

§1.4. Équations différentielles linéaires du second ordre (EDL2)

Déf Soit I un intervalle ouvert. On appelle *équation différentielle linéaire du second ordre* une équation de la forme:

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = f(x) \quad \text{EDL2}$$

où $p, q, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues.

Def. Une équation de la forme

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

est dite *EDL2 homogène*.

On cherche une solution de cette équation de classe C^2 .

Ex 1. $y'' = 5 \Rightarrow y' = 5x + C_1 \quad x \in \mathbb{R}, \quad \forall C_1 \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow y(x) = \frac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\quad \quad \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

EDL 2 homogène à coefficients constants.

on cherche a, b : -44-

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0 \quad p, q \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} p = -a - b \\ q = ab \end{cases}$$

(*) $y''(x) - (a+b) y'(x) + ab y(x) = 0$

Alors a, b sont des racines de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$

$$(1-a)(1-b) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = 0$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 + p\lambda + q &= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = \lambda^2 - a\lambda - b\lambda + ab = \lambda(\lambda - a) - b(\lambda - a) = \\ &= (\lambda - b)(\lambda - a) = 0 \end{aligned}$$

$$a, b \in \mathbb{C}.$$

Le changement de variable, $\underbrace{(y'(x) - a y(x))}' - b \underbrace{(y'(x) - a y(x))} = 0 \iff (*)$

$z(x)$ $z(x)$

$$\Rightarrow z'(x) - b z(x) = 0 \Rightarrow \text{EDVS pour } z$$

$$\Rightarrow z(x) = C_1 e^{bx} \text{ la solution générale, } C_1 \text{ arbitraire}$$

$$\Rightarrow z(x) = y'(x) - a y(x) \Rightarrow \text{on obtient une équation pour } y(x)$$

$$\underbrace{y'(x)}_{p(x)} - a \underbrace{y(x)}_{f(x)} = C_1 e^{bx}$$

EDL 1

$$y'(x) - ay(x) = C_1 e^{bx} \quad p(x) = -a, \quad f(x) = C_1 e^{bx} \quad \text{EDL1} \quad -45-$$

$$\Rightarrow P(x) = \int -a dx = -ax, \quad y_{\text{hom}}(x) = C_2 e^{ax} \quad \text{solution générale de l'équation homogène}$$

$$C(x) = \int \underbrace{C_1 e^{bx}}_{f(x)} \underbrace{e^{-ax}}_{e^{P(x)}} dx = C_1 \int e^{(b-a)x} dx = \begin{cases} \frac{1}{b-a} C_1 e^{(b-a)x} & \text{si } b \neq a \\ C_1 x & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$y_{\text{part}}(x) = C(x) e^{-P(x)} = \begin{cases} C_1 e^{(b-a)x} e^{ax} = C_1 e^{bx} & \text{si } b \neq a \\ C_1 x e^{ax} & \text{si } b = a \end{cases}$$

$$y(x) = \begin{cases} C_2 e^{ax} + C_1 e^{bx} & \text{si } a \neq b \\ C_2 e^{ax} + C_1 x e^{ax} & \text{si } a = b \end{cases}$$

C_1, C_2 constantes arbitraires
 a, b racines de
 l'équation caractéristique
 $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$
 $\forall x \in \mathbb{R}$.

Si $a \neq b$ sont des racines complexes, $a, b \notin \mathbb{R} \Rightarrow a = \bar{b}$

$\Rightarrow y(x) = C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x}$ pour avoir une solution réelle. $a = \alpha + i\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$
 $\beta \neq 0$

Soit $C = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4) \Rightarrow \bar{C} = \frac{1}{2}(C_3 + iC_4)$, $C_3, C_4 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} y(x) &= C e^{ax} + \bar{C} e^{\bar{a}x} = \frac{1}{2}(C_3 - iC_4) e^{\alpha x} e^{i\beta x} + \frac{1}{2}(C_3 + iC_4) e^{\alpha x} e^{-i\beta x} = \\ &= C_3 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}}_{\cos \beta x} + C_4 e^{\alpha x} \underbrace{\frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i}}_{\sin \beta x} = \end{aligned}$$

$$C_3 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_4 e^{\alpha x} \sin \beta x \quad \text{où } C_3, C_4 \in \mathbb{R} \text{ arbitraires}$$

$x \in \mathbb{R}$

C'est la solution générale de l'équation originale

dans le cas $b = \bar{a} \notin \mathbb{R}$

$$\left[\begin{aligned} e^{i\beta x} &= \cos \beta x + i \sin \beta x \\ e^{-i\beta x} &= \cos \beta x - i \sin \beta x \end{aligned} \Rightarrow \cos \beta x = \frac{e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}}{2}, \sin \beta x = \frac{e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}}{2i} \right]$$

Résumé: EDL2 homogène à coefficients constants.

$$y''(x) + p y'(x) + q y(x) = 0$$

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ les racines
de l'équation $\lambda^2 + p\lambda + q = 0$, $p, q \in \mathbb{R}$.

$$a, b = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$$

Alors la solution générale est:

$$y(x) = \begin{cases} C_1 e^{ax} + C_2 e^{bx} & \text{si } a \neq b, \quad a, b \in \mathbb{R} \\ C_1 e^{ax} + C_2 x e^{ax} & \text{si } a = b \\ C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x & \text{si } a = \alpha + i\beta = \bar{b} \notin \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{matrix} \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R} \\ \\ \forall x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Ex 2 $y'' + 9y = 0$

Equation caractéristique

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow \alpha = 3i, \beta = \bar{\alpha} = -3i$$

$$(\lambda - 3i)(\lambda + 3i) = \lambda^2 - 9i^2 = \lambda^2 + 9$$

$$a = 0 + 3i = \alpha + \beta i$$

$\Rightarrow$ La solution générale

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x$$

Verification: $y'(x) = -3C_1 \sin 3x + 3C_2 \cos 3x \Rightarrow y'' = -9C_1 \cos 3x - 9C_2 \sin 3x$
 $\Rightarrow y'' + 9y = 0$.

Ex 3 $y'' - 6y' + 9y = 0$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0 \Rightarrow (\lambda - 3)^2 = 0$$

$$a = b = 3$$

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Vérification: $y'(x) = 3C_1 e^{3x} + C_2 e^{3x} + 3C_2 x e^{3x}$

$$y''(x) = 9C_1 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 3C_2 e^{3x} + 9C_2 x e^{3x}$$

$$\Rightarrow y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = \underline{9C_1 e^{3x}} + \underline{6C_2 e^{3x}} + \underline{9C_2 x e^{3x}} - \underline{18C_1 e^{3x}} - \underline{6C_2 e^{3x}} - \underline{18C_2 x e^{3x}} + \underline{9C_1 e^{3x}} + \underline{9C_2 x e^{3x}} = 0 \quad \text{☺}$$

Considérons l'équation $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$, $p, q: \underset{\text{continues}}{I} \rightarrow \mathbb{R}$

Théorème Une EDL2 homogène admet une seule solution $y(x): I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 satisfaisant $y(x_0) = t$ et $y'(x_0) = s$ pour un $x_0 \in I$ et les nombres arbitraires $s, t \in \mathbb{R}$ (sans démonstration).

Remarques (1) Superposition des solutions: Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont 2 solutions de EDL2 homogène $\Rightarrow y(x) = Ay_1(x) + By_2(x)$ est aussi une solution, où $A, B \in \mathbb{R}$

$$(Ay_1(x) + By_2(x))'' + p(x)(Ay_1(x) + By_2(x))' + q(x)(Ay_1(x) + By_2(x)) =$$

$$= A(\underbrace{y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)}_{y_1 \text{ est une solution} = 0}) + B(\underbrace{y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)}_{= 0}) = 0$$

(2) Si $y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y(x_0) = Ay_1(x_0) + By_2(x_0) = t \\ y'(x_0) = Ay_1'(x_0) + By_2'(x_0) = s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{2 équations linéaires} \\ \text{pour 2 variables (A, B)} \end{array}$

$\uparrow$ solutions $\quad \quad \quad \uparrow$

$$\begin{pmatrix} y_1(x_0) & y_2(x_0) \\ y_1'(x_0) & y_2'(x_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix} \quad \exists \text{ unique solution} \Leftrightarrow \begin{cases} (y_1(x_0), y_1'(x_0)) \neq k(y_2(x_0), y_2'(x_0)) \\ (y_2(x_0), y_2'(x_0)) \neq m(y_1(x_0), y_1'(x_0)) \end{cases}$$

Déf. Deux solutions $y_1(x)$ et $y_2(x) : I \rightarrow \mathbb{R}$ sont *linéairement indépendantes* s'il n'existe pas de constante $c \in \mathbb{R}$ telle que

$$y_2(x) = c y_1(x) \quad \text{ou} \quad y_1(x) = c y_2(x) \quad \forall x \in I$$

(Cela implique, en particulier, que $y_1(x)$ et $y_2(x)$ ne sont pas trivialement $= 0$ sur I).

Théorème $\Rightarrow$

Il existe unique solution $y(x)$ pour tout couple $s, t \in \mathbb{R}$ $\iff$ L'espace vectoriel des solutions de l'EDL2 est de dimension 2.
 $y(x_0) = s, y'(x_0) = t$

$$\begin{cases} y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0 \\ y(x_0) = t \\ y'(x_0) = s \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\exists$ Solution unique

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$$

$\Downarrow$

$\exists \infty$ de solutions
 espace vectoriel de dimension 2

Comment résoudre $y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0$?

Supposons que $v_1(x)$ est une solution de cette équation, telle que $v_1(x) \neq 0$ sur I .

On sait trouver une autre solution, linéairement indépendante.

Ansatz: $v_2(x) = c(x)v_1(x)$ telle que $c(x) \neq \text{const}$

Alors : $v_2'(x) = c'(x)v_1(x) + c(x)v_1'(x)$

$$v_2''(x) = c''(x)v_1(x) + \underbrace{c'(x)v_1'(x) + c'(x)v_1'(x)}_{2c'(x)v_1'(x)} + c(x)v_1''(x) \Rightarrow \text{dans l'équation} \Rightarrow$$

$$c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + c(x)v_1''(x) + p(x)c'(x)v_1(x) + p(x)c(x)v_1'(x) + q(x)c(x)v_1(x) = 0$$

$$c(x)(v_1''(x) + p(x)v_1'(x) + q(x)v_1(x)) = 0$$

puisque $v_1(x)$ est une solution

$$\Rightarrow c''(x)v_1(x) + 2c'(x)v_1'(x) + p(x)c'(x)v_1(x) = 0$$

On suppose que $v_1(x) \neq 0$ sur I et $c'(x) \neq 0$ sur I (une condition de plus)

Alors $\frac{c''(x)}{c'(x)} = -p(x) - 2 \frac{v_1'(x)}{v_1(x)} \Rightarrow$ EDVS pour $c'(x)$

$$\Rightarrow \ln |c'(x)| = -P(x) - 2 \ln |v_1(x)| + \ln C, \quad C \in \mathbb{R}_+^*$$

$$\underbrace{\ln e^{-P(x)}}_{\ln e^{-P(x)}} + \underbrace{\ln \frac{C}{v_1^2(x)}}_{\ln \frac{C}{v_1^2(x)}} = \ln \frac{C e^{-P(x)}}{v_1^2(x)}$$

$$\Rightarrow c'(x) = \pm C \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} = C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} \quad C_1 \in \mathbb{R}^*, \quad C_1 \neq \pm C$$

$$\Rightarrow c(x) = \int C_1 \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx + C_2 \quad C_2 \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow v_2(x) = c(x)v_1(x)$ est une solution. Si on prend $C_1 = 1, C_2 = 0$, on obtient $v_2(x)$ linéairement indépendante de $v_1(x)$

$$v_2(x) = c(x)v_1(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx$$

Question 3

$$y'' - \frac{2}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = 0$$

EDL2 homogène, $x \in]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$. -53-

$v_1(x) = x$ est une solution. Une autre solution linéairement indépendante est

A $v_2(x) = e^{\frac{1}{x}}$

B $v_2(x) = \frac{1}{x}$

C $v_2(x) = x^2$

D $v_2(x) = \frac{1}{x^2}$

$$p(x) = -\frac{2}{x} \Rightarrow P(x) = -\int \frac{2dx}{x} = -2 \ln|x| = \ln \frac{1}{x^2}$$

$$C(x) = \int \frac{e^{-\ln \frac{1}{x^2}}}{x^2} dx = \int \frac{x^2}{x^2} dx = x$$

$$\Rightarrow v_2(x) = C(x)v_1(x) = x \cdot x = x^2$$

Vérification : $v_2''(x) - \frac{2}{x} v_2'(x) + \frac{2}{x^2} v_2(x) = 2 - 4 + 2 = 0$.

Exercice: Soit $v_1(x) = x^2 \Rightarrow$ trouver $v_2(x)$

$$v_2(x) = v_1(x) \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = x^2 \int \frac{x^2}{x^4} dx = x^2 \int \frac{dx}{x^2} = x^2 \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) = -x$$

$\Rightarrow v_1(x) = x^2, v_2(x) = -x$ On obtient toujours des solutions linéairement indépendantes

Solution générale:

$$y(x) = C_1 v_1(x) + C_2 v_2(x) = C_1 x + C_2 x^2 \quad \forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$x \in]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[$$

Ex. 3 $y'' - 6y' + 9y = 0$

$$y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$$

Solution générale

Supposons $v_1(x) = e^{3x}$

Cherchons $v_2(x) = C(x)v_1(x)$ lin. indépendante.

Méthode de variation de constante: $p(x) = -6 \Rightarrow P(x) = \int -6 dx = -6x$

$$v_2(x) = C(x)v_1(x) \text{ où } C(x) = \int \frac{e^{-P(x)}}{v_1^2(x)} dx = \int \frac{e^{6x}}{(e^{3x})^2} dx = \int 1 dx = x$$

$$\Rightarrow v_2(x) = x v_1(x) = x e^{3x}$$

$\Rightarrow$ la solution générale est $y(x) = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Exercice: $v_1(x) = x e^{3x}$ et trouver $v_2(x)$ par la méthode de variation de constante. $C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$