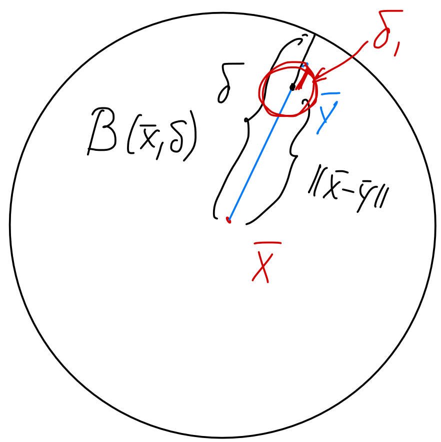
Ex 1. La boule ouverte $B(\bar{x},\delta)=\{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{x}-\bar{y}\|<\delta\}$ est un sous-ensemble ouvert.

Soit $\bar{y}\in B(\bar{x},\delta)$ Alors $\delta_1=\frac{1}{2}(\delta-\|x-y\|)>0$

$$\Rightarrow B(\bar{y},\delta_1)\subset B(\bar{x},\delta)$$

$\Rightarrow B(\bar{x},\delta)\subset\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

$\forall\bar{x}\in\mathbb{R}^n,\ \forall\delta>0.$



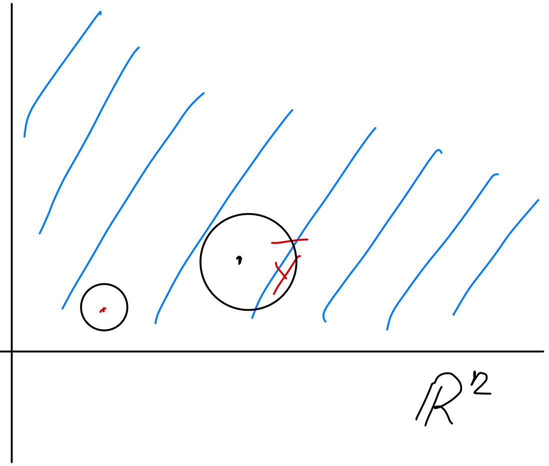
Ex 2. $E=\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n : x_i>0\ \forall i=1\dots n\}$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^n$

Soit $\bar{y}\in E \Rightarrow B(\bar{y},\frac{1}{2}\min(y_i))\subset E$

$\bar{y}=(y_1, y_2\dots y_n)$ min coordonné dans la boule

$y_j-\frac{1}{2}\min(y_i)>0$



Ex 3. $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n\subset\mathbb{R}^n$ sont des sous-ensembles ouverts

ouvert par def

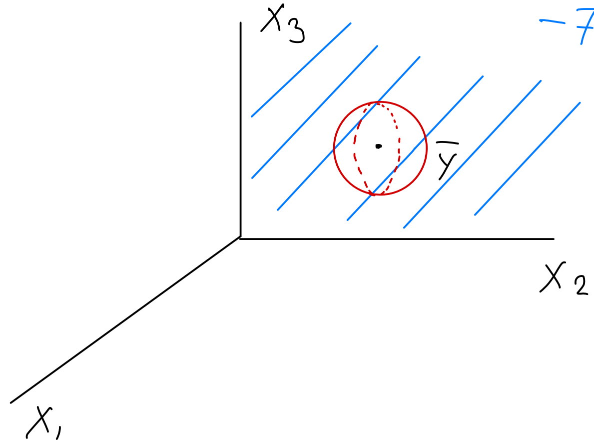
$\bar{x}\in\mathbb{R}^n\Rightarrow B(\bar{x},\delta)\subset\mathbb{R}^n\quad\forall\delta>0.$

Ex 4. Soit $n \geq 2$ $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2 \dots n\} \subset \mathbb{R}^n$

Soit $\bar{y} = (0, y_2^{>0}, y_3^{>0}, \dots) \in E$ Alors pour tout $\delta > 0$

$$\Big(\underbrace{\tfrac{\delta}{2}}_{\notin E}, y_2, y_3 \dots\Big) \in B(\bar{y}, \delta) \not\subset E$$

$\Rightarrow E$ n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^n$



Propriétés (1) Toute réunion $\bigcup_{i \in I} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert.

$\bar{x} \in \bigcup_{i \in I} E_i \Rightarrow \exists j : \bar{x} \in E_j$ E_j est ouvert $\Rightarrow \exists \delta > 0 : B(\bar{x}, \delta) \subset E_j$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} E_i$

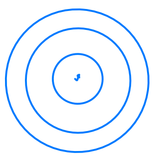
(2) Toute intersection finie $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ des sous-ensembles ouverts est un sous-ensemble ouvert:

$\bar{x} \in \bigcap_{i=1}^{n} E_i \Rightarrow \forall j$ $\bar{x} \in E_j$ ouvert $\Rightarrow \exists \delta_j > 0 : B(\bar{x}, \delta_j) \subset E_j$

$\Rightarrow B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset E_j \ \forall j \Rightarrow B(\bar{x}, \min_j \delta_j) \subset \bigcap_{i=1}^{n} E_i = E.$

Remarque. Intersection infinie des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^n$ n'est pas forcément ouvert

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} B(\bar{0}, \tfrac{1}{k}) = \{\bar{0}\} \subset \mathbb{R}^n \text{ n'est pas ouvert}$$

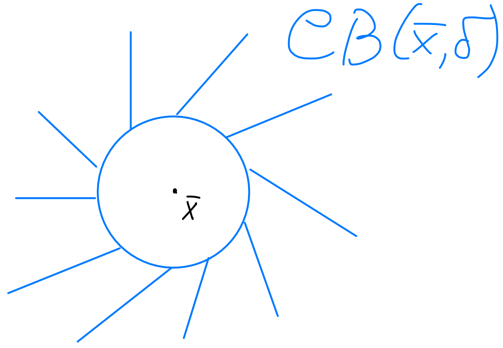


$\bar{0}$

Déf. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble. Alors E est *fermé* dans $\mathbb{R}^n$ si son complémentaire $CE \overset{\text{déf}}{=} \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \notin E\} = \mathbb{R}^n \setminus E$ est ouvert.

Ex 1. $CB(\bar{x}, \delta) = E \subset \mathbb{R}^n$ est fermé : $E = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq \delta\}$

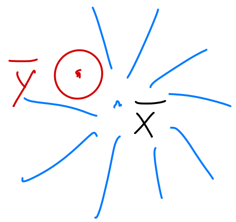
puisque $C(CB(\bar{x}, \delta)) = B(\bar{x}, \delta)$ est ouvert



Ex 2. $E = \{\bar{x}\} \subset \mathbb{R}^n$ est fermé

$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| > 0\}$

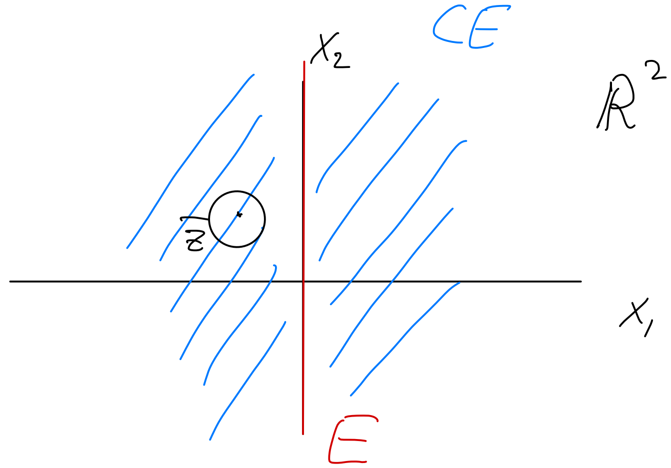
$\forall \bar{y} \in CE$ la boule $\bar{B}(\bar{y}, \frac{1}{2}\|\bar{y} - \bar{x}\|) \subset CE$

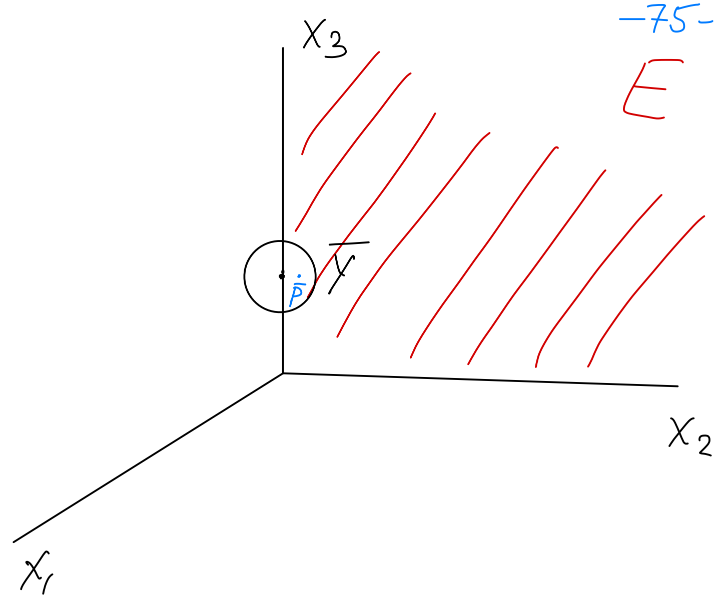


Ex 3. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0\}$ est fermé

$CE = \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : y_1 \neq 0\}$ est ouvert : $\forall \bar{z} \in CE$

$z_1 \neq 0 \Rightarrow B(\bar{z}, \frac{1}{2}|z_1|)$





Ex 4. $E = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : x_1 = 0, x_i > 0, i = 2 \dots n\}, n \geq 2$

$E = \{\bar{x} : x_1 = 0\} \cap \{\bar{x} : x_2 > 0\} \cap \dots \cap \{\bar{x} : x_n > 0\}$

$CE = \{\bar{x} : x_1 \neq 0\} \cup \{\bar{x} : x_2 \leq 0\} \cup \dots \cup \{\bar{x} : x_n \leq 0\}$

$\bar{y} = (0, \underbrace{0}_{\leq 0}, y_3 > 0 \dots y_n > 0) \in CE$

Pour $\delta > 0$, $B(\bar{y}, \delta)$ contient

$\bar{p} = (0, \underbrace{\tfrac{\delta}{2}}_{>0}, \underbrace{y_3}_{>0}, \underbrace{y_4}_{>0}, \dots \underbrace{y_n}_{>0}) \in E \Rightarrow \bar{p} \notin CE \;\; \forall \delta > 0$

$\Rightarrow$ CE n'est pas ouvert $\Rightarrow$ E n'est pas fermé

E ni ouvert, ni fermé

Exercice. $E =]0, 1] \subset \mathbb{R}$

(1) $\forall \delta > 0$, $B(1, \delta) =]1-\delta, 1+\delta[\not\subset E \Rightarrow E \subset \mathbb{R}$ n'est pas ouvert.

(2) $CE =]-\infty, 0] \cup]1, \infty[\subset \mathbb{R}$; $0 \in CE$ mais $\forall \delta > 0$ $B(0, \delta) =]-\delta, \delta[\not\subset CE$

$\Rightarrow$ CE n'est pas ouvert $\Rightarrow$ E n'est pas fermé.

Ex 5 $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$ sont fermé : $C\emptyset = \mathbb{R}^n$ ouvert

$C\mathbb{R}^n = \emptyset$ ouvert

Les seuls sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$ fermés et ouverts à la fois sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}^n$.

[DZ]

Propriété des sous-ensembles fermés.

(1) $\bigcap_{i\in I} E_i$ Toute intersection des sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

$\left(CE = \bigcup_{i\in I} CE_i \text{ est ouvert} \right)$.

(2) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$ Toute réunion finie des sous-ensembles fermés est un sous-ensemble fermé.

$\left(CE = \bigcap_{i=1}^{n} CE_i \text{ est ouvert} \right)$.

Question 5

Soient A et B deux sous-ensembles ouverts non-vides de $\mathbb{R}^n$.

Soit $A \setminus B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \bar{x} \in A \text{ et } \bar{x} \notin B\}$ non-vide

A. $A \setminus B$ peut être ouvert, fermé, ou ni ouvert ni fermé

B. $A \setminus B$ est soit ouvert, soit fermé

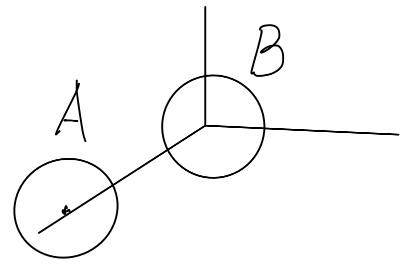
C. $A \setminus B$ ne peut pas être ouvert

D. $A \setminus B$ ne peut pas etre fermé

Contre-exemple pour C : $A = B(\bar{y}, 1)$ $\quad B = B(\bar{0}, 1)$

$\bar{y} = (3, 0, 0, \dots 0)$

$A \setminus B = A$ est ouvert

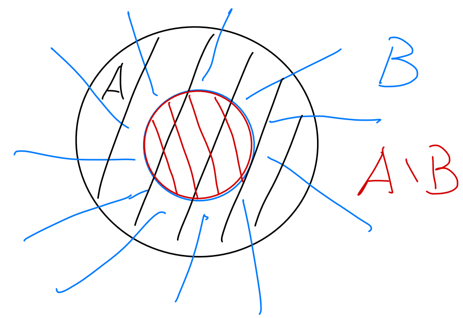


Contre-exemple pour D : $A = B(\bar{0}, 2)$ $\quad B = C\,\overline{B(\bar{0}, 1)}$ ouvert

$A \setminus B = \overline{B(\bar{0}, 1)}$ est fermé

$= \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{x}\| \leq 1\}$

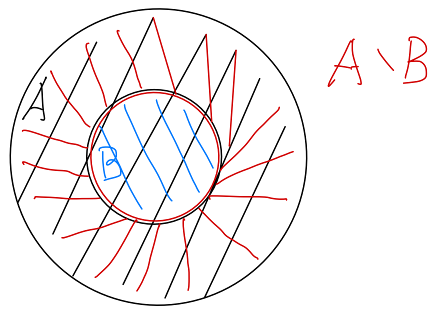
boule fermé



Contre-exemple pour B : $A = B(\bar{0}, 2)$, $B = B(\bar{0}, 1)$

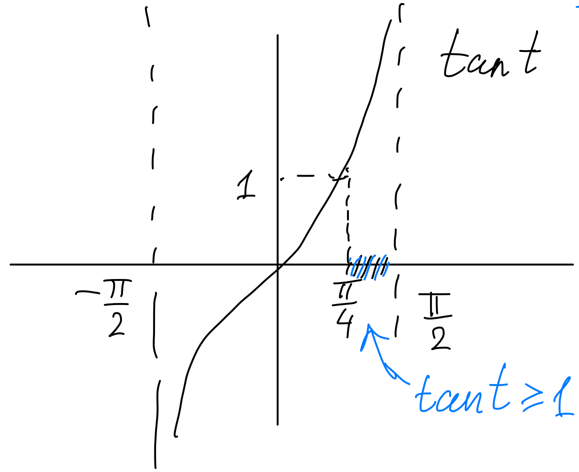
$\Rightarrow A \setminus B = \{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |\bar{x}| < 2\}$

ni ouvert ni fermé



Ex 5 $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \tan(x+y) \geq 1\}$

A ouvert, fermé, ni ouvert ni fermé ?



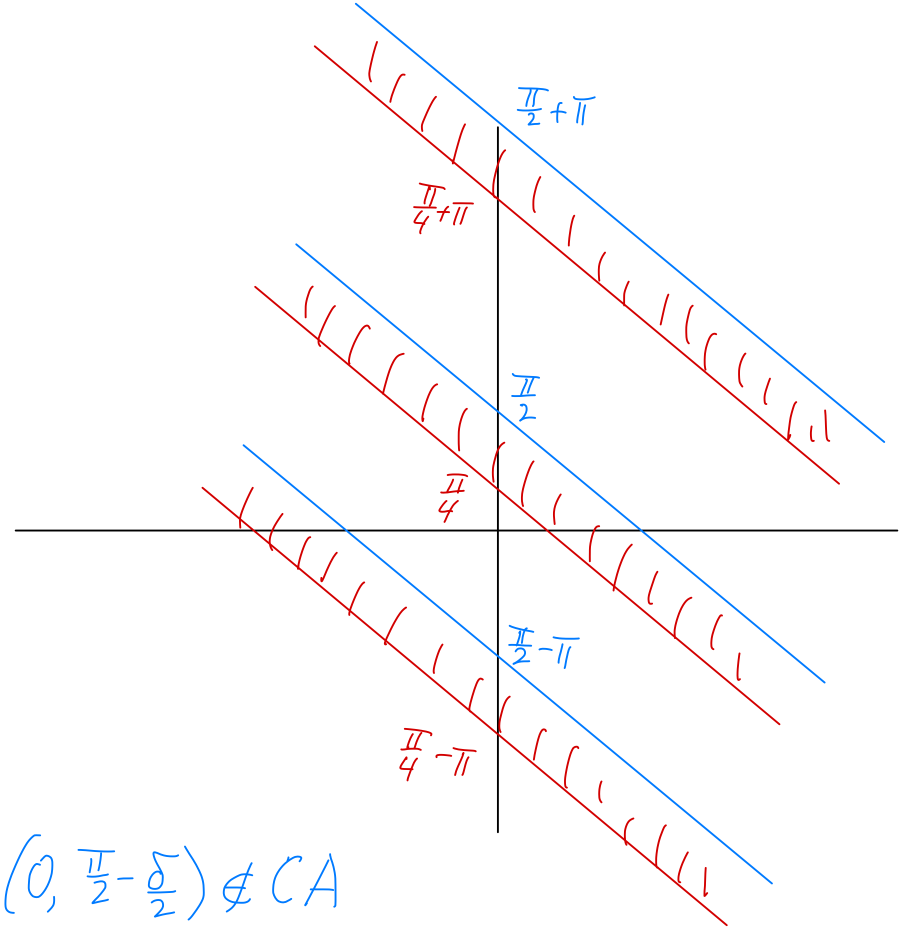
$\tan t$ existe $\Rightarrow t \in \left]-\frac{\pi}{2}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[\quad k \in \mathbb{Z}$

$\tan t \geq 1 \Rightarrow t \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[\quad \forall k \in \mathbb{Z}$

$x+y \in \left[\frac{\pi}{4}+\pi k, \frac{\pi}{2}+\pi k\right[$

$\frac{\pi}{4}+\pi k \leq x+y < \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\frac{\pi}{4}+\pi k - x \leq y < \frac{\pi}{2}+\pi k - x$



A est ni ouvert, ni fermé

(1) A n'est pas ouvert : $(x,y) = \left(0, \frac{\pi}{4}\right) = p \in A$

$\forall \delta > 0 \quad B(p, \delta)$ contient $\left(0, \frac{\pi}{4} - \frac{\delta}{2}\right) \notin A$.

(2) A n'est pas fermé : $(x,y) = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) = q \in CA$

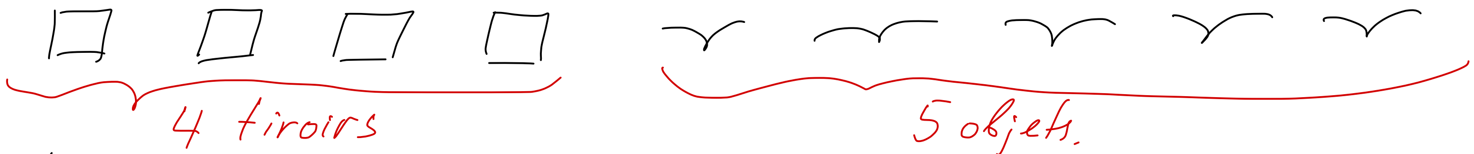
$\forall \delta > 0 \quad B(q, \delta)$ contient $\left(0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \in A \Rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2} - \frac{\delta}{2}\right) \notin CA$

$\Rightarrow$ CA n'est pas ouvert $\Rightarrow$ A n'est pas fermé.

Méthodes de démonstration.

Méthode 6. Démonstration par le principe des tiroirs

Principe des tiroirs. Si $(n+1)$ objets sont placés dans n tiroirs, alors au moins un tiroir contient 2 objets ou plus.



Plus généralement. Si n objets sont placés dans k tiroirs, alors au moins un tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil = \min\{m \in \mathbb{N} : m \geq \frac{n}{k}\}$ objets, ou plus

fonction plafond

Ex 1. Soient $\{a_1 \dots a_n\}_{n\geq 2}$ des nombres entiers. Alors il existe 2 d'entre eux tels que leur difference est divisible par $n-1$

Dém: Soient $r_1 \dots r_n$ les restes de division de $a_1 \dots a_n$ par $(n-1)$

Alors $r_1 \dots r_n = \{0, 1, 2 \dots n-2\}$. Par le principe de tiroirs il existe

$2 = \left\lceil \frac{n}{n-1} \right\rceil$ restes qui sont les mêmes $\Rightarrow r_i = r_j \Rightarrow (a_i - a_j)$ est divisible par $n-1$

$\square$

Ex 2. Soit $A = \{a_1 \dots a_{n+1}\}$ un ensemble des nombres naturels distincts tels que $1 \leq a_i \leq 2n \quad \forall i = 1, \dots\dots n+1$

Alors il existe deux nombres dans A dont la somme est $2n+1$.

Dém: Tiroirs : $\boxed{\begin{matrix} 1 \\ 2n \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 2 \\ 2n-1 \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} 3 \\ 2n-2 \end{matrix}} \quad \dots \quad \boxed{\begin{matrix} n \\ n+1 \end{matrix}}$ n tiroirs, la somme dans chacun est $= 2n+1$.

On tire $(n+1)$ nombres arbitrairement de n tiroirs $\Rightarrow$ au moins $2 = \left\lceil \frac{n+1}{n} \right\rceil$ nombres sont tiré du même tiroir $\Rightarrow$ la somme de ces deux nombres tirés du même tiroir est $= 2n+1$