

Rappel: Equations différentielles linéaires du premier ordre (EDL1).

$$y' + p(x)y = f(x) \quad p, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions continues}$$

Alors la solution générale est donnée par la formule:

$$y(x) = y_{\text{hom}}(x) + y_{\text{part}}(x)$$

la solution générale
de l'équation homogène
associée : $y' + p(x)y = 0$

une solution particulière
de l'équation donnée : $y' + p(x)y = f(x)$

$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-P(x)}, \text{ ou } P(x) = \int p(x) dx \text{ est une primitive (sans constante)} \\ C \in \mathbb{R}$$

$$y_{\text{part}}(x) = \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$$

une primitive (sans constante)

La solution générale de l'EDL1:

$$y(x) = C e^{-P(x)} + \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}$$

Ex 1. $y' - \underbrace{\frac{2}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)}$ $p:]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue EDL 1
 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$P(x) = \int -\frac{2}{x} dx = -2 \ln|x| \Rightarrow P(x) = -2 \ln|x| = -\ln|x|^2 = -\ln x^2 \quad x \neq 0$$

(1) $y_{\text{hom}}(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-(-\ln x^2)} = C x^2$ sur $]-\infty, 0[$, et $]0, \infty[$

Vérification $(C x^2)' - \frac{2}{x} (C x^2) = 2Cx - 2Cx = 0 \quad \forall x \in]-\infty, 0[\text{ et }]0, \infty[$ 😊

(2) On cherche une solution particulière de l'équation complète

$$y' + \underbrace{\left(-\frac{2}{x}\right)}_{p(x)} y = \underbrace{x^3 + 1}_{f(x)}$$

$$\int f(x) e^{P(x)} dx = \int (x^3 + 1) e^{-\ln x^2} dx = \int \frac{x^3 + 1}{x^2} dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x} \quad \text{pas de constante}$$

$$\Rightarrow \underline{y_{\text{part}}(x)} = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x}\right) e^{-(-\ln x^2)} = \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{x}\right) x^2 = \underline{\frac{1}{2} x^4 - x}.$$

Vérification $y'_{part}(x) - \frac{2}{x} y_{part} = 2x^3 - 1 - \frac{2}{x} \left(\frac{1}{2} x^4 - x \right) =$
 $= 2x^3 - 1 - x^3 + 2 = x^3 + 1 \quad \text{😊}$

(3) Solution générale de l'équation originale:

$$y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x \quad \begin{array}{l} \text{sur }]-\infty, 0[\\ \text{sur }]0, \infty[\end{array} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

Si on considère $xy' - 2y = x^4 + x$

$$\Rightarrow y(x) = Cx^2 + \frac{1}{2}x^4 - x \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Ex2. EDL1 avec une condition initiale. $y(0)=3$

$$y' - \underbrace{(\tan x)}_{p(x)} y = \underbrace{\cos x}_{f(x)} \quad \tan(x) \text{ n'est pas continue en } x = (2k+1)\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

puisque $0 \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow$ on considère l'équation sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

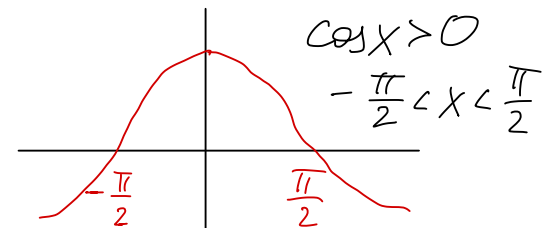
$p, f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ continues

(1) Solution générale de l'équation homogène associée.

$$y' + (-\tan x)y = 0.$$

$$P(x) = \int (-\tan x) dx = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \ln|\cos x| \quad (\text{pas de constante})$$

$$\Rightarrow P(x) = \ln(\cos x) \text{ sur }]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$y_{\text{hom}}(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-\ln(\cos x)} = \frac{C}{\cos x}, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, C \in \mathbb{R}$$

Vérification $-\frac{C}{\cos^2 x} \cdot (-\sin x) - \tan x \cdot \frac{C}{\cos x} = \frac{C \sin x}{\cos^2 x} - \frac{C \sin x}{\cos^2 x} = 0$ 😊

(2) Solution particulière de l'équation complétée $y' - \tan x y = \cos x$ ⁻³⁴⁻

$$\int f(x) e^{P(x)} dx = \int \cos x e^{\ln(\cos x)} dx = \int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx =$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} (1 + \cos 2x); \quad \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \cos 2x$$
$$= \frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \quad (\text{pas de constante})$$

$$y_{\text{part}}(x) = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \cdot e^{-P(x)} = \left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{4} \sin 2x \right) \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{4} \frac{2 \sin x \cos x}{\cos x}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x \Rightarrow y_{\text{part}}(x) = \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Vérification $y' - (\tan x) \cdot y = \frac{1}{2} \frac{\cos x + \sin x \cdot x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{2} \frac{\sin x \cdot x}{\cos^2 x} - \frac{1}{2} \frac{\sin^2 x}{\cos x} =$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{\sin^2 x}{\cos x} \right) + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{2} \frac{\cos^2 x}{\cos x} + \frac{1}{2} \cos x = \underline{\cos x} \quad \text{😊}$$

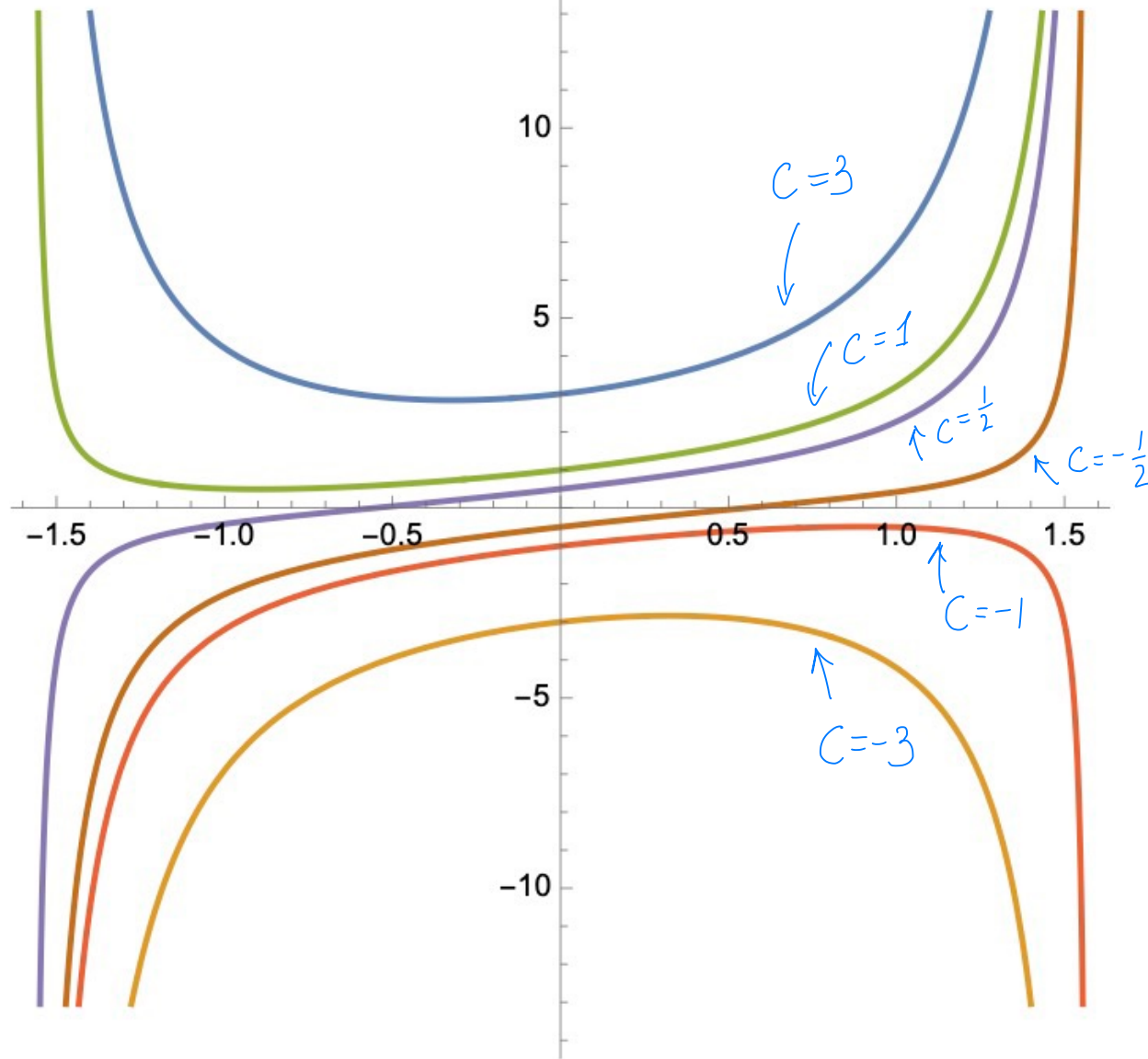
(3) Solution générale sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x, \quad x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$
 $\forall C \in \mathbb{R}$

(4) Condition initiale: $y(0) = 3 \Rightarrow y(0) = C + 0 + 0 = 3 \Rightarrow C = 3$

La solution maximale satisfaisant la condition initiale est:

$$\underline{y(x) = \frac{3}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x} \quad x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$

$$y(x) = \frac{C}{\cos x} + \frac{1}{2} \frac{x}{\cos x} + \frac{1}{2} \sin x$$



Question 2 Quel type d'équation : EDVS, EDL1, ni l'un, ni l'autre ? ⁻³⁶⁻

(a) $(e^y)' \cdot e^x = x$

$e^y \cdot y' \cdot e^x = x \Rightarrow \int e^y dy = \int e^{-x} x dx$ EDVS

(b) $3x(y' + 5x) = 2y$

$3xy' + 15x^2 = 2y \Rightarrow y' - \frac{2}{3x}y = -5x$ EDL1

(c) $(y + e^y)e^x = (1 + e^{-x})y'$

$\int \frac{dx}{x + e^y} = \int \frac{e^x dx}{1 + e^{-x}}$ EDVS

(d) $y' = 4x^2 + 4xy + y^2$

ni l'un ni l'autre mais: changement de variable
 $y' = (2x + y)^2$; Soit $z = y + 2x \Rightarrow z' = y' + 2$
 $z' - 2 = z^2 \Rightarrow z' = z^2 + 2$

A: 2 EDVS, 2 ni l'un ni l'autre

B. 4 EDVS

C. 2 EDVS, 1 EDL1, 1 ni l'un ni l'autre

D. 2 EDVS, 2 EDL1

$\int \frac{dz}{z^2 + 2} = \int dx$ EDVS

Application de EDVS (EDL1) : Croissance et décroissance exponentielle.

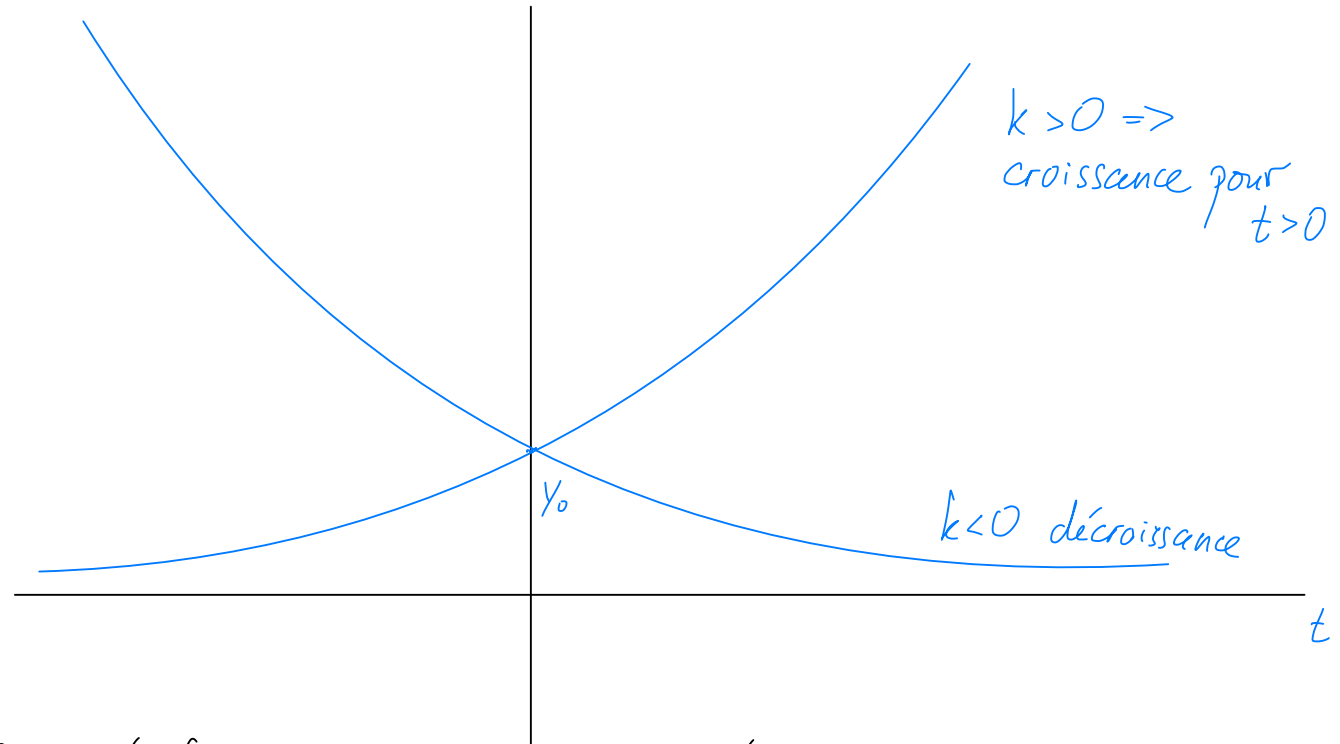
Soit $y = y(t)$ tel que $y' = ky$, $k \in \mathbb{R}$; $y = 0$ est une solution

EDVS: $\int \frac{dy}{y} = \int k dt \Rightarrow \ln|y| = kt + C_1 \Rightarrow |y| = \underbrace{e^{C_1}}_{>0} e^{kt} \Rightarrow \underline{y(t) = C e^{kt}}, C \in \mathbb{R}$

Condition initiale:

$$y(0) = C = y_0 > 0$$

$$y(t) = y_0 e^{kt}$$



$\Rightarrow$ La solution maximale satisfaisant la condition initiale $y(0) = y_0$ est $y(t) = y_0 e^{kt}$, $t \in \mathbb{R}$

Par exemple : désintégration radioactive, quantité dans une réaction chimique
 $k < 0$ (de) croissance d'une population $k > 0$
 $k < 0$

Méthode 3 : Raisonnement par disjonction des cas.

Soient P, Q deux propositions. Pour montrer $P \Rightarrow Q$ on sépare l'hypothèse de P de départ en différents cas possibles et on montre que l'implication est vraie dans chacun des cas. Il est très important de considérer tous les cas possibles.

$$\Delta: \forall a, b \in \mathbb{R}: |a+b| \leq |a|+|b|$$

Ex 1. Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$ on a: $||x|-|y|| \leq |x-y|$

$$(1) |x| \geq |y| \Rightarrow ||x|-|y|| = |x|-|y| = |x-y+y|-|y| \stackrel{\Delta}{\leq} |x-y|+|y|-|y| = |x-y|$$

$$(2) |x| < |y| \Rightarrow ||x|-|y|| = -|x|+|y| = -|x|+|y-x+x| \stackrel{\Delta}{\leq} -|x|+|y-x|+|x| = |y-x| = |x-y|$$

$\Rightarrow$ Dans tous les cas, $||x|-|y|| \leq |x-y|$



Ex 2. Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $2n^2+n+1$ n'est pas divisible par 3. -39-

Dém: Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, 3 cas:

$$(1) \ n \equiv 0 \pmod{3} \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} n=3k, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2n^2+n+1 = 2(3k)^2+(3k)+1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(2) \ n \equiv 1 \pmod{3} \Leftrightarrow n=3k+1, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2n^2+n+1 = \underbrace{2(3k+1)^2}_{2 \cdot 9k^2 + 2 \cdot 6k + 2 \cdot 1} + (3k+1) + 1 \equiv 2+1+1 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$(3) \ n \equiv 2 \pmod{3} \Leftrightarrow n=3k+2, \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2n^2+n+1 = 2(3k+2)^2+(3k+2)+1 \equiv 8+2+1 \equiv 2 \pmod{3}$$

Finalement $2n^2+n+1$ n'est pas divisible par 3 $\forall n \in \mathbb{Z}$



Méthode 4. Comment démontrer les propositions de la forme $P \Leftrightarrow Q$ ⁻⁴⁰⁻
si et seulement si
$$P \Leftrightarrow Q$$

2 méthodes : (1) $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$

(2) Suite d'équivalences : $P \Leftrightarrow R_1 \Leftrightarrow R_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow Q$.

Attention: Pour (2) il faut vérifier que chaque implication est une équivalence.

Ex 3. Soient $a, b \in \mathbb{N}$

$P: \{ ab + 1 = c^2 \text{ pour un nombre naturel } c \}$

$Q: \{ a = b \pm 2 \}$

1) Proposition "fausse!" Alors $P \Leftrightarrow Q$

2) Démonstration "fallacieuse!!"

$$\underbrace{ab+1 = c^2}_P \Leftrightarrow ab = c^2 - 1 \Leftrightarrow ab = (c+1)(c-1) \not\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a = c-1 \\ b = c+1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b-2 \\ \begin{cases} a = c+1 \\ b = c-1 \end{cases} \Leftrightarrow a = b+2 \end{cases} \underbrace{Q}$$

faute: n'est pas
une équivalence !!

Contre-exemple: $a = 3, b = 8 \Rightarrow ab+1 = 24+1 = 25 = 5^2 = c^2$
 P est vrai, Q est faux

Proposition: $Q \Rightarrow P$: Soient $a, b \in \mathbb{N}$: $a = b \pm 2$. Alors $ab+1 = c^2, c \in \mathbb{N}$.

Dém : $a = b \pm 2 \Rightarrow ab+1 = b(b \pm 2) + 1 = b^2 \pm 2b + 1 = (b \pm 1)^2 = c^2$
 $c = b \pm 1 \in \mathbb{N}$



Ex 4.

Soient $z = \rho e^{i\varphi} \in \mathbb{C}^*$, $\rho > 0$. $P: \{z^2 \in \mathbb{R}^*\}$ $Q: \{\varphi = \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$ -42-

Alors: $P \Leftrightarrow Q$.

Dém: $Q \Rightarrow P$. Soit $z = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi = \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 e^{2i \frac{\pi k}{2}} = \rho^2 e^{i\pi k} = \rho^2 \underbrace{(e^{i\pi})^k}_{-1} = \rho^2 \underbrace{(-1)^k}_{k \in \mathbb{Z}} \in \mathbb{R}^*$$

$$z = 1 \Rightarrow \rho = 1, k = 4 \Rightarrow z = 1 \cdot e^{i \frac{\pi 4}{2}} = 1 \cdot e^{i 2\pi} = 1.$$

$P \Rightarrow Q$: Soit $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho > 0$, Alors $z^2 = \rho^2 e^{2i\varphi} = \rho^2 \underbrace{(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)}_P \in \mathbb{R}^*$

$$\Leftrightarrow \Rightarrow \sin 2\varphi = 0 \Leftrightarrow \Rightarrow 2\varphi = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Q

en fait ce sont aussi

des équivalences. Donc cela démontre $P \Leftrightarrow Q$.

