

Méthode des coefficients indéterminés pour $y''(x) + py'(x) + qy(x) = f(x)$ (3)

On sait obtenir 2 solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée: $y''(x) + py'(x) + qy(x) = 0 \Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0, p, q \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow a, b$ les racines $\Rightarrow 3$ cas

En principe on peut trouver une solution particulière de l'équation complète par la méthode de variation des constantes.

Dans certains cas il est possible de trouver une solution particulière de (3) plus vite par la méthode des coefficients indéterminés:

$$\text{Soit } y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x) \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue}$$

$\Rightarrow$ L'organigramme $\Rightarrow$

(1) $f(x)$ est-elle une combinaison linéaire de $e^{cx} R_n(x)$ et $e^{ax} (\cos(bx) P_k(x) + \sin(bx) Q_m(x))$,
où $R_n(x)$, $P_k(x)$, $Q_m(x)$ sont des polynômes de degrés n, m, k , et $c, a, b \in \mathbb{R}$? -59-

la méthode ne marche pas
 $\Rightarrow$ méthode de variation
des constantes

$\Rightarrow$ (2) Si $f(x) = e^{cx} R_n(x)$, le nombre $c \in \mathbb{R}$ est-il
une racine de l'équation caractéristique $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$?

Ansatz: $y_{\text{part}} = e^{cx} T_n(x)$

Ansatz: $y_{\text{part}} = x^r e^{cx} T_n(x)$

où r est la multiplicité de la racine $\lambda = c$, $r = 1$ ou 2 ,
et $T_n(x)$ est un polynôme de degré n à coefficients indéterminés

$\Rightarrow$ (3) Si $f(x) = e^{ax} (\cos(bx) P_k(x) + \sin(bx) Q_m(x))$,
le nombre $a + ib$ est-il une racine de $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$?

Ansatz: $y_{\text{part}} = e^{ax} (T_N(x) \cos bx + S_N(x) \sin bx)$

Ansatz: $y_{\text{part}} = x e^{ax} (T_N(x) \cos bx + S_N(x) \sin bx)$

où $N = \max(k, m)$, $T_N(x)$ et $S_N(x)$ sont des polynômes de degré N
à coefficients indéterminés.

Remarque. Si $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ où $f_1(x)$ est de la forme $e^{ax} R_n(x)$,
et $f_2(x)$ de la forme $e^{ax} (S_n(x) \cos(bx) + Q_m(x) \sin(bx))$, alors on utilise
la méthode pour $f_1(x)$ et $f_2(x)$ séparément

$\rightarrow y_{part_1}(x)$ $\rightarrow y_{part_2}(x)$

et le principe de superposition des solutions

$$\rightarrow y_{part}(x) = y_{part_1}(x) + y_{part_2}(x).$$

Ex3. $y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin 3x$. Trouver la solution générale, $x \in \mathbb{R}$.

(i) L'équation homogène associée : $y'' + 2y' + 10y = 0$
 $\Rightarrow$ l'équation caractéristique $\lambda^2 + 2\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 40}}{2} =$
 $= -1 \pm 3i \Rightarrow \lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i.$

$$\underline{y_{hom}(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x} \quad x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

- solution générale de l'équation homogène associée

(2) Solution particulière de l'équation complète par la méthode de coefficients indéterminés.

-6/-

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin 3x \Rightarrow f(x) = 40e^x \sin 3x \text{ de la forme } e^{ax} \sin(bx) \cdot Q(x).$$

où $a = 1$, $b = 3$, $Q(x) = 40$, degré $n = 0$.

$a + ib = 1 + 3i$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique
 $\lambda_{1,2} = -1 \pm 3i$

$\Rightarrow$ Alors l'Ansatz est : $y_{\text{part}}(x) = e^x (A \cos 3x + B \sin 3x) = Ae^x \cos 3x + Be^x \sin 3x$.

$\rightarrow$ remplacer dans l'équation :

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_p'(x) &= Ae^x \cos 3x - 3Ae^x \sin 3x + Be^x \sin 3x + 3Be^x \cos 3x = \\ &= (A + 3B)e^x \cos 3x + (B - 3A)e^x \sin 3x. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_p''(x) &= (A + 3B + 3B - 9A)e^x \cos 3x + (B - 3A - 3A - 9B)e^x \sin 3x = \\ &= (6B - 8A)e^x \cos 3x + (-8B - 6A)e^x \sin 3x \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ dans l'équation $\Rightarrow$

$$y'' + 2y' + 10y = 40e^x \sin 3x$$

$$(6B - 8A + 2A + 6B + 10A)e^x \cos 3x + (-8B - 6A + 2B - 6A + 10B)e^x \sin 3x = -62e^x \sin 3x$$

$$(12B + 4A)e^x \cos 3x + (4B - 12A)e^x \sin 3x = 40e^x \sin 3x$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12B + 4A = 0 \\ 4B - 12A = 40 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3B \\ B - 3A = 10 \Rightarrow B + 9B = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -3 \\ B = 1 \end{cases}$$

$$y_p = -3e^x \cos 3x + e^x \sin 3x$$

Vérification

$$y'_{part}(x) = -3e^x \cos 3x + 9e^x \sin 3x + e^x \sin 3x + 3e^x \cos 3x = 10e^x \sin 3x$$

$$y''_{part}(x) = 10e^x \sin 3x + 30e^x \cos 3x$$

$$y''_{part}(x) + 2y'_{part}(x) + 10y_{part}(x) = 10e^x \sin 3x + 30e^x \cos 3x + 20e^x \sin 3x - 30e^x \cos 3x + 10e^x \sin 3x = 40e^x \sin 3x.$$



$$\underline{y(x) = C_1 e^{-x} \cos 3x + C_2 e^{-x} \sin 3x - 3e^x \cos 3x + e^x \sin 3x}$$

$$x \in \mathbb{R}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Remarque. On peut obtenir le même résultat par la méthode de variation des constantes.

$$v_1(x) = e^{-x} \cos 3x, \quad v_2(x) = e^{-x} \sin 3x$$

$$\Rightarrow W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} e^{-x} \cos 3x & e^{-x} \sin 3x \\ -e^{-x} \cos 3x - 3e^{-x} \sin 3x & -e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x \end{pmatrix} = \int e^{2x} = \underline{3e^{-2x}} \neq 0$$

sur $\mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} c'_1(x) \\ c'_2(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{3e^{-2x}} \begin{pmatrix} -e^{-x} \sin 3x + 3e^{-x} \cos 3x & -e^{-x} \sin 3x \\ e^{-x} \cos 3x + 3e^{-x} \sin 3x & e^{-x} \cos 3x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 40e^x \sin 3x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{40}{3} e^{2x} \sin^2 3x \\ +\frac{40}{3} e^{2x} \cos 3x \sin 3x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{20}{3} e^{2x} \cos 6x - \frac{20}{3} e^{2x} \\ \frac{20}{3} e^{2x} \sin 6x \end{pmatrix}$$

Intégrales:

$$\int e^{2x} \sin 6x \, dx = \frac{1}{20} e^{2x} \sin 6x - \frac{3}{20} e^{2x} \cos 6x$$

$$\int e^{2x} \cos 6x \, dx = \frac{1}{20} e^{2x} \cos 6x + \frac{3}{20} e^{2x} \sin 6x$$

$$\Rightarrow C_1(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \cos 6x + e^{2x} \sin 6x - \frac{10}{3} e^{2x}, \quad C_2(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 6x - e^{2x} \cos 6x$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y_{\text{part}}(x) &= C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x) = \frac{1}{3} e^{2x} \cos 6x \left(\overbrace{e^{-x} \cos 3x}^{v_1(x)} \right) + e^{2x} \sin 6x \left(e^{-x} \cos 3x \right) - \\ &- \frac{10}{3} e^{2x} \left(e^{-x} \cos 3x \right) + \frac{1}{3} e^{2x} \sin 6x \left(\underbrace{e^{-x} \sin 3x}_{v_2(x)} \right) - e^{2x} \cos 6x \left(e^{-x} \sin 3x \right) = \end{aligned}$$

$$= \left[\text{Exercice}^* \right] = \underline{-3 e^x \cos 3x + e^x \sin 3x} \quad \text{la même solution particulière qu'avant :)}$$

Ex 3. $y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 20x^4 + 1$ sur $]0, \infty[$ -65-

Rappel: solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée:

$v_1(x) = x, v_2(x) = x^2$. Solution générale de l'équation homogène:

$v_{\text{hom}}(x) = C_1 x + C_2 x^2$

(Voir cours 4).

Wronskien: $W[v_1, v_2](x) = \begin{vmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{vmatrix} = 2x^2 - x^2 = x^2 \neq 0 \quad x \in]0, \infty[$

$C_1(x) = - \int \frac{f(x) v_2(x)}{W[v_1, v_2]} dx = - \int \frac{(20x^4 + 1) \cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} dx = -4x^5 - x$

$C_2(x) = + \int \frac{f(x) v_1(x)}{W[v_1, v_2]} dx = \int \frac{(20x^4 + 1)x}{x^2} dx = \int \left(20x^3 + \frac{1}{x} \right) dx = 5x^4 + \ln x, \quad x > 0$

$\Rightarrow v_0(x) = C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x) = (-4x^5 - x) x + (5x^4 + \ln x) x^2 =$

$= -4x^6 - x^2 + 5x^6 + x^2 \ln x = \underbrace{x^6 - x^2}_{v_2(x)} + x^2 \ln x.$

$\Rightarrow v_0(x) = x^6 + x^2 \ln x$ est une solution particulière de l'équation complète

Vérification $v_0(x) = x^6 + x^2 \ln x \rightarrow y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 20x^4 + 1.$ -66-

$$v_0'(x) = 6x^5 + 2x \ln x + x \quad ; \quad v_0''(x) = 30x^4 + 2 \ln x + 2 + 1$$

$\rightarrow$ dans l'équation :

$$30x^4 + \cancel{2 \ln x} + 3 - \cancel{12x^4} - \cancel{4 \ln x} - 2 + \cancel{2x^4} + \cancel{2 \ln x} = 20x^4 + 1 \quad \text{😊}$$

Solution générale de l'équation complète :

$$y(x) = C_1 x + C_2 x^2 + x^6 + x^2 \ln x \quad x \in]0, \infty[, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Méthode 5. Démonstration par absurde.

Proposition P

Idée: Pour démontrer P , on essaie de démontrer que $\neg P$ implique une proposition F qui est connue d'être fausse.

(Donc $\neg P \Rightarrow F$ qui est contradictoire aux axiomes, ou aux propositions vraies préalablement établies).

Par contraposée: $P \Rightarrow Q \xLeftrightarrow[\text{méthode 2}] \neg Q \Rightarrow \neg P$

Par absurde: $P \xLeftrightarrow[\text{méthode 5}] \neg P \Rightarrow F$ évidemment fausse.

Ex 1. Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration par absurde (Euclide).

Supposons qu'il existe seulement un nombre fini $n \in \mathbb{N}$ de nombres

premiers : $p_1, p_2, \dots, p_n$ $p_i \in \mathbb{N}_+ \quad \forall i = 1 \dots n$

Soit $K = p_1 p_2 \dots p_n + 1$

On a: $K > p_i$ pour tout $p_i \in \{p_1, \dots, p_n\} \Rightarrow K \neq p_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$ -68-
 $\Rightarrow K$ n'est pas premier, $K > 1$.

$\Rightarrow K$ est divisible par un nombre premier d'entre $\{p_1, \dots, p_n\}$, disons p_i .
Evidemment, $p_1 \dots p_n$ est aussi divisible par p_i .

Alors $K - p_1 \dots p_n = \underline{1}$ est divisible par $p_i \Rightarrow$ absurde



Ex2 $\sqrt{2}$ est irrationnel (Euclide). ($\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$)

Dém. par absurde. Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ est rationnel
 $p, q \in \mathbb{Z}, q > 0$
tels que q est le plus petit possible

Alors $2 = \frac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2 \Rightarrow p$ est pair (sinon $p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k^2 + 4k + 1$ est impair)

$p = 2m, m \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2q^2 = 4m^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow$ par le même argument

q est pair $\Rightarrow q = 2n, n \in \mathbb{Z}$

$\frac{p}{q} = \frac{2m}{2n} = \frac{m}{n} = \sqrt{2}$, absurde, contradiction avec le choix
de q le plus petit possible, $q > 0$.



Ex 3. Il n'existe pas de nombres entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$18x - 54y = 21$$

Dém: par absurde.

Supposons qu'il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que

$$18x - 54y = 21$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6y = 2 + \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{2x - 6y - 2}_{\in \mathbb{Z}} = \underbrace{\frac{1}{3}}_{\notin \mathbb{Z}} \Rightarrow \text{absurde.}$$

