Cours 6 - Méthode des coefficients indéterminés

dimanche 2 mars 2025 23:42

1

Rappel (EDL2 à coefficients constants)

$y''+py'+qy=f$ avec $p,q\in\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ continue

$\Rightarrow y=y_p+y_h$ sur I

Rappel (Solution générale à l'équation homogène associée)

1. On cherche les racines **a**, **b** de l'équation caractéristique. $\lambda^2+p\lambda+q=0$.
2. Trois cas pour la solution générale de l'équation homogène associée (**f = 0**).

$$y_h=\begin{cases} c_1e^{ax}+c_2e^{bx}, & \text{si } a\neq b\in\mathbb{R},\\ c_1e^{ax}+c_2xe^{ax}, & \text{si } a=b\in\mathbb{R},\\ c_1\underbrace{e^{\alpha x}\cos\beta x}_{v_1(x)}+c_2\underbrace{e^{\alpha x}\sin\beta x}_{v_2(x)} & \text{si } a=\alpha+i\beta=\overline{b}\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}. \end{cases}\quad ; C_1,C_2\in\mathbb{R}$$

$\to y_p(x)=c_1(x)v_1(x)+c_2(x)v_2(x)$

Rappel (Méthode de la variation des constantes) (Pour chercher la solution particulière)

1. On calcule le Wronskien de **v1(x)** et **v2(x)**. $W[v_1,v_2]=\det\begin{pmatrix} v_1 & v_2\\ v_1' & v_2'\end{pmatrix}$
2. On calcule les fonctions **c1(x)** et **c2(x)**.

$\hookrightarrow c_1(x)=-\int\frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1,v_2]}dx$; $c_2(x)=\int\frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1,v_2]}dx$

(à savoir par ♡)

$y''+3y'+2y=e^{7x}x^{100}$ $(c=7)$

$=e^{-x}x^2$ $(c=-1)$

$\lambda^2+3\lambda+2\Rightarrow a=-1, b=-2$

2

Méthode. (Coefficients indéterminés) (Pour chercher la solution particulière)

Pour des fonctions **f(x)** spéciales, une méthode alternative ("plus rapide") existe !

(Cas 1). $f(x)=e^{cx}R_n(x)$; $c\in\mathbb{R}$, $R_n(x)$ polynôme degré $n\in\mathbb{N}_{\geq 0}$

$\Rightarrow y_p(x)=x^re^{cx}T_n(x)$

Avec **r = 0, 1, ou 2** la multiplicité de **c** dans l'équation caractéristique, $\lambda^2+p\lambda+q=0$

T_n(x) un polynôme à déterminer de degré **n**.

(Cas 2). $f(x)=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)P_k(x)+\sin(\beta x)Q_m(x))$; $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $P_k(x)$ deg k, $Q_m(x)$ deg m. ($P_k(x)=x^2$, $Q_m(x)=x^3+1$)

$\Rightarrow y_p(x)=x^re^{\alpha x}(\cos(\beta x)T_N(x)+\sin(\beta x)S_N(x))$

$(\lambda-1)^2=0 \Downarrow \lambda_1=\lambda_2=1$

⚠ Avec **r = 1** si $\alpha+i\beta$ est racine de l'équation caractéristique, et **r = 0** sinon,

T_N(x) et **S_N(x)** des polynômes à déterminer de degré **N = max(k, m)**. $=3$

> Pour déterminer les coefficients des polynômes inconnus $\to y_p, y_p', y_p'' \to$ EDL2

1. Calculer les dérivées de la solution particulière.
2. Remplacer dans l'équation initiale, et résoudre l'équation.

ex : $f(x)=70x$; $f(x)=\sin(x)x^7$; $f(x)=e^{-3x}$

$f(x)=e^{-3x}x^{-3}$

3

$\lambda^2+(m+n)\lambda+1$

Exemple. $y''+2y'+10y=40e^x\sin(3x)$

1) (homogène) $\lambda^2+2\lambda+10=0$

$\lambda_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{4-40}}{2}=\frac{-2\pm i6}{2}=-1\pm i3$

$\Rightarrow y_h(x)=C_1e^{-x}\cos(3x)+C_2e^{-x}\sin(3x)$

2) (coefs ind.) $f(x)=40\cdot e^{1x}\cdot\sin(3x)$ $\quad f(x)=e^{\alpha x}(\cos(\beta x)P_k(x)+\sin(\beta x)Q_m(x))$

$\alpha=1$ $\quad P_k=0$ $\quad \beta=3$ $\quad Q_m=40$

$y_p(x)=e^x(\cos(3x)A+\sin(3x)B)$ $\quad N=\max(0,0)=0$

$\alpha+i\beta=1+i3 \Rightarrow r=0$ $\quad T_N(x)=A \quad S_N(x)=B$

$y_p'(x)=e^x(\cos(3x)A+\sin(3x)B-3\sin(3x)A+3\cos(3x)B)$

$y_p''(x)=e^x(\cos(3x)(A+3B)+\sin(3x)(B-3A)-3(A+3B)\sin(3x)+3\cos(3x)(B-3A))$

$=e^x(\cos(3x)(6B-8A)+\sin(3x)(-8B-6A))$

$\to$(EDL2) $\div e^x$ $\Rightarrow \cos(3x)(6B-8A+2(A+3B)+10A)+\sin(3x)(-8B-6A+2(B-3A)+10B)=40\sin(3x)+0\cos($

$\Rightarrow\begin{cases}12B+4A=0\\ 4B-12A=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3B\\ 4B+36B=40\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-3\\ B=1\end{cases}$ $\Rightarrow y=y_p+y_h$

Exemple. $y''+2y'-3y=(x+1)e^{-3x}$

4

$f(x)=e^{cx}R_n(x)$ $\Rightarrow c=-3, n=1$

$y_p(x)=x^re^{-3x}(Ax+B)$ av. $r=1$

$=e^{-3x}(Ax^2+Bx)$ $\quad (\lambda^2+2\lambda-3)=0 \Leftrightarrow (\lambda+3)(\lambda-1)=0$

$\Rightarrow y_p'(x)=e^{-3x}(-3(Ax^2+Bx)+2Ax+B)=e^{-3x}(-3Ax^2+(2A-3B)x+B)$

$\Rightarrow y_p''(x)=e^{-3x}(9Ax^2+(-6A+9B)x-3B+(-6A)x+(2A-3B))$

$=e^{-3x}(9A+(-12A+9B)x+2A-6B)$

$\Rightarrow y_p(x)=e^{-3x}\left(\frac{-x^2}{8}-\frac{5x}{16}\right)$

$\Rightarrow y_h(x)=C_1e^{-3x}+C_2e^{x}$ C

$\Rightarrow$(EDL2) $\div e^{-3x}$ $9Ax^2+(-12A+9B)x+2A-6B+2(-3Ax^2+(2A-3B)x+B)-3(Ax^2+Bx)=x\cdot$

$\Rightarrow\begin{cases}(9A-6A-3A)x^2=0x^2\\ (-12A+9B+4A-6B-3B)x=x\\ (2A-6B)+2B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\text{———}\\ -8A=1\\ 2A-4B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=-1/8\\ -1/4-4B=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\text{———}\\ B=-\end{cases}$

5

Méthodes de démonstration (par l'absurde)

$T\Rightarrow Q \overset{\text{contr}}{\equiv} \neg Q\Rightarrow F$ axiomatiquement fausse

① $\nexists x,y\in\mathbb{Z}$ tq $18x-54y=21$

démonstration. $18x-54y=21$ || $\neg Q$

$\div 9 \Rightarrow \underbrace{2x-6y}_{\in\mathbb{Z}}=\frac{21}{9}=\underbrace{\frac{7}{3}}_{\notin\mathbb{Z}}$

impossible ▨

$P\Rightarrow Q$

$\equiv$

$\neg Q\Rightarrow\neg P$

② (Euclide) $\mathbb{P}$ premiers

théorème $|\mathbb{P}|=\infty$

démo : Suppose $\exists n\in\mathbb{N}_{>0}$: $|\mathbb{P}|=n<\infty$.

$\Rightarrow \mathbb{P}=\{p_1,\dots,p_n\}$ "les n premiers nombres premiers"

Soit $K:=p_1p_2\dots p_n+1$ rem. $K\notin\mathbb{P}$ car $K>p_i\ \forall i=1\dots n$

$\exists p_j\neq K$ tq $p_j|K$ "divise" $\Rightarrow K=m\cdot p_j$ $\Rightarrow K-p_1p_2\cdots p_n$

$=mp_j-p_1p_2\cdots p_n$

$=p_j(m-p_1p_2\cdots p_{j-1}p_{j+1}\cdots p_n)$

$\Rightarrow \underbrace{K-p_1p_2\cdots p_n}_{\text{divisible par } p_j}=1$ pas div par $p_j\neq 1$. $\to$ contradiction logique ▨