

Rappel:Extrema liés. Methodes des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème (cas $n=2$) Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte.

Soient les fonctions $f, g: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Supposons que f admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$,
 extremum de $\{f(x, y) : (x, y) \in E \text{ et } g(x, y) = 0\}$

et que $\nabla g(a, b) \neq \vec{0}$. Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$$

Déf: λ est le multiplicateur de Lagrange.

Méthode pour trouver
 les points candidats
 pour extrema locaux sous
 la contrainte:
 Si $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$, résoudre
 le système:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Extrema liés: interprétation géométrique

Soit $g(x,y)=0$ la contrainte $\Rightarrow$ c'est une courbe de niveau

$\Rightarrow \nabla g(x,y) \perp$ à la courbe, $\nabla g(x,y) \neq 0$.

Si (a,b) est un extremum local de $f(x,y)$ sur la courbe $\Rightarrow$

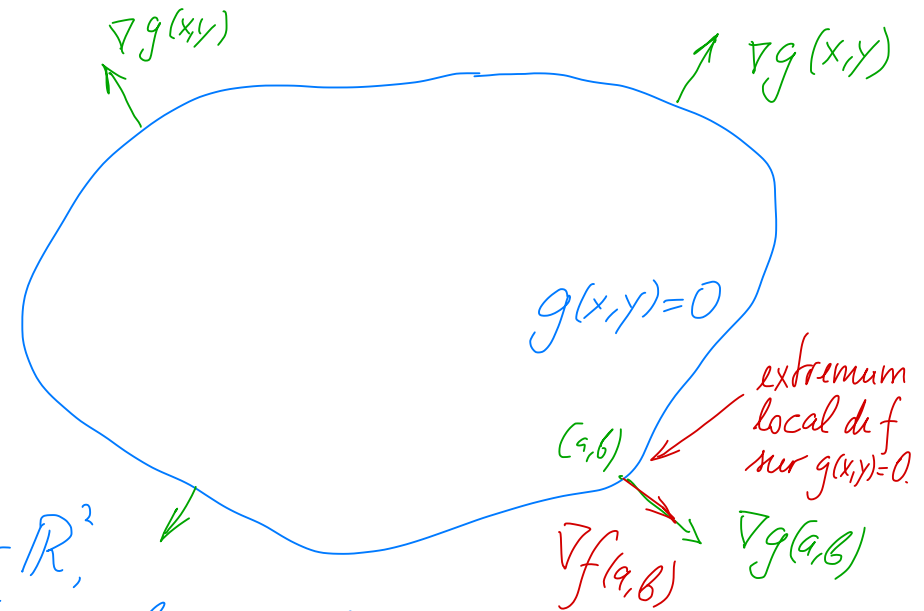
[Soit c'est un extremum loc de f sur $\mathbb{R}^2$

[Soit ce n'est pas un extremum loc de f sur $\mathbb{R}^2$,
mais un extremum seulement sur la courbe

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(a,b) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla f(a,b) \perp \text{ à la courbe} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(a,b) = 0 \cdot \nabla g(a,b) \\ \nabla f(a,b) = \lambda \cdot \nabla g(a,b) \quad \lambda \neq 0 \end{cases}$$



Extrema liés : démonstration

$$\nabla g(a,b) \neq 0$$

-269-

Dém. Supposons que $\frac{\partial g}{\partial y}(a,b) \neq 0$ (le cas $\frac{\partial g}{\partial x}(a,b) \neq 0$ est similaire).

On a $g(a,b) = 0$ puisque (a,b) satisfait $g(x,y) = 0$.

$\Rightarrow$ Par TFI il existe une fonction $y = h(x)$ de classe C^1 au voisinage de $x = a$

telle que $h'(x) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x, h(x))}{\frac{\partial g}{\partial y}(x, h(x))}$ et $g(x, h(x)) = 0$ au voisinage de $x = a$

Si (x,y) satisfait la contrainte. autour de (a,b) , alors on peut remplacer $y = h(x)$ dans l'expression $f(x,y)$ pour obtenir une fonction d'une seule variable

$$f(x,y) = f(x, h(x)) \Rightarrow \text{Extremum local de } f \Rightarrow f'(x, h(x)) = 0$$

sous contrainte $g(x,y) = 0$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix} & & \\ & & \searrow & \nearrow & \\ & & & f(x, h(x)) & \end{array}$$

$$f'(x, h(x)) = \nabla f(x, h(x)) \cdot J_{\begin{pmatrix} x \\ h(x) \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Big|_{(x, h(x))} & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \Big|_{(x, h(x))} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ h'(x) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(x, h(x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, h(x)) \cdot h'(x)$$

$\Rightarrow$ Si (a, b) est un point d'extremum local de f sous la contrainte, alors

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot h'(a) ; \text{ par TFI : } h'(a) = - \frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)}_{v_1} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}_{v_2} \cdot \underbrace{\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial g}{\partial y}(a, b)}}_{u_2}^{u_1} ; u_2 \neq 0$$

$$(1) \text{ Si } u_1 = 0 \Rightarrow v_1 = 0 \Rightarrow \nabla f(a, b) = (0, v_2), \nabla g(a, b) = (0, u_2) \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : v_2 = \lambda u_2$$

$$(2) \text{ Si } u_1 \neq 0 \Rightarrow \frac{v_1}{u_1} = \frac{v_2}{u_2} := \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow (v_1, v_2) = \lambda (u_1, u_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)}$$

Dans les deux cas on a $\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)$ pour un $\lambda \in \mathbb{R}$.



Extrema liés : cas général

Thm. Soient $f, g_1, \dots, g_m : E \xrightarrow{\hookrightarrow \mathbb{R}^n} \mathbb{R}$ les fonctions de classe C^1 , $m \leq n-1$
 Soit $\bar{a} \in E$ un extremum de f sous les contraintes $g_1(\bar{x}) = \dots = g_m(\bar{x}) = 0$.

Supposons que les vecteurs $\nabla g_1(\bar{a}), \dots, \nabla g_m(\bar{a})$ sont linéairement indépendants.

Alors il existe un vecteur $\bar{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{R}^m$ tel que

$$\boxed{\nabla f(\bar{a}) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \nabla g_k(\bar{a})} = \lambda_1 \nabla g_1(\bar{a}) + \lambda_2 \nabla g_2(\bar{a}) + \dots + \lambda_m \nabla g_m(\bar{a}).$$

En particulier, si on cherche un extremum de f sous la contrainte $g(\bar{x}) = 0$
 on obtient les équations

$$\begin{cases} \nabla f(\bar{x}) = \lambda \nabla g(\bar{x}) \\ g(\bar{x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{si } \nabla g(\bar{x}) \neq 0 \text{ pour } g(\bar{x}) = 0).$$

Ex 1 Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = 4x + 2y - z$
 sous la contrainte $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 21 = 0$ (sphère de rayon $\sqrt{21}$)

$\nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z) \neq (0, 0, 0)$ sur la sphère de rayon $\sqrt{21}$

$\Rightarrow$ Par le Thm de Lagrange si: $(x, y, z) \in$ sphère est un point d'extremum local de f sur la sphère, alors $\exists \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \end{cases} \quad \begin{cases} (4, 2, -1) = \lambda(2x, 2y, 2z) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4 = \lambda \cdot 2x \\ 2 = \lambda \cdot 2y \\ -1 = \lambda \cdot 2z \end{cases} \quad \begin{matrix} \lambda \neq 0 \\ \Rightarrow \\ \text{on divise} \\ \text{par } \lambda \end{matrix} \quad \begin{cases} x = \frac{2}{\lambda} \\ y = \frac{1}{\lambda} \\ z = -\frac{1}{2\lambda} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = -4z \\ y = -2z \end{cases} \quad \Rightarrow \text{ dans } g(x, y, z) = 0$$

$$\Rightarrow 16z^2 + 4z^2 + z^2 = 21 \Rightarrow 21z^2 = 21 \Rightarrow z = \pm 1.$$

$$z = 1 \Rightarrow y = -2, \quad x = -4 \Rightarrow \underline{(-4, -2, 1)}$$

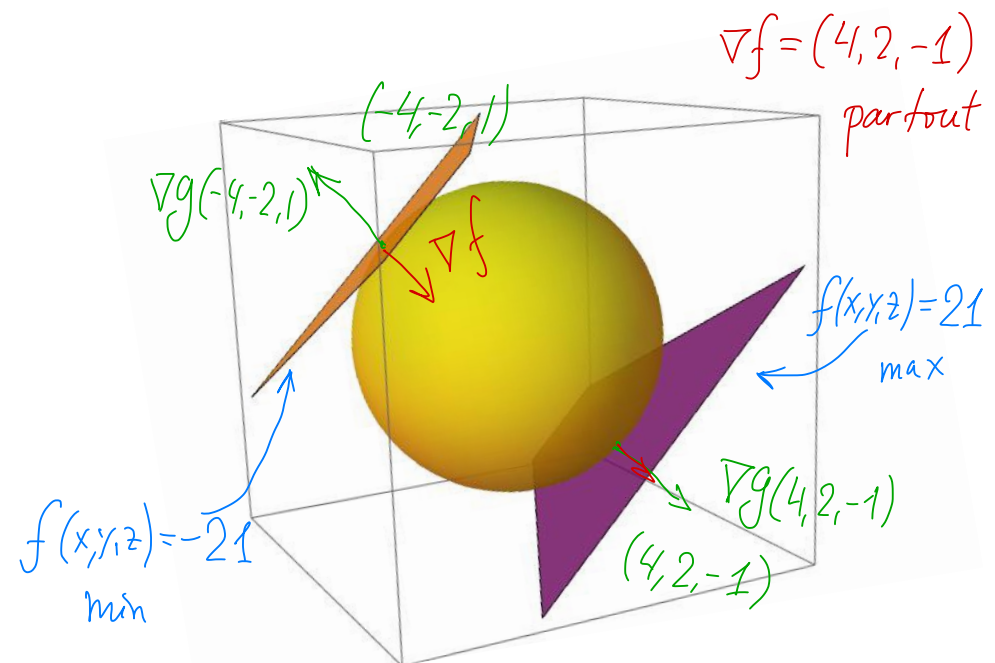
$$z = -1 \Rightarrow y = 2, \quad x = 4 \Rightarrow \underline{(4, 2, -1)}$$

$$f(-4, -2, -1) = 4x + 2y - z = -16 - 4 - 1 = -21 \leftarrow \text{le min de } f \text{ sur la sphère}^{-273-}$$

$$f(4, 2, -1) = 16 + 4 - 1 = 21 \quad - \text{ le max de } f \text{ sur la sphère}$$

Puisque f est continue sur un compact $g(x, y, z) = 0$ la sphère

$\Rightarrow f$ atteint son min max absolus sur la sphère.



Ex 2. Trouver les extrema de la fonction $f(x, y, z) = xyz$
 sous les contraintes
$$\begin{cases} g_1(x, y, z) = x + y + z - 5 = 0 \\ g_2(x, y, z) = xy + yz + xz - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\nabla g_1(x, y, z) = (1, 1, 1) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \nabla g_2(x, y, z) = (y + z, x + z, x + y) \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\nabla g_2(x, y, z) \stackrel{?}{=} k \nabla g_1(x, y, z) \Rightarrow$$

$$(y + z, x + z, x + y) = (k, k, k) \Rightarrow x = y = z$$

$$\begin{cases} g_1(x, x, x) = 3x - 5 = 0 & \Rightarrow x = \frac{5}{3} \\ g_2(x, x, x) = 3x^2 - 8 = 0 & \Rightarrow 3\left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{3} \neq 8 \end{cases}$$

$\Rightarrow \nabla g_1(x, y, z)$ et $\nabla g_2(x, y, z)$ sont linéairement indépendants
 sous les contraintes

$\Rightarrow$ Le Thm de Lagrange est applicable

$\Rightarrow$ on obtient les équations:

$$\begin{cases} \nabla f(x,y,z) = (yz, xz, xy) = \lambda_1 \overset{\nabla g_1(x,y,z)}{(1,1,1)} + \lambda_2 \overset{\nabla g_2(x,y,z)}{(y+z, x+z, x+y)} \\ g_1(x,y,z) = x+y+z-5=0 \\ g_2(x,y,z) = xy+yz+xz-8=0 \end{cases} \quad \text{pour } \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$$

$f(x,y,z) = xyz$ -275-

$$\begin{cases} (1) yz = \lambda_1 + \lambda_2 (y+z) \\ (2) xz = \lambda_1 + \lambda_2 (x+z) \\ (3) xy = \lambda_1 + \lambda_2 (x+y) \\ (4) x+y+z = 5 \\ (5) xy+yz+xz = 8 \end{cases} \quad \begin{aligned} (1)+(2) &\Rightarrow z(x+y) = 2\lambda_1 + \lambda_2 \underbrace{(x+y+2z)}_{5-z} \\ (4) &\Rightarrow \underbrace{5-z} \\ (1)+(2) &\begin{cases} z(5-z) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+z) \\ x(5-x) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+x) \\ y(5-y) = 2\lambda_1 + \lambda_2(5+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 + (\lambda_2 - 5)z + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ x^2 + (\lambda_2 - 5)x + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \\ y^2 + (\lambda_2 + 5)y + 5\lambda_2 + 2\lambda_1 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Soit $x=y=z$ $\ddot{\smile}$ ce qui ne satisfait pas les contraintes,

$\Rightarrow$ Soit une variable différente des 2 autres, par exemple $x=y$, $z \neq x$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (4) \quad &\begin{cases} 2x+z=5 \\ x^2+2xz=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=5-2x \\ x^2+2x(5-2x)-8=0 \Rightarrow -3x^2+10x-8=0 \end{cases} \\ \Rightarrow (5) \quad & \end{aligned}$$

$$3x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow$$

-276-

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 96}}{6} = \frac{10 \pm 2}{6} \Rightarrow$$

$$z = 5 - 2x$$

$$x_1 = 2 = y_1 \Rightarrow z_1 = 1$$

$$x_2 = \frac{4}{3} = y_2 \Rightarrow z_2 = \frac{7}{3}$$

$$(x, y, z) = (2, 2, 1) \quad (1, 2, 2), \quad (2, 1, 2)$$

$$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right), \quad \left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right), \quad \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

6 points candidats
pour un min (max)
de f sous les contraintes.

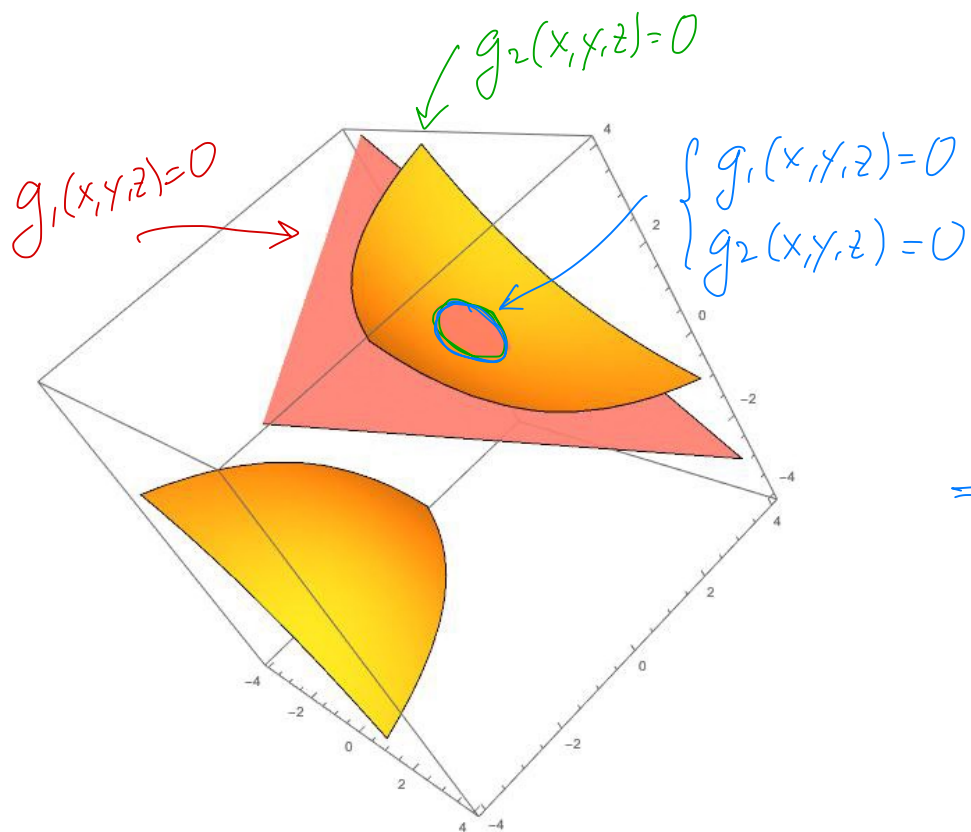
$$f(x, y, z) = xyz \Rightarrow$$

$$\underline{f(2, 2, 1) = f(1, 2, 2) = f(2, 1, 2) = 4} \quad - \text{min de } f \text{ sous les contraintes}$$

$$\underline{f\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right) = \frac{112}{27} = 4 + \frac{4}{27}} \quad - \text{max de } f \text{ sous les contraintes}$$

puisque $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$ est un compact dans $\mathbb{R}^3$
 f est continue,

$\Rightarrow f$ atteint son min, max sur le compact; f est de classe C^∞
 $\Rightarrow f$ atteint son max, min aux points donnés par notre calcul.



Exercice ^{*}: $\begin{cases} g_1(x,y,z)=0 \\ g_2(x,y,z)=0 \end{cases}$
 définissent un compact dans $\mathbb{R}^3$
 clairement fermé

Astuce: $z = 5 - x - y \leadsto g_2(x,y,z)=0$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{1}{2}(x+y)^2}_{\leq 17} + \underbrace{\frac{1}{2}(x-5)^2 + \frac{1}{2}(y-5)^2}_{\leq 17} = 17$$

$\Rightarrow x, y$ sont bornés
 $\Rightarrow z = 5 - x - y$ est borné.
 $\Rightarrow$ un compact.

Résumé: Méthodes de démonstration

1. Démonstration directe. $P \Rightarrow Q$ $P \xRightarrow{\text{logique}} \dots \Rightarrow Q$
2. Par contraposée $P \Rightarrow Q$ $\neg Q \Rightarrow \dots \Rightarrow \neg P$
3. Disjonction des cas. $P \Rightarrow Q$ $P = \begin{cases} \text{cas 1} & \Rightarrow Q \\ \vdots & \Rightarrow Q \\ \text{cas n} & \Rightarrow Q \end{cases}$
4. „Si et seulement si“ $P \Leftrightarrow Q$ $P \Rightarrow \dots \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow \dots \Rightarrow P$ (ou $P \Leftrightarrow Q$)
5. Par absurde. P $\neg P \Rightarrow \dots \Rightarrow R$ connue d'être fausse
6. Par le principe des tiroirs. P n objets, k tiroirs
 $\Rightarrow$ au moins 1 tiroir contient $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ objets

$\nearrow$ plafond
 $\searrow$ plancher

7. Par récurrence $P(n)$

Base

Hérédité

simple
généralisée
forte

(a) $P(n_0)$

(b) $P(n_0) \dots P(n_0+k)$

(c) $P(n_0)$

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$\{P(n) \dots P(n+k)\} \Rightarrow P(n+k+1)$

$\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)\} \Rightarrow P(n+1)$

 $P(n, m)$

(d) $P(0, 0)$

$P(m, 0) \Rightarrow P(m+1, 0) \quad \forall m$

$P(m, n) \Rightarrow P(m, n+1) \quad \forall m, n$
carré

(e) $P(0, 0)$

$P(m, 0) \Rightarrow P(m+1, 0) \quad \forall m$

$P(m+1, n) \Rightarrow P(m, n+1) \quad \forall m, n$

(f) $P(0, 0)$

$P(m, n) \Rightarrow P(m, n+1)$
diagonale

$\Downarrow$
 $P(m+1, n)$ deux directions

Exemples: choisir la méthode de démonstration

-280-

Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 5. *disjonction des cas.*

Question 2. Il y a 12 boules vertes, 15 boules rouges et 16 boules blanches dans un sac. Quel nombre minimal de boules faut-il sortir du sac pour avoir au moins 4 boules de même couleur? *méthode de tiroirs*

Proposition 3. Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ n'est pas premier. *par absurde*

Proposition 4. Il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que $42x - 70y = 124$ *par absurde*

Proposition 5 Pour tout $n \geq 2$ naturel, on a $P(n): \prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2}) = \frac{n+1}{2n}$ *réurrence simple*

Proposition 6. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , telle que $\det \text{Hess}_f(\bar{0}) < 0$

Alors $\bar{0}$ n'est pas un point de minimum local de f .

démonstration directe

Proposition 7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $y^3 + yx^2 - x^3 \leq xy^2$, alors $y \leq x$.
par contraposée.

Proposition 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2n^2+n+1$ n'est pas divisible par 5.

-282-

Par disjonction des cas:

$$(1) n = 5k \Rightarrow 2n^2+n+1 = 5(\quad) + 1$$

$$(2) n = 5k+1 \Rightarrow 2n^2+n+1 = 5(\quad) + 2 + 1 + 1$$

$$(3) n = 5k+2 \Rightarrow 2n^2+n+1 = 5(\quad) + 8 + 2 + 1$$

$$(4) n = 5k-1 \Rightarrow 2n^2+n+1 = 5(\quad) + 2 - 1 + 1$$

$$(5) n = 5k-2 \Rightarrow 2n^2+n+1 = 5(\quad) + 8 - 2 + 1$$

Dans tous les cas

$$2n^2+n+1$$

n'est pas divisible
par 5.



Proposition 2. Il y a 12 boules vertes, 15 boules rouges et 16 boules blanches dans un sac. Quel nombre minimal de boules faut-il sortir du sac pour avoir au moins 4 boules de même couleur?

Par la méthode des tiroirs:

3 tiroirs :  vertes  rouges  blanches

Objets; N tel que

$$\left\lfloor \frac{N}{3} \right\rfloor \geq 4 \Leftrightarrow \frac{N}{3} > 3$$

$$\Rightarrow N \geq 10.$$



Proposition 3. Il existe une infinité de nombres premiers p tels que $p+2$ n'est pas premier.

Par absurde: Supposons qu'il existe seulement un nombre fini de p premiers tels que $p+2$ n'est pas premier $\Rightarrow \exists$ le plus grand p t.q. $p+2$ n'est pas premier. Il existe une infinité de nombres premiers $\Rightarrow \exists q$ premier, plus grand que p . $\Rightarrow q$ est premier, $q+2, q+4, \dots$ sont tous premiers $\Rightarrow$ tous les nombres impairs plus grand que q sont premiers. Le nombre $q(q+2)$ est impair, $q(q+2) > q$ et n'est pas premier.

$\Rightarrow$ absurde.

$\Rightarrow$ il existe une infinité des premiers p tels que $p+2$ n'est pas premier. ◻

Proposition 4. Il n'existe pas de nombres entiers x, y tels que

$$42x - 70y = 124$$

Par absurde: Si $21x - 35y = 62, x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow 7(3x - 5y) = 62 \Rightarrow$
 $\Rightarrow \underline{3x - 5y} = \frac{62}{7} \notin \mathbb{Z}, \text{ absurde}$ 

Proposition 5 Pour tout $n \geq 2$ naturel, on a

$$P(n): \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$$

Par recurrence: Base: $n=2 \quad 1 - \frac{1}{4} = \frac{2+1}{4}$ vrai.

Hérédité: Supposons que $P(n)$ est vrai.

$$P(n+1): \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \cdot \frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2} =$$

$$= \frac{\cancel{(n+1)} \cdot \cancel{n} (n+2)}{2\cancel{n} (n+1)^2} = \frac{n+2}{2(n+1)} \Rightarrow P(n) \text{ implique } P(n+1), n \geq 2$$

$\Rightarrow$ par recurrence $P(n)$ est vraie $\forall n \geq 2$. 

Proposition 6. Si $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 , telle que $\det \text{Hess}_f(\bar{O}) < 0$

Alors $\bar{O}$ n'est pas un point de minimum local de f .

Directement: Si $\nabla f(\bar{O}) \neq \bar{O}$, alors $\bar{O}$ n'est pas un point d'extremum local de f . Si $\nabla f(\bar{O}) = \bar{O}$, puisque f est de classe C^2 par Thm de Schwartz la matrice hessienne est diagonalisable avec des valeurs propres réelles. On a: $\det \text{Hess}_f(\bar{O}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < 0$, donc soit $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow \bar{O}$ est un point de maximum local de f , soit une valeur propre est négative, deux autres positives $\Rightarrow \bar{O}$ est un point selle.

Alors $(0,0,0)$ n'est pas un point de minimum local de f . 

Proposition 7. Soient $x, y \in \mathbb{R}$. Si $y^3 + yx^2 - x^3 \leq xy^2$, alors $y \leq x$.

Par contraposée: Supposons que $y > x \Rightarrow$

$$y^3 + yx^2 - x^3 - xy^2 = y(y^2 + x^2) - x(x^2 + y^2) = \underbrace{(y-x)}_{>0} \underbrace{(x^2 + y^2)}_{>0} > 0 \text{ - contradiction}$$

puisque $y \neq x$

Alors $y \leq x$. 

Question 18 Soit une famille des propositions $\{P(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$

telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+4)$ est vraie.
Alors:

A. $P(6)$ et $P(8)$ ne peuvent pas être les deux vraies

B. si $P(19)$ est vraie, alors $P(7)$ est vraie

C. $P(2)$ et $P(10)$ sont soit les deux vraies, soit les deux fausses

D. si $P(21)$ est fausse, alors $P(9)$ est fausse.

Si $P(9)$ vraie $\Rightarrow P(9+4k)$ sont vraies $\Rightarrow P(21)$ est vraie
 $\forall k \in \mathbb{Z}$