

Chapitre 5. Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables.

§5.1. Intégrale sur un pavé fermé.

§5.2. Théorème de Fubini sur un pavé fermé.

§5.3. Intégrale sur un domaine borné.

§5.4. Théorème de Fubini sur un domaine régulier.

§5.5. Changement de variables dans une intégrale multiple.

a) Coordonnées polaires

b) Coordonnées sphériques et cylindriques.

Chapitre 5. Calcul intégral des fonctions de plusieurs variables.

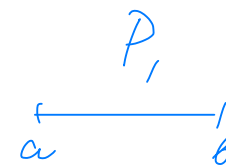
§5.1. Intégrale sur un pavé fermé.

Déf Un pavé fermé est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ qui est le produit cartésien de n intervalles fermés bornés:

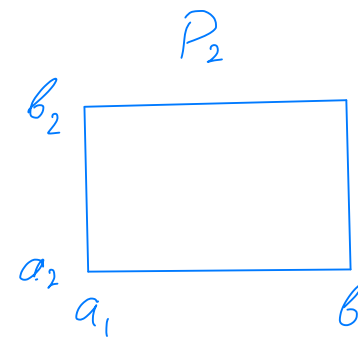
$$P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \quad a_i < b_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\text{Pavé ouvert} \quad P^\circ =]a_1, b_1[\times \dots \times]a_n, b_n[$$

Ex 1. Pavé $\dim = 1$ $P_1 = [a, b]$ intervalle fermé borné



Pavé $\dim = 2 \Rightarrow P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$



Déf Le volume d'un pavé fermé est défini par

$$|P| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \dots (b_n - a_n)$$

notation pour le volume

Ex 1. $|P_1| = b - a$; $|P_2| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2) = \text{l'aire du rectangle}$

Déf. Soit σ_j une subdivision de $[a_j, b_j]$; $a_j < b_j$

$$\sigma_j = \{a_j = x_0^j < x_1^j < \dots < x_{n_j}^j < b_j\}$$

Alors $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ est appelée une subdivision de P .

Ex 2. $P_2 = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$, $\sigma = \{\{a_1, x_1, x_2, b_1\}, \{a_2, y_1, y_2, y_3, b_2\}\}$

$D(\sigma)$ est la collection des pavés engendrés par la subdivision

$y_4 = b_2$			
y_3	Q_{14}	Q_{24}	Q_{34}
y_2	Q_{13}	Q_{23}	Q_{33}
y_1	Q_{12}	Q_{22}	Q_{32}
$y_0 = a_2$	Q_{11}	Q_{21}	Q_{31}
	$a_1 = x_0$	x_1	x_2
			$b_1 = x_3$

Soit $D(\sigma)$ la collection de pavés fermés engendrés par la subdivision $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$

$$P_2 = \bigcup_{\substack{i=1 \dots 3 \\ j=1 \dots 4}} Q_{ij}$$

-290-

Soit $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ bornée sur P Alors on définit les sommes de Darboux de f sur P .
 pavé fermé

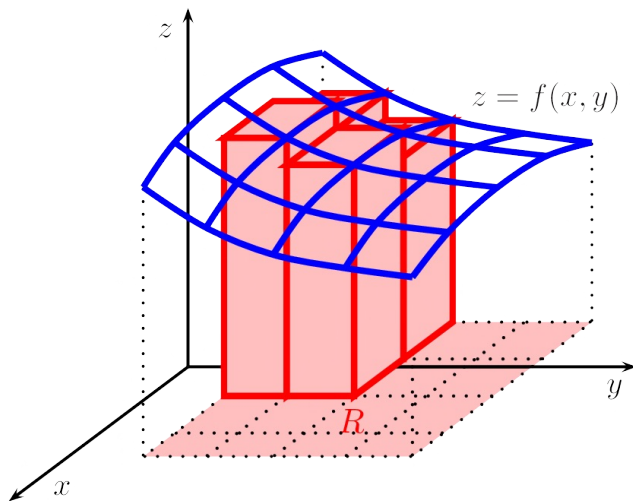
Déf Soit $D(\sigma)$ une collection des pavés fermés engendrée par la subdivision σ .

Alors: $\underline{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} m(Q) |Q|$ où $m(Q) = \inf_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$

$\bar{S}_\sigma(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \sum_{Q \in D(\sigma)} M(Q) |Q|$ où $M(Q) = \sup_{\bar{x} \in Q} f(\bar{x})$

Alors $\underline{S}(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \sup \{ \underline{S}_\sigma(f), \sigma \text{ est une subdivision de } P \}$ est la somme de Darboux inférieure pour $f(\bar{x})$ sur P .

$\bar{S}(f) \stackrel{\text{dét}}{=} \inf \{ \bar{S}_\sigma(f), \sigma \text{ est une subdivision de } P \}$ est la somme de Darboux supérieure pour f sur P .



← Somme de Darboux inférieure $\underline{S}_\sigma(f)$ associée à la subdivision σ .

Déf. Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé et $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée.

Alors f est intégrable sur P si et seulement si

$$\underline{S}(f) = \overline{S}(f) \quad (\text{On a toujours } \underline{S}(f) \leq \overline{S}(f))$$

Dans ce cas, l'intégrale de f sur P est définie par

$$\iiint_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \iint_P \dots \int_P f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n \stackrel{\text{dét}}{=} \underline{S}(f) = \overline{S}(f).$$

notations

Ex 3. Soit $P \subset \mathbb{R}^n$ un pavé fermé. $f: P \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\bar{x}) = C \in \mathbb{R}$ constante

$$\text{Soit } \sigma \text{ une subdivision de } P. \quad \underline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \overbrace{\inf_Q(f)}^{=C} |Q| = \sum_{Q \in D(\sigma)} C \cdot |Q| = C \sum_Q |Q| = C|P|$$

$$\overline{S}_\sigma(f) = \sum_{Q \in D(\sigma)} \overbrace{\sup_Q(f)}^{=C} |Q| = \sum_{Q \in D(\sigma)} C \cdot |Q| = C \sum_Q |Q| = C|P|$$

$$\Rightarrow \underline{S}(f) = \sup_\sigma \underline{S}_\sigma(f) = \sup_\sigma (C \cdot |P|) = C \cdot |P| \quad \text{par} \quad \int_P C d\bar{x} = C|P|$$

$$\overline{S}(f) = \inf_\sigma \overline{S}_\sigma(f) = \inf_\sigma (C \cdot |P|) = C \cdot |P| \quad \text{dét}$$

En particulier, soit $f(\bar{x}) = 1$ constante.

Alors $\int d\bar{x} = \int \dots \int dx_1 \dots dx_n$

(1) Si $P = [a, b]$ $\Rightarrow \int_a^b 1 dx = b - a$ - la longueur de l'intervalle $[a, b]$

Intégrale double:

(2) Si $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2]$ $\Rightarrow \iint_{[a_1, b_1] \times [a_2, b_2]} 1 dx dy = |P| \cdot 1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)$
l'aire du rectangle $P \subset \mathbb{R}^2$

(3) Intégrale triple:

Si $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$ $f(x, y, z) = 1$

$\Rightarrow \iiint_P 1 \cdot dx dy dz = |P| \cdot 1 = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3) = |P|$ le volume de $P \subset \mathbb{R}^3$.

Thm Toute fonction continue est intégrable sur un pavé fermé.

Idée: Soit $f: \underset{\text{pavé fermé}}{P} \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$ une fonction continue.

(1) Alors f est bornée sur P . Puisque P est un sous-ensemble compact
 $\Rightarrow$ une fonction continue atteint son min et max sur $P \Rightarrow f$ est bornée sur P .

(2) Intégrabilité. Soit $\varepsilon > 0$. Si f est continue en chaque point de P
 $\Rightarrow \forall \bar{x}_0 \in P \quad \exists \delta_{\bar{x}_0} : \|\bar{x}_0 - \bar{x}\| < \delta_{\bar{x}_0} \Rightarrow |f(\bar{x}) - f(\bar{x}_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$

On considère le recouvrement de P par des boules ouvertes $B(\bar{x}_0, \delta_{\bar{x}_0})$

$\Rightarrow$ Thm Heine-Borel-Lebesgue : $\Rightarrow$ recouvrement fini $\leadsto$ subdivision fini σ

$$\leadsto \bar{S}_\sigma - \underline{S}_\sigma \leq \varepsilon |P| \Rightarrow \bar{S} - \underline{S} \leq \varepsilon |P|$$

$\Rightarrow f$ est intégrable sur P .

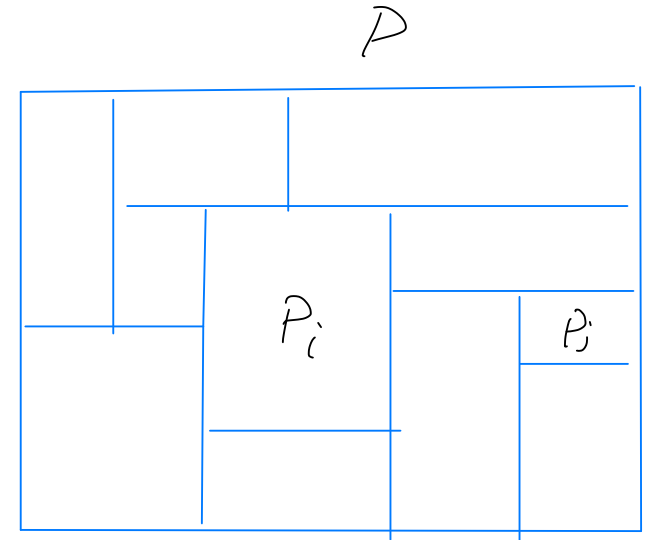
Propriétés de l'intégrale.

(1) Additivité

Soit P un pavé fermé et $\{P_i\}_{i \in I}$ une famille finie (denombrable) des pavé fermés tels que $P = \bigcup_{i \in I} P_i$ et $P_i \cap P_j = \emptyset, i \neq j$

Alors pour toute fonction continue $f: P \rightarrow \mathbb{R}$

$$\text{on a } \int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \sum_{i \in I} \int_{P_i} f(\bar{x}) d\bar{x}$$



(2) Linéarité: Soit P un pavé fermé;
 $f, g: P \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

$$\text{Alors } \int_P (\alpha f(\bar{x}) + \beta g(\bar{x})) d\bar{x} = \alpha \int_P f(\bar{x}) d\bar{x} + \beta \int_P g(\bar{x}) d\bar{x} \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

(3) Soit $f: P \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, intégrable sur P , et telle que
 pavé fermé

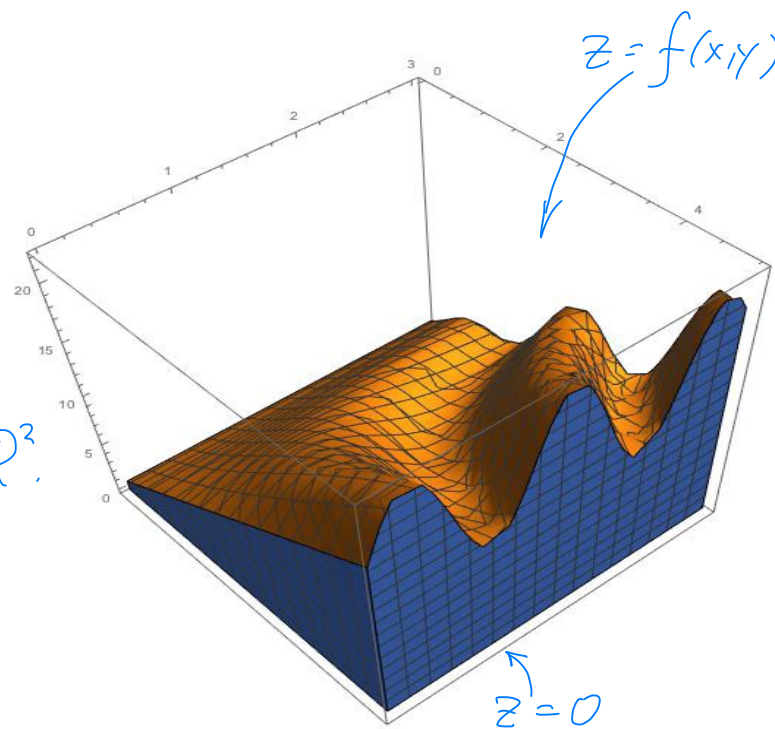
$$|f(\bar{x})| \leq K < \infty \quad \forall \bar{x} \in P \quad -K \leq f(\bar{x}) \leq K$$

$$\text{Alors } -K|P| \leq \int_P f(\bar{x}) d\bar{x} \leq K \cdot |P|$$

Déf On définit le volume de l'ensemble sous la surface $z = f(x, y) \geq 0$
pour $f: P \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ intégrable par

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \iint_P f(x, y) \, dx \, dy$$

V = le volume du sous-ensemble entre $z = 0$
et $z = f(x, y) \geq 0$ au dessus du pavé fermé $P \subset \mathbb{R}^2$.



§ 5.2. Théorème de Fubini sur un pavé fermé.

Thm. (Fubini) Soit $f: P \xrightarrow[\text{continue}]{\mathbb{C}\mathbb{R}^n} \mathbb{R}$, $P = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n]$
 $\uparrow$
 pavé fermé

Alors f est intégrable sur P et on a:

$$\int_P f(\bar{x}) d\bar{x} = \int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \dots x_n) dx_1 \right) dx_2 \dots dx_{n-1} \right) dx_n$$

pour tout choix de l'ordre d'intégration

$\int_{a_1}^{b_1} f(x_1 \dots x_n) dx_1$
 $\uparrow \uparrow$
 $x_2 \dots x_n$ sont des paramètres

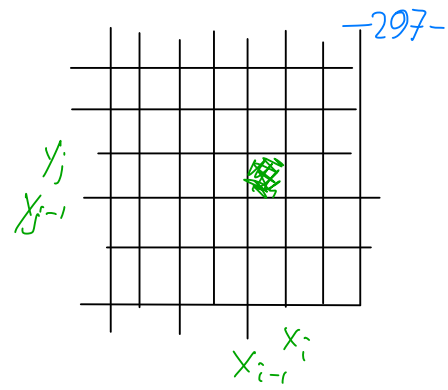
$= g_1(x_2 \dots x_n) \rightarrow \int_{a_2}^{b_2} g_1(x_2 \dots x_n) dx_2 = g_2(x_3 \dots x_n)$, et ainsi de suite

$$\rightarrow \int_{a_n}^{b_n} g_{n-1}(x_n) dx_n = \alpha \in \mathbb{R}$$

Important: On peut échanger l'ordre des variables dans l'intégration
 sur un pavé fermé

Théorème. Cas $n=2$. Soit $f: P = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue

$$\text{Alors } \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_P f(x, y) dx dy$$



Idee : Trouver une subdivision de P assez fine telle que $P = \bigcup P_{ij}$ et $f(x, y) \approx C_{ij}$ sur P_{ij} , $C_{ij} \in \mathbb{R}$ des constantes

$$\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy \stackrel{\text{additivité}}{=} \sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} \left(\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx \right) dy \stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_{i,j} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) dx dy \stackrel{\text{sur } P_{ij}}{\approx} \int_{y_{j-1}}^{y_j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y) \approx C_{ij} dx dy$$

$$\approx \sum_{i,j} C_{ij} (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) = \sum_{j,i} C_{ij} (y_j - y_{j-1})(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} C_{ij} dy dx \stackrel{\text{sur } P_{ij}}{\approx} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y) \approx C_{ij} dy dx$$

$$\sum_{i,j} a_{ij} = \sum_j \left(\underbrace{\sum_i a_{ij}}_{c_j} \right) = \sum_j c_j$$

$$\begin{aligned}
 & \approx \sum_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y) dy \right) dx \stackrel{\text{linéarité}}{=} \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left(\sum_j \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y) dy \right) dx \stackrel{\text{additivité}}{=} \\
 & = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx
 \end{aligned}$$



Conclusion:

Cas $n=2$. Soit $f: P = [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue.

$$\text{Alors } \iint_P f(x,y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) dx \right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) dy \right) dx.$$

Ex 1. Calculer $\iint_P x e^{xy} dx dy$, $P = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 x e^{xy} dy \right) dx = \int_0^1 dx \int_0^1 e^{xy} d(xy) \stackrel{x \text{ parametre}}{=} \int_0^1 dx \left(e^{xy} \Big|_0^1 \right) = \int_0^1 dx (e^x - 1) =$$

$$= \int_0^1 (e^x - 1) dx = e^x - x \Big|_0^1 = e - 1 - 1 = e - 2.$$

Autrement: $\int_0^1 x e^{xy} dx = \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{y}}_f x \underbrace{d(e^{xy})}_g = \underbrace{\frac{x}{y}}_f e^{xy} \Big|_0^1 - \int_0^1 e^{xy} \frac{1}{y} dx = \frac{1}{y} e^y - 0 -$

$$\int f dg = fg - \int g df$$

$$- \int_0^1 \frac{1}{y^2} e^{xy} d(xy) = \frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} e^{xy} \Big|_0^1 = \frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} (e^y - 1)$$

$$\leadsto \int_0^1 \left(\frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} (e^y - 1) \right) dy$$

$x=0?$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} e^y - \frac{e^y - 1}{y^2} \right) = ?$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\frac{1}{y} e^y - \frac{e^y - 1}{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{ye^y - (e^y - 1)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y(1 + y + \frac{y^2}{2} + \dots) - (\cancel{1} + y + \frac{y^2}{2} + \dots - \cancel{1})}{y^2} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{1} + y^2 + \dots - \cancel{1} - \frac{y^2}{2} - \dots}{y^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{prolongement par continuité} \Rightarrow \text{intégrale propre.}$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \left(\frac{1}{y} e^y - \frac{1}{y^2} (e^y - 1) \right) dy = \int_0^1 \frac{e^y}{y} dy - \int_0^1 \frac{e^y - 1}{y^2} dy = \int_0^1 \frac{e^y}{y} dy + \int_0^1 \underbrace{(e^y - 1)}_f d \underbrace{\left(\frac{1}{y} \right)}_g =$$

$$= \cancel{\int_0^1 \frac{e^y}{y} dy} + \frac{e^y - 1}{y} \Big|_0^1 - \cancel{\int_0^1 \frac{1}{y} e^y dy} = \frac{e-1}{1} - \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = e - 1 - 1 = \underline{e - 2}$$



Ex. 2 $I = \iint_D x^2 e^y dx dy$, où $D = [0, 1] \times [0, 2]$

$$\begin{aligned} \iint_D x^2 e^y dx dy &= \int_0^2 dy \left(\int_0^1 x^2 e^y dx \right) = \int_0^2 e^y dy \left(\int_0^1 x^2 dx \right) = \\ &= \int_0^2 e^y dy \left(\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^1 \right) = \int_0^2 e^y \frac{1}{3} dy = \frac{1}{3} \int_0^2 e^y dy = \\ &= \frac{1}{3} e^y \Big|_0^2 = \frac{1}{3} (e^2 - 1) \end{aligned}$$

Remarque Si $f(x, y) = f_1(x) f_2(y)$ sur $P = [a, b] \times [c, d]$. $f_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ continue continue

$$\iint_P f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f_1(x) f_2(y) dx \right) dy = \int_c^d f_2(y) \left(\int_a^b f_1(x) dx \right) dy =$$

$$= \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy.$$

$$\iint_{[a, b] \times [c, d]} f_1(x) f_2(y) dx dy = \int_a^b f_1(x) dx \cdot \int_c^d f_2(y) dy$$

Question 19

-302-

Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$.

Alors

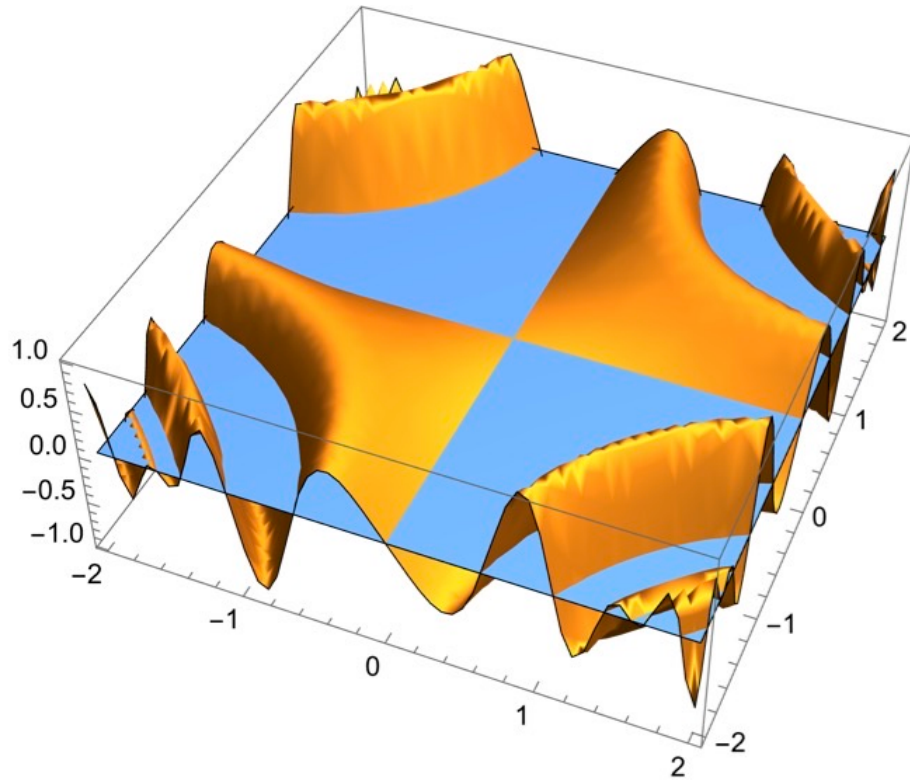
A. $\iint_E \cos(x^2 y^2) \sin(xy) dx dy = 0$

B. $\iint_E \sin(x^2 y^2) \cos(xy) dx dy = 0$

C. $\iint_E \cos(x^2 y^2) \cos(xy) dx dy = 0$

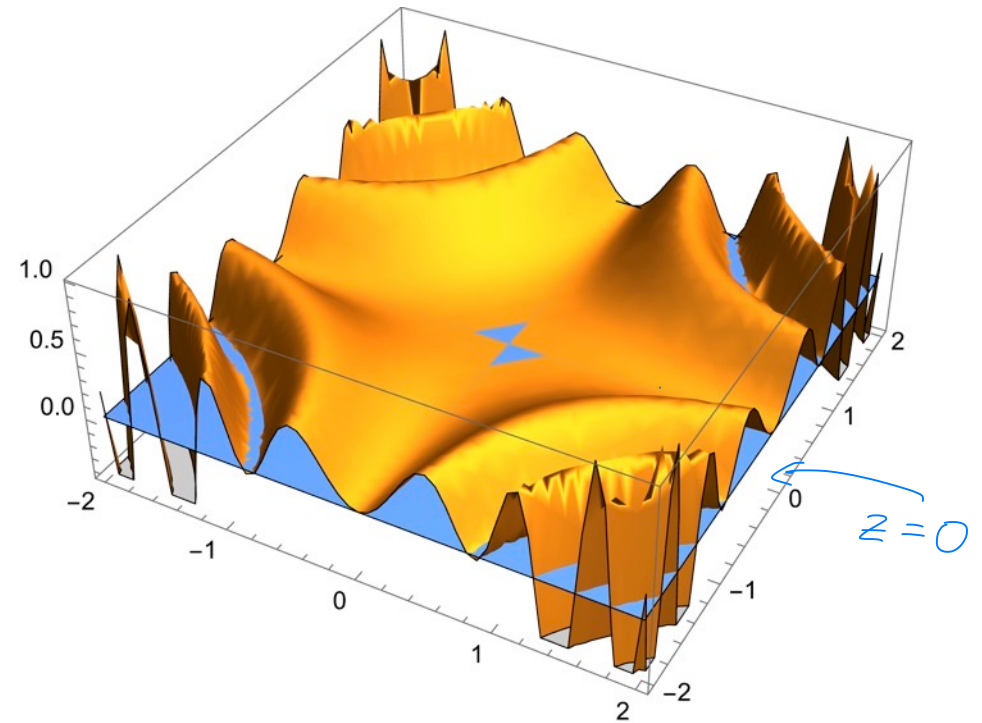
D. $\iint_E \cos x \sin y^2 dx dy = 0$

E. Aucune de ces réponses



$$f(x,y) = \sin(xy)\cos(x^2y^2)$$

$$\iint_P f(x,y) = 0$$



$$f(x,y) = \cos(xy)\sin(x^2y^2)$$

$$\iint_P f(x,y) > 0$$