

Chapitre I Équations différentielles ordinaires.

- §1.1. Définitions et exemples.
- §1.2 Équations différentielles à variables séparées (EDVS)
- §1.3 Équations différentielles linéaires du 1er ordre (EDL1)
- §1.4. Équations différentielles linéaires du 2nd ordre (EDL2)
 - (a) EDL2 homogènes à coefficients constants
 - (b) EDL2 homogènes
 - (c) EDL2 non homogènes
 - (d) EDL2 non homogènes à coefficients constants.

Rappel: EDVS : $f(y) \cdot y' = g(x)$, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue, $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Théorème (Existence et unicité d'une solution de EDVS)

Soit $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \quad \forall y \in I$.

$g: J \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple $(x_0 \in J, b_0 \in I)$

l'équation $f(y) \cdot y'(x) = g(x) \quad (**)$ $f(y(x)) dy(x) = g(x) dx$
admet une solution $y: J' \subset J \rightarrow I$ vérifiant la condition initiale $y(x_0) = b_0$.

Si $y_1: J_1 \rightarrow I$ et $y_2: J_2 \rightarrow I$ sont deux solutions telles que

$y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$.

Dém: (existence) (1) Idée: $\int f(y) dy = \int g(x) dx \Rightarrow F(y) = G(x) \Rightarrow y(x) = F^{-1}(G(x))$

(2) Soit $F(y) = \int_{b_0}^y f(t) dt \Rightarrow F(y)$ est dérivable et monotone (puisque $f(y) = F'(y) \neq 0$ sur $I \Rightarrow F(y)$ monotone)

$\Rightarrow F$ est bijective : $I \rightarrow$ voisinage autour de 0

$\Rightarrow F$ est inversible sur I .

(2) Soit $G(x) = \int_{x_0}^x g(t) dt \Rightarrow G$ est dérivable sur J , $G'(x) = g(x)$
et $G(x_0) = 0$.

(3) Soit $y(x) = F^{-1}(G(x))$ dans un voisinage de x_0

(4) On va montrer que $y(x)$ est une solution de l'équation $f(y) \cdot y'(x) = g(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$, et de plus $y(x_0) = b_0$

On a: $F(y(x)) = G(x)$ dans un voisinage de $x_0 \in J$

$$\Rightarrow F'(y(x)) \cdot y'(x) = G'(x) \xrightarrow[\text{de } F(x), G(x)]{\text{par la déf}} f(y) \cdot y'(x) = g(x)$$

(5) De plus, $y(x_0) = F^{-1}(G(x_0)) = \underset{G(x_0)=0 \text{ par déf de } G(x)}{=} F^{-1}(0) = \underset{\substack{F(b_0)=0 \text{ par déf de } F \\ F \text{ bijective}}}{=} b_0$

$\Rightarrow y(x_0) = b_0$ ◻

Unicité: voir dans [DZ]

Resumé: EDVS : $f(y) \cdot y' = g(x)$ $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continue
 $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ continue

Pour résoudre: $\int f(y) dy = \int g(x) dx$

une primitive (sans constante) la primitive générale (avec une constante)

Ex 1. $\frac{y'(x)}{y^2(x)} = 1$ EDVS: $f(y) = \frac{1}{y^2} : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$
 $\mathbb{R}_-^* \rightarrow \mathbb{R}$ $f(y) \neq 0$

$\Rightarrow \int \frac{1}{y^2} dy = \int dx \Rightarrow -\frac{1}{y} = x + C$ $g(x) = 1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue
← constante arbitraire

$\Rightarrow y = -\frac{1}{x+C} \quad \forall C \in \mathbb{R}$ - la solution générale sur $] -\infty, -C[$ et $] -C, \infty[$

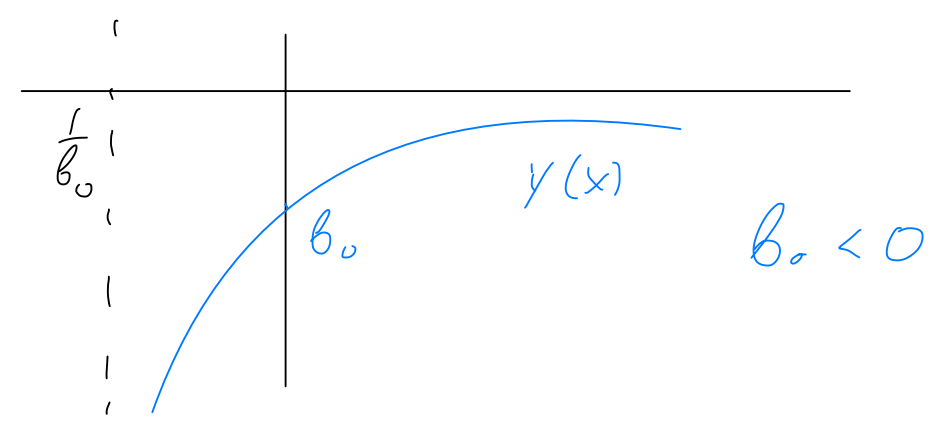
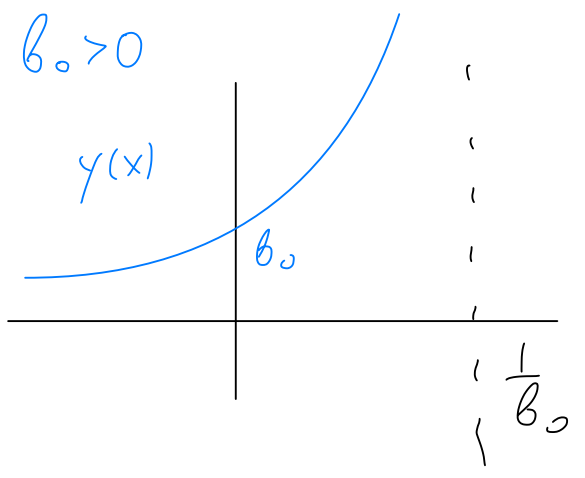
Condition initiale: $y(0) = b_0 \in \mathbb{R}^* \Rightarrow y(0) = -\frac{1}{C} = b_0 \Rightarrow C = -\frac{1}{b_0}$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$

$0 \in] -\infty, \frac{1}{b_0}[$ si $b_0 > 0$

Si $b_0 > 0 \Rightarrow \frac{1}{b_0} > 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $] -\infty, \frac{1}{b_0}[$ - la solution particulière

Si $b_0 < 0 \Rightarrow \frac{1}{b_0} < 0 \Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x - \frac{1}{b_0}}$ sur $] \frac{1}{b_0}, \infty[$ $0 \in] \frac{1}{b_0}, \infty[$ la solution particulière



Déf Une solution maximale de l'EDVS avec la condition initiale $y(x_0) = b_0$, $x_0 \in J$, $b_0 \in I$ est une fonction $y(x)$ de classe C^1 satisfaisant l'équation, la condition initiale et qui est définie sur le plus grand intervalle possible.

Le théorème sur EDVS dit que si $f(y) \neq 0$ sur I , alors il existe une unique solution maximale. Toute solution avec la même condition initiale est une restriction de la solution maximale.

Dans Ex 1, on a trouvé les solutions maximales pour les conditions initiales $x_0 = 0$, $b_0 \in \mathbb{R}^*$: $b_0 > 0$ et $b_0 < 0$

Question 1

-20-

L'équation différentielle $2y \cdot y' = 4x^3$
avec la condition initiale $y(0) = 0$ possède

- A: Une seule solution sur $\mathbb{R}$
- B: 2 solutions sur $\mathbb{R}$
- C: 4 solutions sur $\mathbb{R}$
- D: Pas de solutions sur $\mathbb{R}$

$$\int 2y dy = \int 4x^3 dx$$

$$y^2 = x^4 + C \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

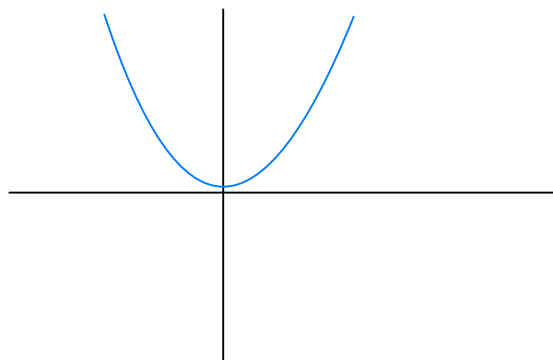
$$y = \pm \sqrt{x^4 + C}$$

$$y(0) = \pm \sqrt{C} = 0 \Rightarrow C = 0$$

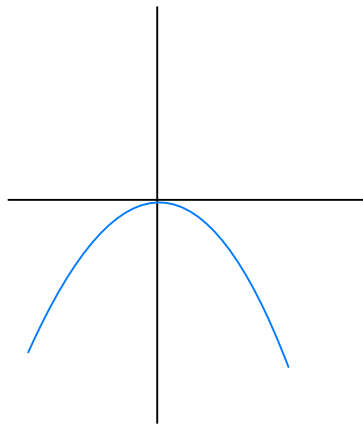
$$\Rightarrow y(x) = \pm \sqrt{x^4} = \pm x^2$$

4 solutions

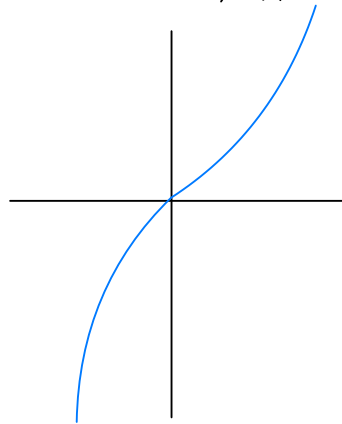
$$y(x) = x^2, x \in \mathbb{R}$$



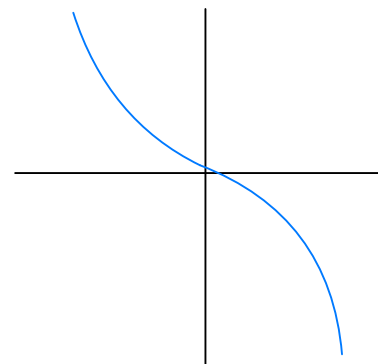
$$y(x) = -x^2, x \in \mathbb{R}$$

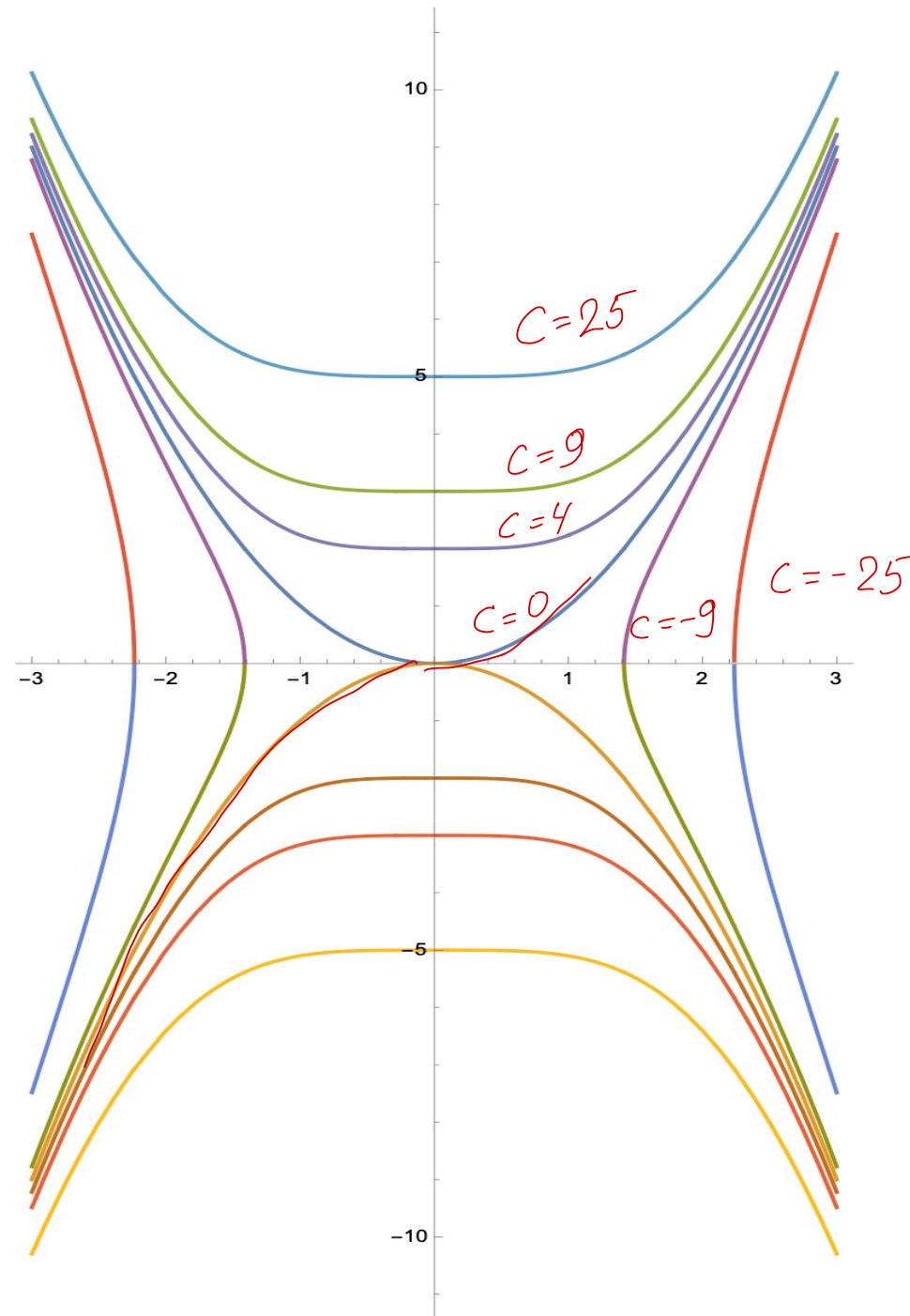


$$y(x) = \begin{cases} -x^2, & x \leq 0 \\ x^2, & x > 0 \end{cases}$$



$$y(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 0 \\ -x^2, & x > 0 \end{cases}$$





$y(x):$
 $2y \cdot y' = 4/x^3$

§1.3. Équations différentielle linéaire du premier ordre (EDL1).

Déf Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert. Une équation de la forme

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x), \text{ où } p, f: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ sont continues}$$

est une équation différentielle linéaire du premier ordre (EDL1).

Une solution est une fonction $y: I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 satisfaisant l'équation.

Comment résoudre une EDL1?

$$y'(x) + p(x)y(x) = f(x).$$

Considérons l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = 0$.

Elle s'appelle l'équation homogène associée à l'EDL1 $y' + p y = f$

$$\Rightarrow \begin{cases} y(x) = 0 \quad \forall x \in I \\ \frac{y'(x)}{y(x)} = -p(x) \quad \text{EDVS} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int p(x) dx \end{cases}$$

$\Rightarrow \ln |y| = -P(x) + C_1$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$, $C_1 \in \mathbb{R}$ -23-

$$|y| = e^{-P(x) + C_1} = \underbrace{e^{C_1}}_{C_2 > 0} e^{-P(x)} \Rightarrow y(x) = \pm C_2 e^{-P(x)}, C_2 \in \mathbb{R}_+^*$$

Mais on a aussi $y(x) = 0$ sur $I \Rightarrow$

$$\underline{y(x) = C e^{-P(x)}}$$

$C \in \mathbb{R}, x \in I$
est la solution générale
de l'équation homogène associée
 $y' + p y = 0$ sur I .

Exercice: vérifie que $y'(x) + p(x)y(x) = 0$.

$$y'(x) + p(x)y(x) = -C e^{-P(x)} p(x) + p(x) C e^{-P(x)} = 0 \quad \text{☺}$$

Principe de superposition de solutions

Soit $I \subset \mathbb{R}$ ouvert, $p, f_1, f_2 : I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues

Supposons que v_1 : $I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation

$$y' + \underline{p(x)}y = \underline{f_1(x)}$$

$p(x)$ est la même fonction!

et v_2 : $I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 est une solution de l'équation

$$y' + \underline{p(x)}y = \underline{f_2(x)}$$

Alors pour tout couple $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, la fonction $v(x) = c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)$ est une solution de l'équation $y' + p(x)y = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$

$$\begin{aligned} \text{Vérification: } v'(x) + p(x)v(x) &= c_1 v_1'(x) + c_2 v_2'(x) + p(x)(c_1 v_1(x) + c_2 v_2(x)) = \\ &= c_1 \underbrace{(v_1'(x) + p(x)v_1(x))}_{f_1(x)} + c_2 \underbrace{(v_2'(x) + p(x)v_2(x))}_{f_2(x)} = c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \end{aligned}$$

Méthode de la variation de constante.

On cherche une solution particulière de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$; $p, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continues
sous la forme:

Ansatz: $v(x) = \underbrace{C(x)}_{\substack{\text{fonction inconnue de } x}} e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I .

Si $v(x)$ est une solution $\Rightarrow v'(x) + p(x)v(x) = f(x)$

$$\Rightarrow C'(x) e^{-P(x)} + \cancel{C(x) (-e^{-P(x)}) \cdot p(x)} + p(x) \cancel{C(x) e^{-P(x)}} = f(x)$$

$$\Rightarrow C'(x) = f(x) e^{P(x)} \Rightarrow \boxed{C(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx}$$

$\Rightarrow$ Une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$

est $v(x) = \left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) \cdot e^{-P(x)}$ où $P(x)$ est une primitive
de $p(x)$ sur I

Exercice: vérifier par dérivation.

$$v'(x) + p(x)v(x) = \underbrace{f(x)} \cdot \underbrace{e^{P(x)}} \cdot \underbrace{e^{-P(x)}} + \cancel{\left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) \cdot (-e^{-P(x)}) \cdot p(x)} + p(x) \cancel{\left(\int f(x) e^{P(x)} dx \right) e^{-P(x)}} = f(x) \quad \text{!}$$

Proposition. Soient $p, f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues. Supposons que $v_0: I \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution particulière de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.

Alors la solution générale de cette équation est

$$\underline{v(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}}, \text{ pour tout } C \in \mathbb{R}, \text{ où } P(x) \text{ est une primitive de } p(x) \text{ sur } I.$$

Dém: (1) Soit $v_1(x)$ une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$. On va démontrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $v_1(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}$, où $v_0(x)$ est une solution de $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$.

$$\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R} : v_1(x) - v_0(x) = C e^{-P(x)}$$

(2) Par le principe de superposition des solutions, la fonction $v_1(x) - v_0(x)$ est une solution de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x) - f(x) = 0$

(3) $y'(x) + p(x)y(x) = 0$ est EDVS $\Rightarrow$ la solution générale

de cette équation est $v(x) = C e^{-P(x)}$, $C \in \mathbb{R}$
et $P(x)$ est une primitive de $p(x)$ sur I .

Alors il existe une valeur de $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$v_1(x) - v_0(x) = C e^{-P(x)}$$

(4) $\Rightarrow$ la solution $v_1(x)$ est de la forme $v_1(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}$

(5) Puisque $v_1(x)$ était une solution arbitraire, on obtient que l'ensemble de toutes les solutions de l'équation $y'(x) + p(x)y(x) = f(x)$ est $v(x) = v_0(x) + C e^{-P(x)}$ $C \in \mathbb{R}, x \in \bar{I}$

Donc, par la définition $v(x)$ est la solution générale. 

Ex 2. $y' + \underbrace{\frac{1}{x}}_{p(x)} y = \underbrace{\frac{1}{x+1}}_{f(x)}, \quad x \in]0, \infty[$ Trouver une solution particulière et la solution générale.
 $p, f:]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continues.

(1) Equation homogène associée: $y' + \frac{1}{x} y = 0$

$$p(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow P(x) = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| = \ln x \quad \text{puisque } x > 0$$

← pas de constante

$$\Rightarrow y_{\text{homogène générale}}(x) = C e^{-P(x)} = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x} \quad \forall x \in]0, \infty[$$

solution générale de l'équation homogène associée.

(2) Solution particulière de $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x+1}$ par la variation de constante.

$$C(x) = \int f(x) e^{P(x)} dx = \int \frac{1}{x+1} e^{\ln x} dx = \int \frac{x}{x+1} dx = \int \frac{x+1-1}{x+1} dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \ln|x+1| = x - \ln(\underbrace{x+1}_{>0}) \quad x \in]0, \infty[$$

$$\Rightarrow y(x) = C(x) e^{-P(x)} = (x - \ln(x+1)) e^{-\ln x} = (x - \ln(x+1)) \frac{1}{x} =$$

$$= 1 - \frac{\ln(x+1)}{x}, \quad x \in]0, \infty[$$

-29-

Vérification: $y'(x) = - \frac{\frac{1}{x+1} \cdot x - \ln(x+1)}{x^2} = - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{\ln(x+1)}{x^2}$

$$y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{\ln(x+1)}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} = - \frac{1}{x(x+1)} + \frac{1}{x} = \frac{-1+x+1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} = f(x) \quad \text{😊}$$

$\Rightarrow$ une solution particulière de $y'(x) + \frac{1}{x} y(x) = \frac{1}{x+1}$
est $y_{\text{part}}(x) = 1 - \frac{\ln(x+1)}{x}$

La solution générale: $y(x) = y_{\text{part}}(x) + y_{\text{hom}}^{\text{générale}}(x)$

$$y(x) = 1 - \frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{C}{x} \quad \forall C \in \mathbb{R}$$

$$x \in \mathbb{R}_+^*$$

