

Rappel: Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2).

(1) $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$ $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues

(2) EDL2 homogène:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \quad p, q: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions continues}$$

(3) EDL2 à coefficients constants:

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = f(x) \quad p, q \in \mathbb{R}, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonction continue.}$$

(4) EDL2 homogène à coefficients constants:

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}.$$

La solution générale pour (4): $\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \Rightarrow a, b \Rightarrow 3 \text{ cas} \Rightarrow \text{solution générale}$

Pour (2) si $v_1(x)$ est une solution et $v_1(x) \neq 0$ sur $I \Rightarrow v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$

est une solution linéairement indépendante, où $P(x) = \int p(x) dx$ est une primitive

Aujourd'hui: Solution générale de (2)
Méthodes de solution de (1)

Caractérisation des 2 solutions de (2) linéairement indépendantes

Déf Si $v_1, v_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ alors la fonction $W[v_1, v_2] : I \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} = v_1(x)v_2'(x) - v_2(x)v_1'(x)$$

est appelée le **Wronskien** de v_1 et v_2 .

Ex 1. $y'' - 6y' + 9y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ équ. caractéristique $\Rightarrow \lambda_{1,2} = 3$
 $\Rightarrow v(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$ où $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ la solution générale, $x \in \mathbb{R}$

$$W[e^{3x}, x e^{3x}] = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & x e^{3x} \\ 3e^{3x} & e^{3x} + 3x e^{3x} \end{pmatrix} = e^{6x} + 3x e^{6x} - 3x e^{6x} = \underline{e^{6x}}$$

Observation: $e^{6x} = W[e^{3x}, x e^{3x}] \neq 0$ sur $\mathbb{R}$

Exercice: $u_1(x) = e^{3x}$, $u_2(x) = x e^{3x} - 2 e^{3x} \rightarrow$ calculer $W[u_1(x), u_2(x)]$

$$W(u_1(x), u_2(x)) = \det \begin{pmatrix} e^{3x} & x e^{3x} - 2 e^{3x} \\ 3e^{3x} & -5e^{3x} + 3x e^{3x} \end{pmatrix} = -5e^{6x} + 3x e^{6x} - 3x e^{6x} + 6e^{6x} = \underline{e^{6x}}$$

Proposition. Soient $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$.

Alors: $\underbrace{v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont linéairement indépendantes}}_P \iff \underbrace{W[v_1, v_2](x) \neq 0 \ \forall x \in I}_Q$

Dém: Par contraposée: $\neg P \Rightarrow \neg Q$ et $\neg Q \Rightarrow \neg P$

(1) $\neg P \Rightarrow \neg Q$ Les solutions sont linéairement dépendantes $\Rightarrow$ sans perte de généralité il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $v_2(x) = c v_1(x) \ \forall x \in I$

$$\text{Alors on a: } W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} v_1(x) & c v_1(x) \\ v_1'(x) & c v_1'(x) \end{pmatrix} = c v_1(x) v_1'(x) - c v_1(x) v_1'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

$$\Rightarrow W[v_1, v_2](x) = 0 \quad \forall x \in I$$



(2) $\neg Q \Rightarrow \neg P$. Supposons qu'il existe $x_0 \in I$: $W[v_1, v_2](x_0) = 0$.

$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow$ il existe un vecteur non nul $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a v_1(x_0) + b v_2(x_0) = 0 \\ a v_1'(x_0) + b v_2'(x_0) = 0 \end{cases}$$

Soit $v(x) = a v_1(x) + b v_2(x)$. Alors $v(x)$ est une solution de l'EDL2 homogène et de plus $v(x_0) = 0$ et $v'(x_0) = 0$. Par le théorème de l'existence et unicité d'une solution de l'EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales

$y(x_0) = 0$ et $y'(x_0) = 0$, puisque la solution triviale $y(x) = 0 \quad \forall x \in I$ satisfait l'équation et les mêmes conditions initiales $\Rightarrow v(x) = a v_1(x) + b v_2(x) = 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow$ Puisque a et b ne sont pas tous les deux nuls $\Rightarrow$

$$\begin{cases} v_1(x) = -\frac{b}{a} v_2(x) & \forall x \in I \\ v_2(x) = -\frac{a}{b} v_1(x) & \forall x \in I \end{cases} \Rightarrow v_1(x) \text{ et } v_2(x) \text{ sont lin. dépendantes} \quad \square$$

Exemple EDL2 homogène à coefficients constants $y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$
 $\Rightarrow \lambda^2 + p\lambda + q = 0$ telle que les racines sont $\alpha = \bar{\beta} = \alpha + i\beta \notin \mathbb{R}$
 Montrer que $W[e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x] \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \neq 0$

$$W(e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x) = \det \begin{pmatrix} e^{\alpha x} \cos \beta x & e^{\alpha x} \sin \beta x \\ \alpha e^{\alpha x} \cos \beta x - \beta e^{\alpha x} \sin \beta x & \alpha e^{\alpha x} \sin \beta x + \beta e^{\alpha x} \cos \beta x \end{pmatrix} =$$

... exercice

$\neq 0$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème. Soient $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$ deux solutions linéairement indépendantes de l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$. Alors la solution générale de cette équation est de la forme:

$$v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Dém: Soit $\tilde{v}(x)$ une solution ^{arbitraire} de l'équation donnée. ; Soit $x_0 \in I$

Alors $\tilde{v}(x_0) = a_0 \in \mathbb{R}$, et $\tilde{v}'(x_0) = b_0 \in \mathbb{R}$

On a deux solutions linéairement indépendantes $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$

Alors par la proposition ^{précédente} on sait que $W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow W[v_1, v_2](x_0) \neq 0$.

$$\Rightarrow \exists \text{ unique constantes } c_1, c_2 \in \mathbb{R}: \begin{pmatrix} v_1(x_0) & v_2(x_0) \\ v_1'(x_0) & v_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 v_1(x_0) + c_2 v_2(x_0) = a_0 \\ c_1 v_1'(x_0) + c_2 v_2'(x_0) = b_0 \end{cases}$$

Considérons la fonction $v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$. Alors:

(1) $v(x)$ est une solution de l'équation (puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$ sont des solutions)

(2) $v(x_0) = a_0$, $v'(x_0) = b_0$

Par le thm de l'existence et unicité de solution de EDL2 homogène satisfaisant les conditions initiales données $v(x_0) = a_0$, $v'(x_0) = b_0$,

on a $\tilde{v}(x) = v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) \quad \forall x \in I$.



Considérons l'équation complète (1): $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x)$.

Superposition des solutions. Si $v(x)$ est une solution de (1) et $u(x)$ une solution de l'équation homogène associée: $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, alors $v(x) + u(x)$ est une solution de l'équation (1) (Exercice).

Méthode de variation de constante: On cherche une solution particulière de (1) supposant qu'on connaît deux solutions linéairement indépendantes de l'équation homogène associée: $v_1, v_2: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\Rightarrow W[v_1, v_2](x) \neq 0 \quad \forall x \in I)$

Ansatz: $v_0(x) = c_1(x)v_1(x) + c_2(x)v_2(x)$ où $c_1(x)$ et $c_2(x)$ sont des fonctions de classe C^1 sur I

Conditions sur $c_1(x)$ et $c_2(x)$?

$$v_0'(x) = \underbrace{c_1'(x)v_1(x) + c_2'(x)v_2(x)}_{\text{Supposons } = 0} + c_1(x)v_1'(x) + c_2(x)v_2'(x)$$

$$\Rightarrow v_0''(x) = c_1'(x)v_1'(x) + c_2'(x)v_2'(x) + c_1(x)v_1''(x) + c_2(x)v_2''(x) \Rightarrow \text{dans l'équation } \dots$$

$$v_0''(x) + p(x)v_0'(x) + q(x)v_0(x) = f(x)$$

-61-

$$C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) + \underline{C_1(x)v_1''(x)} + \underline{C_2(x)v_2''(x)} + \underline{p(x)C_1(x)v_1'(x)} + \underline{p(x)C_2(x)v_2'(x)} +$$

$$\underline{\hspace{2cm}} = 0$$

puisque $v_1(x)$ et $v_2(x)$

sont des solutions de l'équation homogène.

$$\underline{q(x)C_1(x)v_1(x)} + \underline{q(x)C_2(x)v_2(x)} = f(x)$$

$$\Rightarrow C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = f(x) \quad \text{- condition sur } C_1'(x) \text{ et } C_2'(x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1'(x)v_1(x) + C_2'(x)v_2(x) = 0 \\ C_1'(x)v_1'(x) + C_2'(x)v_2'(x) = f(x) \end{array} \right. \quad \forall x \in I$$

Système pour $C_1'(x)$ et $C_2'(x)$

On sait que $W[v_1, v_2](x) \neq 0$ sur I

$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_1' & v_2' \end{pmatrix}(x) \neq 0 \quad \forall x \in I$$

$$\begin{pmatrix} v_1(x) & v_2(x) \\ v_1'(x) & v_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ il existe une unique solution $\forall x \in I$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2](x)} \begin{pmatrix} v_2'(x) & -v_2(x) \\ -v_1'(x) & v_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Rappel: Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
 $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ telle que $\det M \neq 0$
 $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det M} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} v_2' & -v_2 \\ -v_1' & v_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = \frac{1}{W[v_1, v_2]} \begin{pmatrix} -v_2 f \\ v_1 f \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} c_1'(x) \\ c_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v_2(x) f(x) \\ v_1(x) f(x) \end{pmatrix} \frac{1}{W[v_1, v_2](x)}$$

$$\Rightarrow c_1(x) = - \int \frac{f(x) v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$c_2(x) = \int \frac{f(x) v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

sans constante

$\Rightarrow v_0(x) = c_1(x) v_1(x) + c_2(x) v_2(x)$ est une solution de (1)

$\Rightarrow$ La solution générale de (1) est

$$v(x) = v_0(x) + C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in I$$

Ex 2. Trouver la solution générale de l'équation: EDL2 complète -63-

$$y''(x) - \underbrace{\frac{1}{x(\ln x - 1)}}_{p(x)} y'(x) + \underbrace{\frac{1}{x^2(\ln x - 1)}}_{q(x)} y(x) = \underbrace{\ln x - 1}_{f(x)} \quad \text{sur }]e, \infty[$$

$p, q, f:]e, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$
continues

(1) Essayons de trouver une solution non nulle de l'équation homogène associée:

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = 0 \quad (*)$$

$$y = x \Rightarrow y' = 1, y'' = 0 = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} + \frac{x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \quad \forall x \in]e, \infty[$$

(2) Trouver une autre solution de (*) linéairement indépendante

$$v_2(x) = c(x) v_1(x) \quad \text{où} \quad c(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx, \quad P(x) = \int p(x) dx$$

$$p(x) = -\frac{1}{x(\ln x - 1)} \Rightarrow P(x) = -\int \frac{dx}{x(\ln x - 1)} = -\int \frac{d(\ln x - 1)}{\ln x - 1} = -\ln(\ln x - 1) \quad \text{sans const.}$$

$$\ln x > 1 \quad \text{sur }]e, \infty[$$

$$\begin{aligned}
 C(x) &= \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{+\ln(\ln x - 1)}}{x^2} dx = \int \frac{\ln x - 1}{x^2} dx = \\
 &= - \int (\ln x - 1) d\left(\frac{1}{x}\right) = - \frac{\ln x - 1}{x} + \int \frac{1}{x} \frac{1}{x} dx = - \frac{\ln x - 1}{x} - \frac{1}{x} = - \frac{\ln x}{x} \quad \text{sans constante}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow v_2(x) = C(x)v_1(x) = - \frac{\ln x}{x} \cdot x = - \ln x, \quad x \in]e, \infty[$$

Vérification pour $v_2(x) \leadsto$ équation homogène (*)

$$v_2(x) = -\ln x, \quad v_2'(x) = -\frac{1}{x}, \quad v_2''(x) = \frac{1}{x^2}$$

$$\begin{aligned}
 v_2''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} v_2'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} v_2(x) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} - \frac{\ln x}{x^2(\ln x - 1)} = \\
 &= \frac{\ln x - 1 + 1 - \ln x}{x^2(\ln x - 1)} = 0 \quad \text{☺}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{v(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 \ln x} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R} \quad x \in]e, \infty[$$

est la solution générale de l'équation homogène (*)

(3) Trouver une solution particulière de l'équation complète.

-65-

$$y''(x) - \frac{1}{x(\ln x - 1)} y'(x) + \frac{1}{x^2(\ln x - 1)} y(x) = \ln x - 1$$

$$v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x) \quad \text{où} \quad C_1(x) = \boxed{-} \int \frac{f(x)v_2(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx \quad C_2(x) = \boxed{+} \int \frac{f(x)v_1(x)}{W[v_1, v_2](x)} dx$$

$$W[v_1, v_2](x) = \det \begin{pmatrix} x & -\ln x \\ 1 & -\frac{1}{x} \end{pmatrix} = -1 + \ln x = \ln x - 1 \neq 0 > 0 \text{ sur }]e, \infty[$$

$$C_1(x) = - \int \frac{\overbrace{(\ln x - 1)}^{f(x)} \underbrace{(-\ln x)}_{v_2(x)}}{\underbrace{\ln x - 1}_{W[v_1, v_2]}} dx = + \int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = \underline{x \ln x - x}$$

$$C_2(x) = \int \frac{\overbrace{(\ln x - 1) \cdot x}^{f(x)} \underbrace{1}_{v_1(x)}}{\underbrace{\ln x - 1}_{W[v_1, v_2]}} dx = \int x dx = \underline{\frac{1}{2} x^2} \quad \text{sans constante}$$

$$v_0(x) = C_1(x)v_1(x) + C_2(x)v_2(x) = x(\ln x - 1)x + \frac{1}{2}x^2(-\ln x) = \frac{1}{2}x^2 \ln x - x^2.$$

Exercice : vérifier que $v_0(x)$ satisfait l'équation complète.

(4) Solution générale de l'équation complète.

$$v(x) = C_1 x + C_2 \ln x + \frac{1}{2} x^2 \ln x - x^2 \quad \text{où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}, x \in]e, \infty[.$$

Question 4

La solution générale de l'équation

$$y'' + 2y' - 3y = x e^{2x} \text{ est}$$

$$A: y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} - \frac{1}{5} x e^{2x} - \frac{4}{25} e^{2x}$$

$$B: y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{6}{5} x e^{2x} - \frac{18}{25} e^{2x}$$

$$C: y(x) = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{5} x e^{2x} - \frac{7}{25} e^{2x}$$

$$D: y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} x e^{2x} - \frac{6}{25} e^{2x}$$

Exercice: vérification

$$y_{part}(x) = C_1(x) v_1(x) + C_2(x) v_2(x) = \left(\frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{4} e^x \right) e^x + \left(-\frac{1}{20} x e^{5x} + \frac{1}{100} e^{5x} \right) e^{-3x} =$$

$$= \frac{1}{4} x e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} - \frac{1}{20} x e^{2x} + \frac{1}{100} e^{2x} = \frac{5-1}{20} x e^{2x} - \frac{25-1}{100} e^{2x} = \frac{1}{5} x e^{2x} - \frac{6}{25} e^{2x}$$

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5} x e^{2x} - \frac{6}{25} e^{2x} \text{ est la solution générale.}$$

$$\lambda^2 + 2\lambda - 3 = (\lambda - 1)(\lambda + 3) \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -3$$

$$y_{hom}(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x)$$

$$W[v_1, v_2] = \det \begin{pmatrix} e^x & e^{-3x} \\ e^x & -3e^{-3x} \end{pmatrix} = -3e^{-2x} - e^{-2x} = -4e^{-2x}$$

$$C_1(x) = - \int \frac{x e^{2x} \cdot e^{-3x}}{-4 e^{-2x}} dx = \frac{1}{4} \int x e^x dx =$$
$$= \frac{1}{4} x e^x - \frac{1}{4} e^x$$

$$C_2(x) = \int \frac{x e^{2x} e^x}{-4 e^{-2x}} dx = -\frac{1}{4} \int x e^{5x} dx =$$

$$= -\frac{1}{20} \int x d e^{5x} = -\frac{1}{20} x e^{5x} + \frac{1}{100} e^{5x}$$