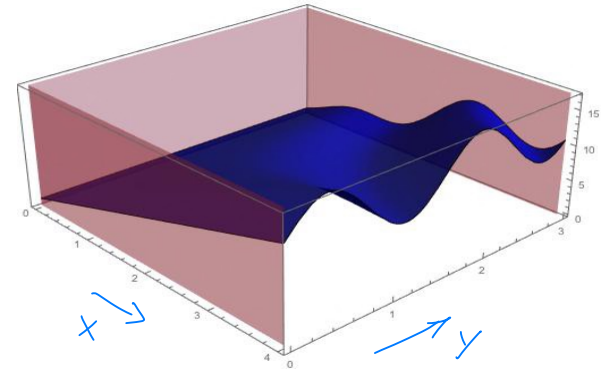


Ex Calculer le volume du sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ défini par
 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 3, 0 \leq z \leq (1 + 3x + x \sin(xy))\}$ continue

$$\begin{matrix} 1+x(3+\sin(xy)) > 0 \\ \geq 0 & \geq 2 \end{matrix}$$

$$P = [0, 4] \times [0, 3]$$

x y linéaire



$$V = \iint_P (1 + 3x + x \sin(xy)) dx dy = \underbrace{\iint_P 1 dx dy}_{1 \cdot (4-0)(3-0) = 12} + 3 \underbrace{\iint_P x dx dy}_{\text{linéaire}} + \iint_P x \sin(xy) dx dy$$

$$\rightarrow 3 \int_0^3 \left(\int_0^4 x dx \right) dy = 3 \int_0^3 1 dy \cdot \int_0^4 x dx = 3y \Big|_0^3 \cdot \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^4 = 9 \cdot 8 = \underline{72}$$

$$\begin{aligned} \iint_P x \sin(xy) dx dy &= \int_0^4 \left(\int_0^3 x \sin(xy) dy \right) dx = \int_0^4 \left(\int_0^3 \sin(xy) d(xy) \right) dx = \int_0^4 -\cos(xy) \Big|_0^3 dx = \\ &= \int_0^4 (-\cos(3x) + \cos(0)) dx = -\frac{1}{3} \sin(3x) + x \Big|_0^4 = \underline{-\frac{1}{3} \sin(12) + 4} \end{aligned}$$

$$V = 12 + 72 + 4 - \frac{1}{3} \sin(12) = 88 - \frac{1}{3} \sin(12)$$

Considérons $\int_0^3 \left(\int_0^4 x \sin(xy) dx \right) dy$

$$\int_0^4 x \sin(xy) dx = - \int_0^4 \underbrace{\frac{x}{y}}_f d(\underbrace{\cos(xy)}_g) = - \frac{x \cos(xy)}{y} \Big|_0^4 + \int_0^4 \cos(xy) \cdot \frac{1}{y} dx =$$

$$= - \frac{4 \cos(4y)}{y} + \frac{1}{y^2} \sin(xy) \Big|_0^4 = - \frac{4 \cos(4y)}{y} + \frac{\sin(4y)}{y^2}$$

est-ce que la fonction
peut être prolongée
en $y=0$? Oui

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{4y} - \frac{1}{6}(4y)^3 + \dots - 4y(\cancel{1} - \frac{1}{2}(4y)^2 + \dots)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\text{coeff} \cdot y^3}{y^2} = 0.$$

$$\Rightarrow \int_0^3 \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} dy = \int_0^3 \frac{\sin(4y)}{y^2} dy - \int_0^3 \frac{4y \cos(4y)}{y^2} dy$$

les primitives ne s'expriment pas en fonctions élémentaires

mais on peut essayer avec la somme:

$$\begin{aligned}
\int_0^3 \frac{\sin(4y) - 4y \cos(4y)}{y^2} dy &= \int_0^3 \underbrace{(4y \cos(4y) - \sin(4y))}_f d \underbrace{\left(\frac{1}{y}\right)}_g = \\
&= -\frac{\sin(4y)}{y} + 4 \cos(4y) \Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{\cancel{4 \cos(4y)} - \cancel{16} \sin(4y) - \cancel{4 \cos(4y)}}{\cancel{y}} dy = \\
&= -\frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) + \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(4y)}{y} - 4 + \int_0^3 16 \sin(4y) dy = -\frac{\sin(12)}{3} + 4 \cos(12) + 4 - 4 + \\
&\quad + (-4 \cos(4y)) \Big|_0^3 = -\frac{\sin(12)}{3} + \cancel{4 \cos(12)} - \cancel{4 \cos(12)} + 4 \\
&\quad = \underline{4 - \frac{1}{3} \sin(12)} \quad \text{comme avant.}
\end{aligned}$$

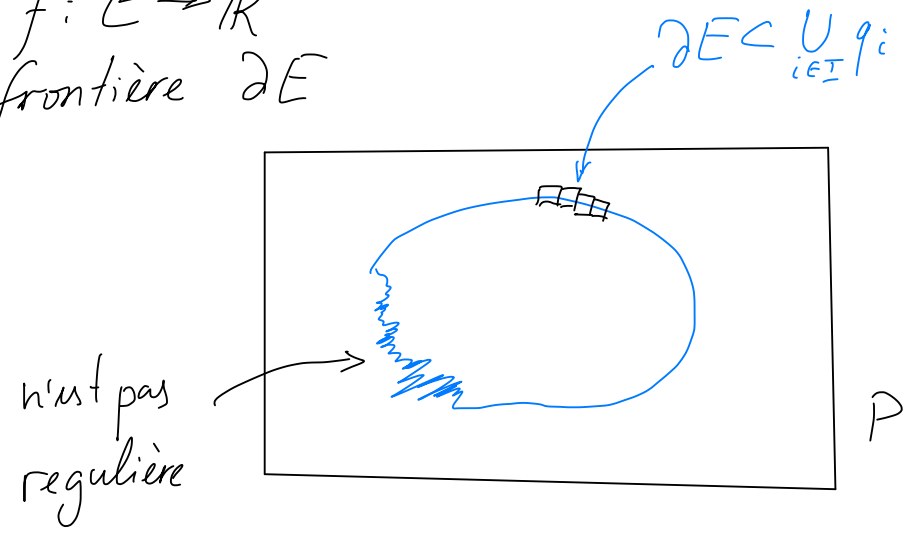
$$\Rightarrow V = 12 + 72 + 4 - \frac{1}{3} \sin(12) = \underline{88 - \frac{1}{3} \sin(12)}$$

Conclusion: Le choix prudent de l'ordre d'intégration est important.

Remarque. (1) La définition ne dépend pas du choix de pavé fermé autour de E .

(2) Condition suffisante d'intégrabilité. Si $f: \bar{E} \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée sur E , continue sur $\bar{E}$ et la frontière ∂E est assez régulière (de mesure nulle).

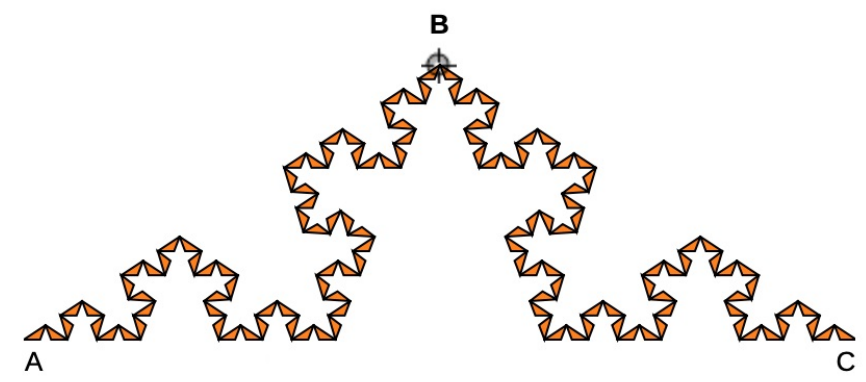
$\Rightarrow$ Alors $f(x)$ est intégrable sur E
(Voir [DZ, § 17.2])



Frontière régulière:

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists$ un recouvrement $\partial E \subset \bigcup_{i \in I} q_i$, q_i pavés fermés tels que $\sum_{i \in I} |q_i| < \varepsilon$
 $\stackrel{\text{def}}{\Rightarrow} \partial E$ est de mesure nulle.

Par exemple la courbe d'Osgood peut avoir l'aire non nul.



§5.3. Théorème de Fubini sur un domaine régulier (dans $\mathbb{R}^2$)

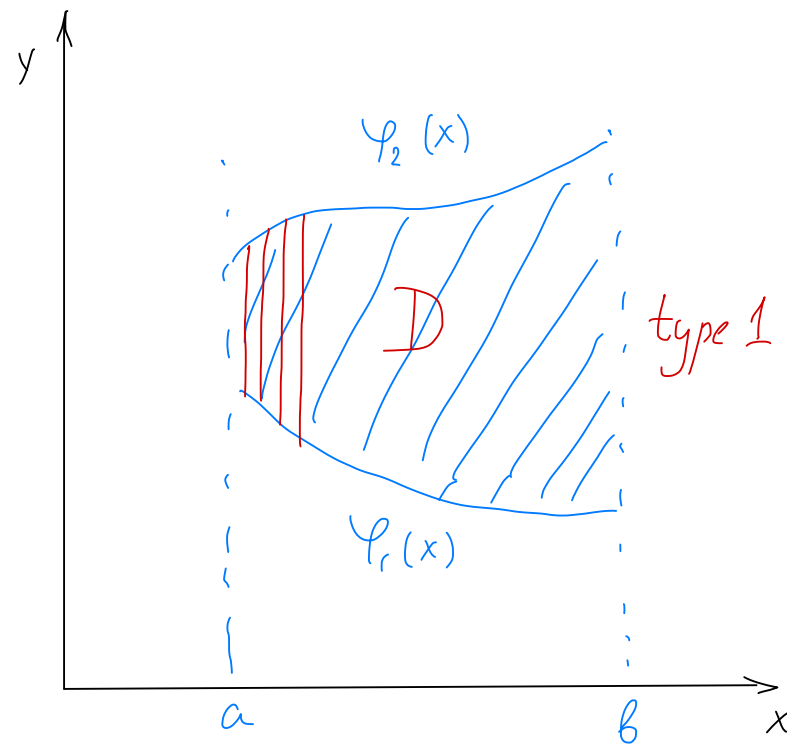
de type 1 :

- (1) Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ intervalle, $a < b$
 $\varphi_1, \varphi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues, telles que
 $\varphi_1(x) < \varphi_2(x) \quad \forall x \in]a, b[.$

Soit $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x) \}$
 $\nwarrow$ domain à frontière régulière de type 1.

Alors pour toute fonction continue $f: \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y) dy \right) dx$$



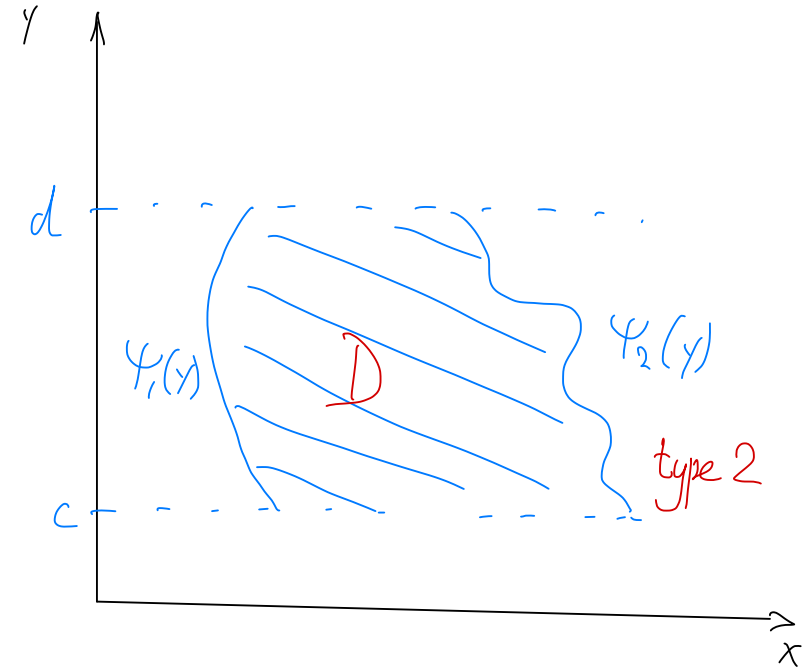
de type 2:

- (2) Soit $[c, d] \subset \mathbb{R}$ intervalle, $c < d$
 $\Psi_1, \Psi_2 : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonctions continues telles que
 $\Psi_1(y) < \Psi_2(y) \quad \forall y \in]c, d[$

Soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c < y < d, \Psi_1(y) < x < \Psi_2(y)\}$
 ↗ domaine à frontière régulière de type 2

Alors pour toute fonction continue $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$ on a

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d \left(\int_{\Psi_1(y)}^{\Psi_2(y)} f(x, y) dx \right) dy$$

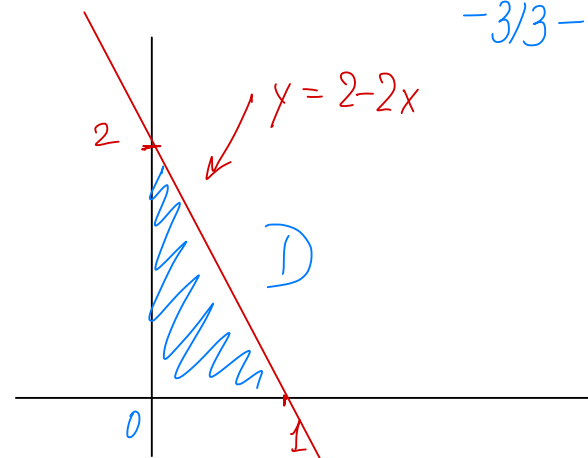


Ex 1. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, 0 < y < 2-2x\}$

$f(x, y) = xy$ D de type 1

$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 0 < x < 1, \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}$

$\varphi_1(x) = 0, \varphi_2(x) = 2-2x$ continues



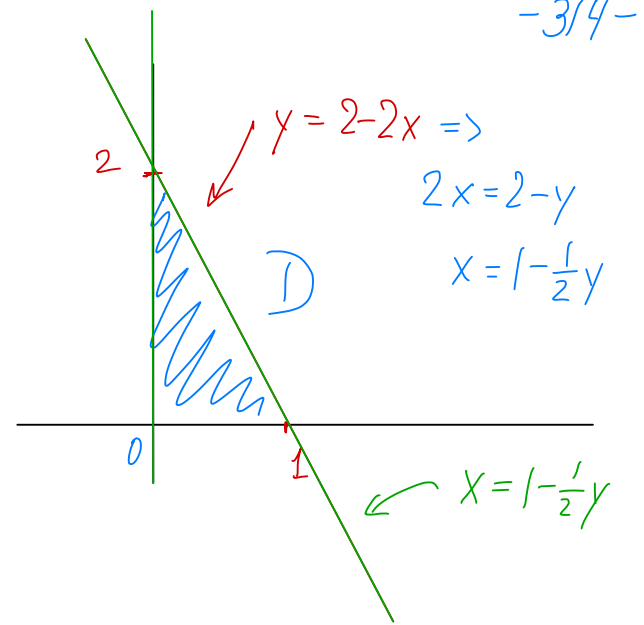
$$\iint_D xy \, dx \, dy = \int_0^1 \left(\int_0^{2-2x} xy \, dy \right) dx = \int_0^1 \left(x \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{2-2x} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 x (2-2x)^2 dx = 2 \int_0^1 x (1-x)^2 dx = 2 \int_0^1 x (1-2x+x^2) dx = 2 \int_0^1 (x-2x^2+x^3) dx =$$

$$= 2 \left(\frac{1}{2} x^2 - \frac{2}{3} x^3 + \frac{1}{4} x^4 \right) \Big|_0^1 = 2 \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} \right) = 2 \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} \right) = 2 \cdot \frac{1}{12} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

$\mathcal{D}$ de type 2 : $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < y < 2, 0 < x < 1 - \frac{1}{2}y\}$
aussi $\psi_1(y) = 0, \psi_2(y) = 1 - \frac{1}{2}y$

$$\iint_{\mathcal{D}} xy \, dx \, dy = \int_0^2 \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} xy \, dx \right) dy = \int_0^2 \left(\int_0^{1-\frac{1}{2}y} xy \, dx \right) dy =$$



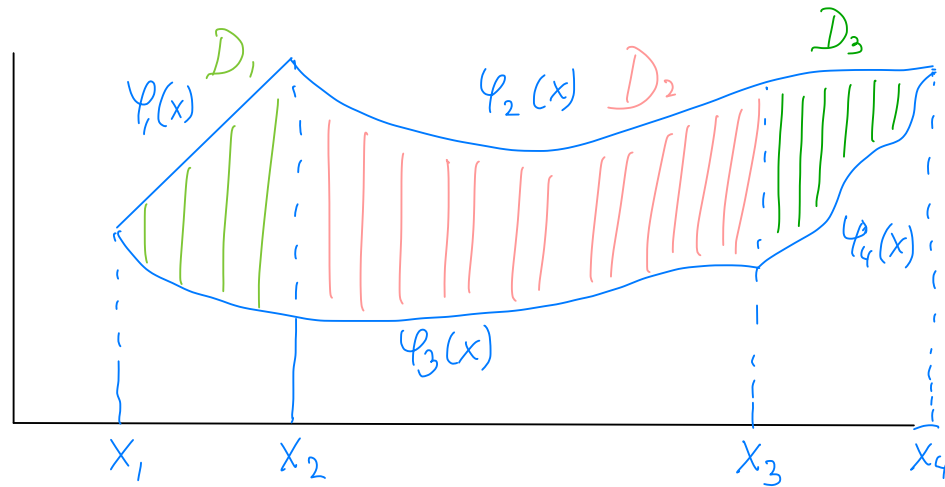
$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{2} x^2 y \Big|_0^{1-\frac{1}{2}y} \right) dy = \int_0^2 \frac{1}{2} y \left(1 - \frac{1}{2}y \right)^2 dy = \frac{1}{2} \int_0^2 y \left(1 - y + \frac{1}{4}y^2 \right) dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 \left(y - y^2 + \frac{1}{4}y^3 \right) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4 \right) \Big|_0^2 = \frac{1}{2} \left(2 - \frac{8}{3} + 1 \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}$$

comme avant. ☺

Si le domaine D n'est pas de type 1 ou 2?

$D = \bigcup_{i=1}^3 D_i$
 domaines de type 1 ou 2



Il faut diviser le domaine
 en réunion des domaines
 de type 1 ou 2
 et utiliser l'additivité
 de l'intégrale.

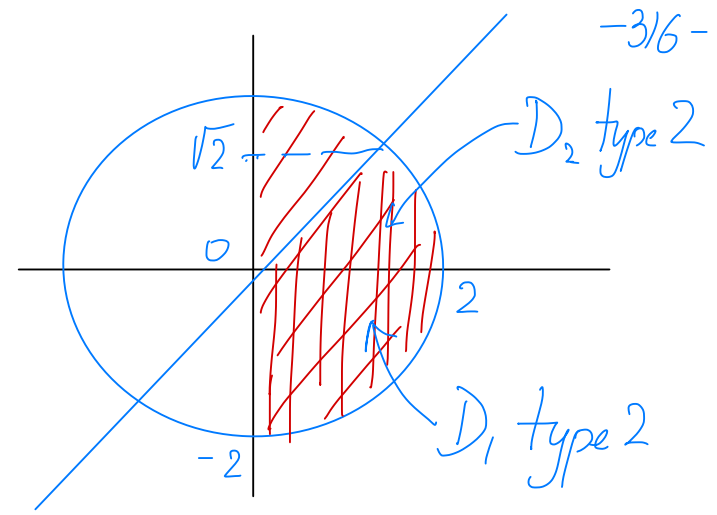
$$\textcircled{1} \quad \iint_D f(x,y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_1(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_{x_2}^{x_3} \left(\int_{\varphi_3(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx + \int_{x_3}^{x_4} \left(\int_{\varphi_4(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right) dx$$

pour une fonction continue $f: \bar{D} \rightarrow \mathbb{R}$.

Ex 2 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, y \leq x\}$.

Calculer $\iint_D \frac{x}{4+y^2} dx dy = I$

$x = \sqrt{4-y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$; $\sqrt{4-y^2} = y \Rightarrow 4 - 2y^2 = 0$
 $y^2 = 2, y = \sqrt{2}$



$D_1 = \{-2 < y < 0, 0 < x < \sqrt{4-y^2}\}$

$D_2 = \{0 < y < \sqrt{2}, y < x < \sqrt{4-y^2}\}$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{-2}^0 \left(\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{4+y^2} dx \right) dy + \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{x}{4+y^2} dx \right) dy = \int_{-2}^0 \frac{1}{2} \left(\frac{4-y^2}{4+y^2} \right) dy + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{4-y^2-y^2}{4+y^2} \right) dy = \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{-4-y^2+8}{4+y^2} dy + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{-2(4+y^2)+12}{4+y^2} dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \left(-1 + \frac{8}{4+y^2} \right) dy + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \left(-2 + \frac{12}{4+y^2} \right) dy = \\
 &= -\frac{1}{2} y \Big|_{-2}^0 + \int_{-2}^0 \frac{4}{4+y^2} dy - y \Big|_0^{\sqrt{2}} + \frac{3}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{4}{4+y^2} dy = -1 + 2 \int_{-2}^0 \frac{1}{1+(\frac{y}{2})^2} d\left(\frac{y}{2}\right) - \sqrt{2} +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{3}{2} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} d\left(\frac{y}{2}\right) = -1 + 2 \arctan\left(\frac{y}{2}\right) \Big|_{-2}^0 - \sqrt{2} + 3 \arctan\left(\frac{y}{2}\right) \Big|_0^{\sqrt{2}} =$$

$\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$

$$= -1 - \sqrt{2} + -2\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 3 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= -1 - \sqrt{2} + \frac{\pi}{2} + 3 \arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) > 0$$

$$\sim 0,615$$

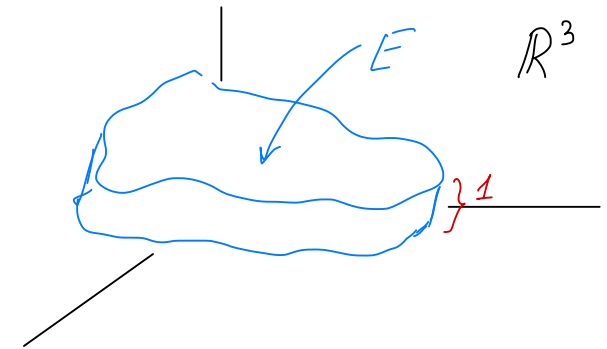
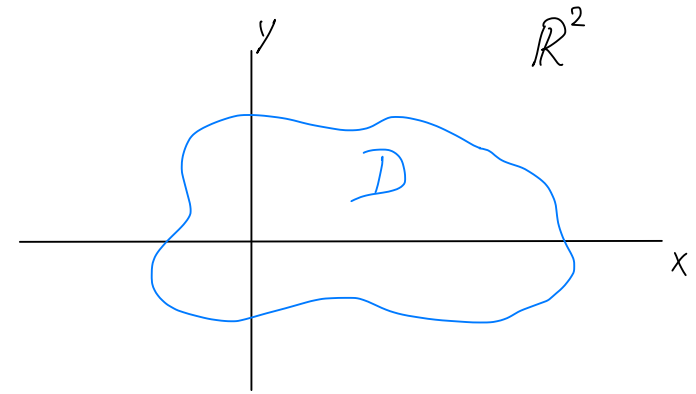
Remarque: calcul d'aire d'un domaine dans $\mathbb{R}^2$

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un sous-ensemble régulier

Alors on peut calculer l'aire de D par intégration double comme suit:

Soit $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D, 0 \leq z \leq 1\} = D \times [0, 1]$

Alors si $\text{Aire}(D) = \alpha \text{ (m}^2\text{)} \Rightarrow \text{Volume}(E) = \alpha \cdot 1 = \alpha \text{ (m}^3\text{)}$
 la même valeur numérique



Par définition, $\text{Volume}(E) = \iint_D f(x, y) dx dy$ où $f(x, y) = 1$ constante.

$\Rightarrow$

$$\text{Aire}(D) = \iint_D 1 \cdot dx dy.$$

Q20

L'aire du domaine D entre les courbes $y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = 1 - x$.
est donné par l'intégrale

A $\int_{-2}^2 dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx$

B $\int_1^2 dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx + \int_{-2}^1 dy \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} dx$

C $\int_1^2 dy \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} dx + \int_{-2}^1 dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx$

D $\int_{-2}^1 dy \int_{1-y}^{2-2\sqrt{y}} dx$

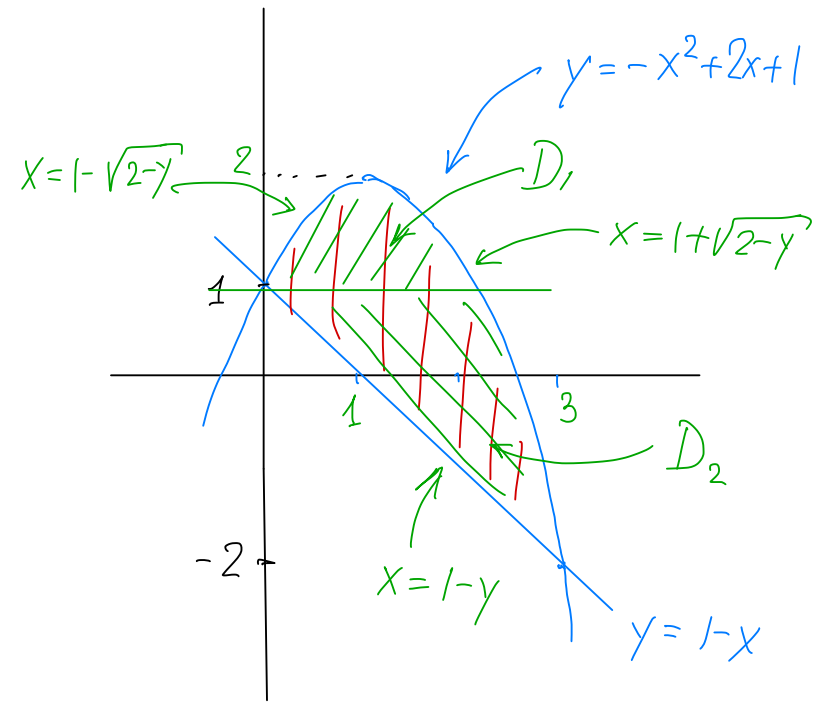
D entre les courbes $y = -x^2 + 2x + 1$ et $y = 1 - x$.

$$y = -x^2 + 2x + 1 \\ = -(x-1)^2 + 2$$

Intersection:

$$\begin{aligned} -x^2 + 2x + 1 &= 1 - x \\ -x^2 + 3x &= 0 \Rightarrow x = 0, 3 \\ \Rightarrow (0, 1) \text{ et } (3, -2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= -(x-1)^2 + 2 \Rightarrow (x-1)^2 = 2-y \\ \Rightarrow (x-1) &= \pm \sqrt{2-y} \Rightarrow x = 1 \pm \sqrt{2-y} \end{aligned}$$



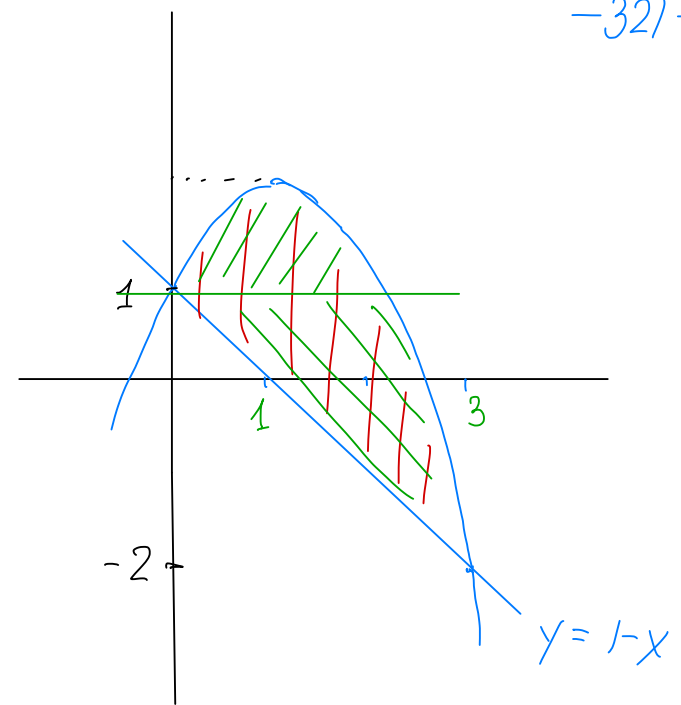
$$D_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < y < 2, 1 - \sqrt{2-y} < x < 1 + \sqrt{2-y}\} \quad \text{type 2}$$

$$D_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 < y < 1, 1 - y < x < 1 + \sqrt{2-y}\}$$

$$\Rightarrow \iint_D 1 dx dy = \int_1^2 dy \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} 1 dx + \int_{-2}^1 dy \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} 1 dx \Rightarrow C$$

D de type 1: $D = \{(x, y) : 0 < x < 3, 1-x < y < -x^2+2x+1\}$

$$\begin{aligned} \int_0^3 \left(\int_{1-x}^{-x^2+2x+1} 1 \, dy \right) dx &= \int_0^3 (-x^2+2x+1-(1-x)) \, dx = \\ &= \int_0^3 (-x^2+3x) \, dx = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \Big|_0^3 = -9 + \frac{27}{2} = \\ &= 4 + \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}}} \end{aligned}$$



Exercice: obtenir le même résultat par l'intégration de type 2:

$$\int_1^2 \int_{1-\sqrt{2-y}}^{1+\sqrt{2-y}} dx \, dy + \int_{-2}^{-1} \int_{1-y}^{1+\sqrt{2-y}} dx \, dy = \dots = \frac{9}{2}$$