

Rappel: TFI

-253-

TFI en 2 variables:

Soit $F(x, y) : E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de (a, b) une fonction

$y = f(x)$ telle que

- (1) $f(a) = b$
- (2) $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x dans un voisinage de $x = a$
- (3) $f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)|_{(x, f(x))}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)|_{(x, f(x))}}$

TFI en 3 variables:

Soit $F(x, y, z) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , t. g. $F(a, b, c) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Alors il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que

- (1) $f(a, b) = c$
- (2) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout couple (x, y) dans un voisinage de (a, b)
- (3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$.

Ex 4. $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1$

Vérifier que $F(0, 0, 1) = 0$ et que $F(x, y, z) = 0$ définit autour de $(0, 0, 1)$ une fonction $z = f(x, y)$, telle que $F(x, y, f(x, y)) = 0$. Trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$

(1) $F(0, 0, 1) = 0 \cos 0 + 0 \cos 1 + 1 \cos 0 - 1 = 1 - 1 = 0$ Vrai

(2) $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = -y \sin z + \cos x \Big|_{(0, 0, 1)} = -0 \sin 1 + \cos 0 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{TFI est applicable}$
 $\Rightarrow \exists z = f(x, y)$, la solution de

$F(x, y, z) = 0$ autour de $(0, 0, 1)$.

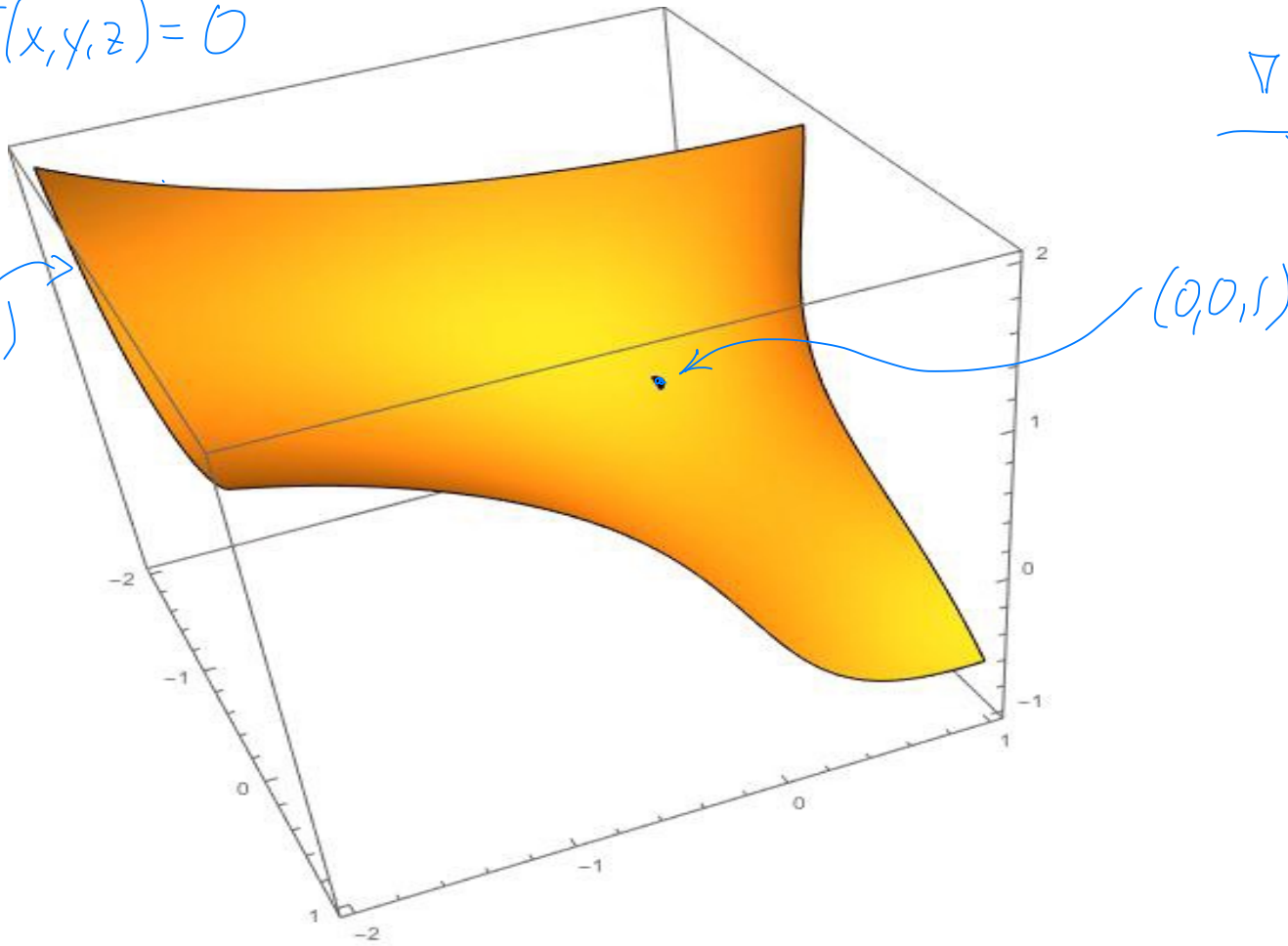
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \Big|_{(0, 0, 1)}}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \Big|_{(0, 0, 1)}} = - \frac{\cos y - z \sin x}{-y \sin z + \cos x} \Big|_{(0, 0, 1)} = - \frac{1}{1} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \Big|_{(0, 0, 1)}}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \Big|_{(0, 0, 1)}} = - \frac{-x \sin y + \cos z}{-y \sin z + \cos x} \Big|_{(0, 0, 1)} = - \frac{\cos 1}{1} = -\cos 1$$

$$F(x, y, z) = 0$$

$$\underline{\nabla f(0,0) = (-1, -\cos 1)}$$

$$z = f(x, y)$$



$$F(0,0,1) = 0 \Rightarrow f(0,0) = 1$$

On peut trouver l'équation du plan tangent: $z = f(a,b) + \langle \nabla f(a,b), (x-a, y-b) \rangle$
 $z = 1 + \langle (-1, -\cos 1), (x-0, y-0) \rangle = 1 + (-x) + (-\cos 1) \cdot y = 1 - x - (\cos 1) \cdot y$

$\Rightarrow z = 1 - x - (\cos 1) \cdot y$ est l'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point $(0,0,1)$.

Application de TFI: Équation d'un (hyper)plan tangent à la surface définie par une équation.

Soit $F(x_1, \dots, x_n)$ de classe C^1 sur $E \subset \mathbb{R}^n$ et $\exists i: 1 \leq i \leq n$ tel que $\frac{\partial F}{\partial x_i}(\bar{a}) \neq 0$ pour un $\bar{a} \in E$ où $F(\bar{a}) = 0$ ($\Leftrightarrow \nabla F(\bar{a}) \neq 0$)

Alors TFI implique que l'équation $F(x_1, \dots, x_n) = 0$ définit une (hyper)surface

$x_i = f(x_1, \dots, \overset{\text{sans } x_i}{\vee} x_n)$ localement autour de $(a_1, \dots, \overset{\text{sans } a_i}{\vee} a_n)$ et f est de classe C^1 .

$\Rightarrow$ Si $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$ on peut écrire l'équation de l'(hyper)plan tangent

à la surface de niveau $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{x} = \bar{a}$

Equation du plan tangent (continuation)

Si $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$, alors $DF(\bar{a}, \bar{v}) = 0 \Leftrightarrow \bar{v}$ est tangent à la (hyper)surface de niveau.

$$DF(\bar{a}, \bar{v}) = \left\langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \right\rangle = 0 \Leftrightarrow \text{pour tout vecteur } \bar{v} \text{ dans l'hyperplan} \\ \text{tangent à } F(\bar{x}) = 0 \text{ au point } \bar{x} = \bar{a}$$

$$\Leftrightarrow \bar{v} = (\bar{x} - \bar{a}) \perp \nabla F(\bar{a})$$

$\Rightarrow$ L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\bar{x}) = 0$ au point $\bar{a}$: $F(\bar{a}) = 0$

est

$$\left\langle \nabla F(\bar{a}), (\bar{x} - \bar{a}) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \nabla F(a, b, c), (x - a, y - b, z - c) \right\rangle = 0 \quad \text{si } F(a, b, c) = 0 \text{ et } \nabla F(a, b, c) \neq 0$$

Ex 4. $F(x, y, z) = x \cos y + y \cos z + z \cos x - 1 = 0$

$\bar{a} = (0, 0, 1)$

$$\nabla F(0, 0, 1) = (1, \cos 1, 1) \neq \bar{0}$$

$$\Rightarrow \langle (1, \cos 1, 1), (x-0, y-0, z-1) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow x + y \cos 1 + z - 1 = 0$$

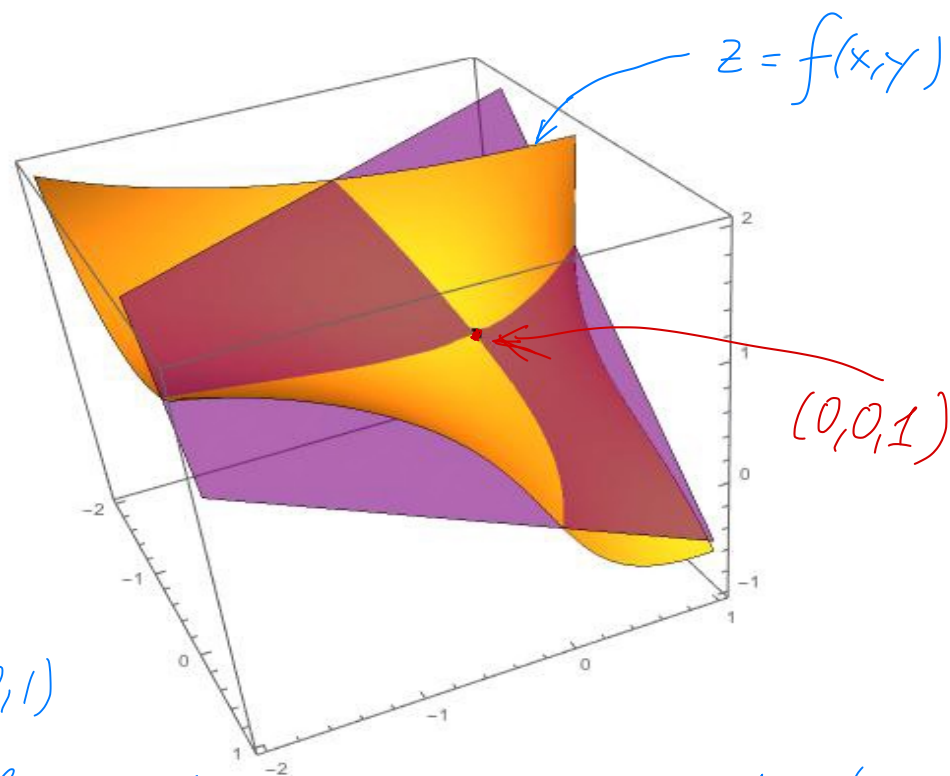
$$\Rightarrow \underline{z = 1 - x - (\cos 1) \cdot y}$$

↑ comme avant ☺
équation du plan tangent
à $(0, 0, 1)$

Exercice: trouver $y = g(x, z)$ t.q.

$$F(x, g(x, z), z) = 0 \text{ au voisinage de } (0, 0, 1)$$

et écrire l'équation du plan tangent à la surface $y = g(x, z)$ au point $(0, 1)$



Ex 5. $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$

ellipsoïde

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6$. Trouver une équation du plan tangent à la surface au point (a, b, c) .

$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 4y, 6z) \Big|_{(a, b, c)} = (2a, 4b, 6c) \neq \vec{0} \quad \forall (a, b, c) \in \text{l'ellipsoïde}$$

$\langle \nabla F(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$ donne l'équation du plan tangent en (a, b, c)

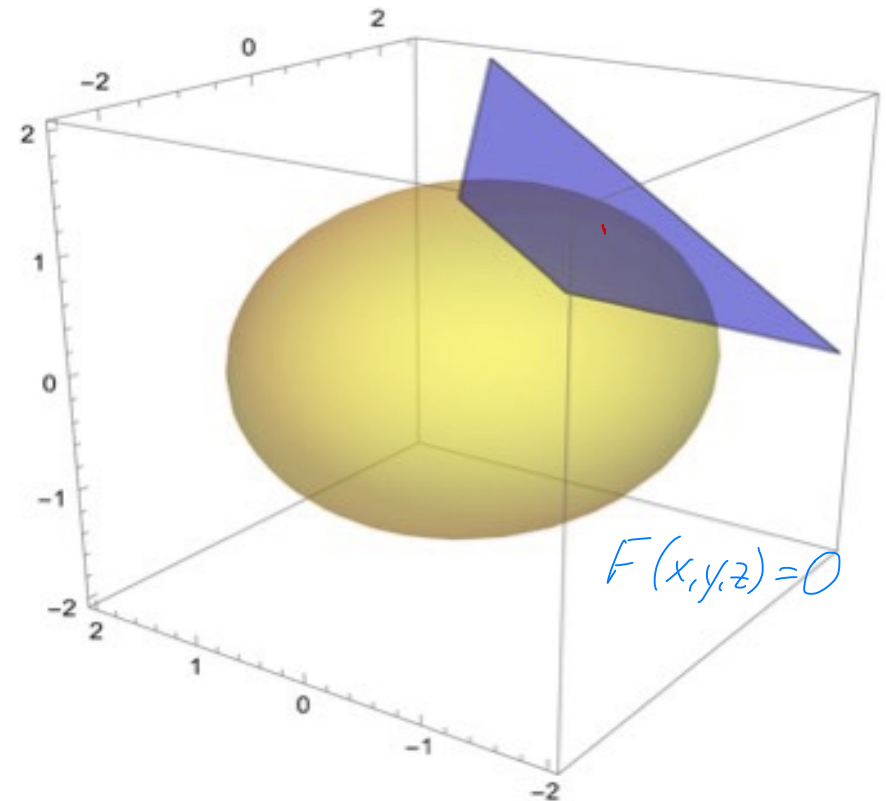
$$\Rightarrow \langle (2a, 4b, 6c), (x-a, y-b, z-c) \rangle =$$

$$= 2ax - 2a^2 + 4by - 4b^2 + 6cz - 6c^2 = 0$$

$$\Rightarrow ax + 2by + 3cz - \underbrace{a^2 + 2b^2 + 3c^2}_{=6} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{ax + 2by + 3cz - 6 = 0}$$

équation du plan tangent à l'ellipsoïde
au point (a, b, c) .



Lien avec le plan tangent au graphique d'une fonction. $z = f(x, y)$.

-260-

$$\text{Si } F(x, y, z) = z - \underbrace{f(x, y)}_{\text{classe } C^1} = 0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial z} = 1 \neq 0 \Rightarrow \nabla F(x, y, z) \neq \vec{0} \quad \forall (x, y, z) \text{ où } z = f(x, y)$$

$$\Rightarrow \text{Si } c = f(a, b) \Leftrightarrow (a, b, c) \in \text{surface de niveau } F(x, y, z) = 0$$

$\Rightarrow$ Par le TFI l'équation du plan tangent au point (a, b, c) est

$$\langle \nabla F(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b, c)}_{-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b)} \cdot (x-a) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b, c)}_{-\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} \cdot (y-b) + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c)}_1 \cdot \underbrace{(z-c)}_{\substack{\downarrow \\ c=f(a, b)}} = 0 \quad F(x, y, z) = z - f(x, y)$$

$$\Rightarrow \text{on retrouve l'équation } -\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \cdot (x-a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \cdot (y-b) + z - f(a, b) = 0$$

$$z = f(a, b) + \langle \nabla f(a, b), (x-a, y-b) \rangle$$



Exemple: droite tangente à la fonction définie implicitement.

- 261 -

Ex 6. $F(x, y) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} - 4 = 0.$

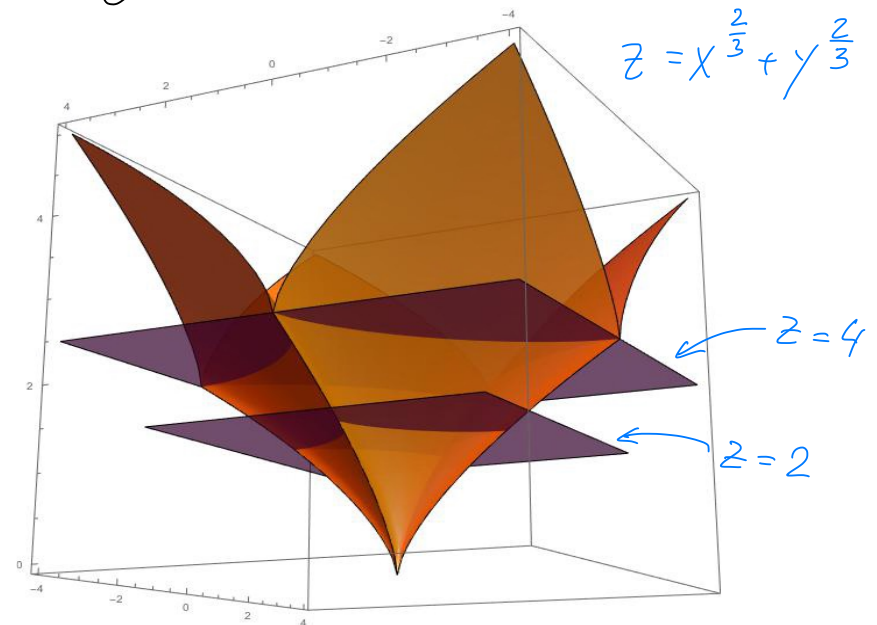
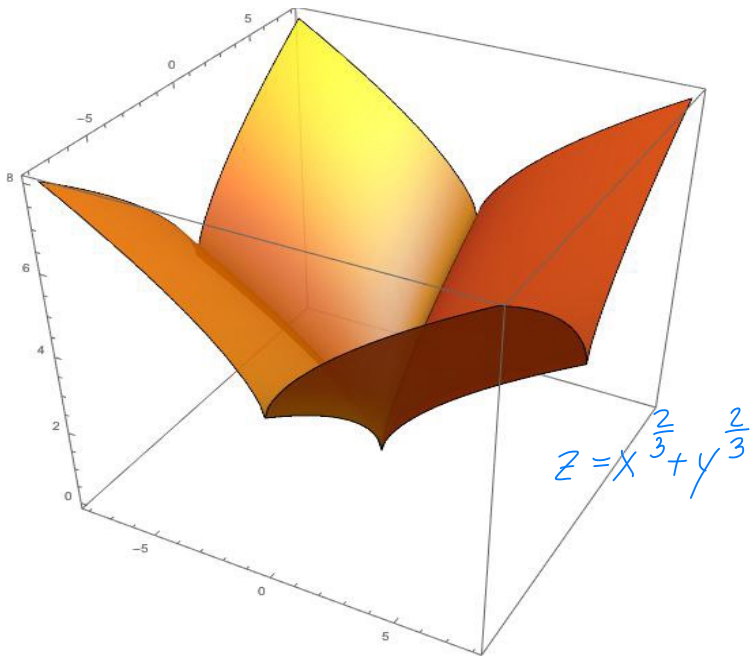
Trouver l'équation de la tangente au point $(a, b) = (2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})$
 $(2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} + (2^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} - 4 = 2 + 2 - 4 = 0 \Rightarrow F(a, b) = 0.$

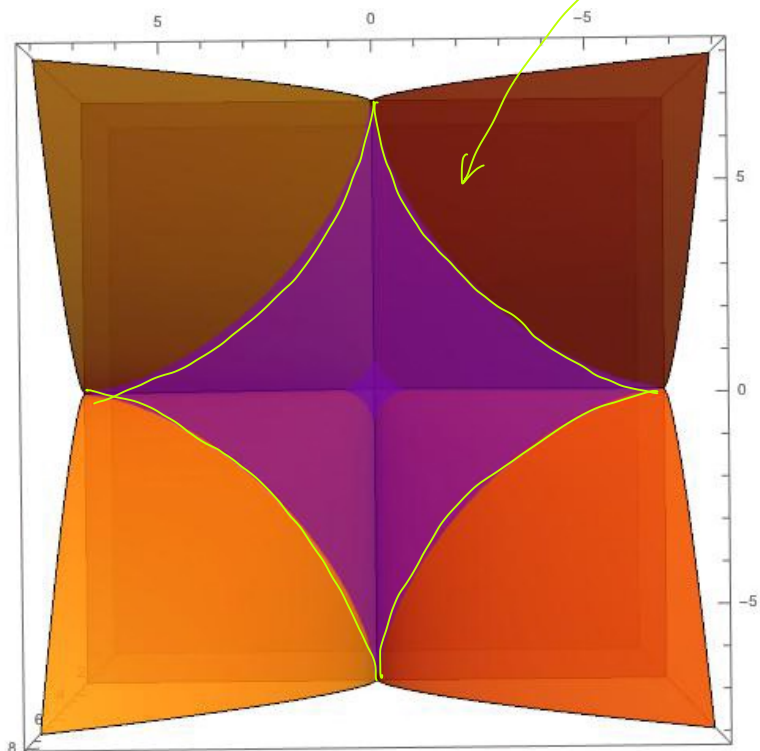
$$\nabla F(x, y) = \left(\frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \right) \Big|_{(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})} = \left(\frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}}, \frac{2}{3} (2^{\frac{3}{2}})^{-\frac{1}{3}} \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right) \neq \vec{0}$$

$\Rightarrow$ L'équation de la tangente est $\langle \nabla F(a, b), (x - a, y - b) \rangle = 0$

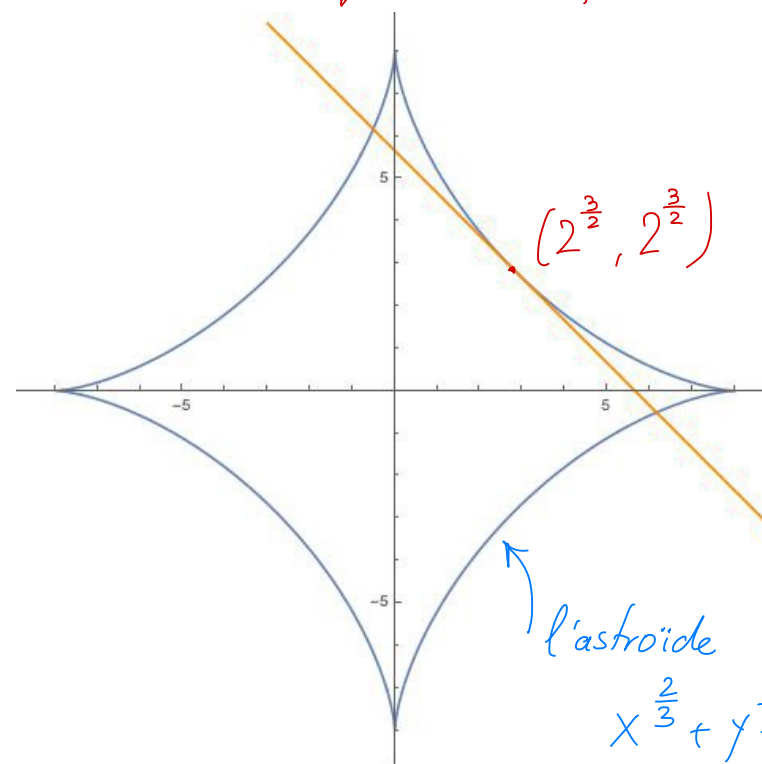
$$\Rightarrow \left\langle \left(\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3} \right), \left(x - 2^{\frac{3}{2}}, y - 2^{\frac{3}{2}} \right) \right\rangle = \frac{\sqrt{2}}{3} (x - 2^{\frac{3}{2}}) + \frac{\sqrt{2}}{3} (y - 2^{\frac{3}{2}}) = 0 \Rightarrow x + y - 2 \cdot 2^{\frac{3}{2}} = 0$$
$$\Rightarrow x + y - 2^{\frac{5}{2}} = 0$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{32} - x$$





la courbe
de niveau
 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$



-262-
droite tangente :
 $y = \sqrt{32} - x$

$(2^{\frac{3}{2}}, 2^{\frac{3}{2}})$

l'astroïde

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{2}{3}}$$

Question 17 Soit $f(x,y) = \ln(x+y^2) - y^2 - x^2$.

Alors sur son domaine de définition la fonction f possède exactement

A: 4 points stationnaires

B: 1 point de max loc et 1 point de min loc

C: 2 points de max loc

D: 3 points selles.

$$f(x,y) = \ln(x+y^2) - y^2 - x^2. \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y^2 > 0\}$$

(1) Trouver les points stationnaires.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} - 2x = \frac{1-2x^2-2xy^2}{x+y^2} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2} - 2y = \frac{2y-2yx-2y^3}{x+y^2} = \frac{2y(1-x-y^2)}{x+y^2} = 0 \end{cases}$$

$x+y^2 > 0$

$y=0 \Rightarrow 1-2x^2=0 \Rightarrow x^2=\frac{1}{2}, x=\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$

$\rightarrow x=1-y^2 \Rightarrow 1-2(1-y^2)^2-2(1-y^2)y^2=0$

$\Rightarrow 1-2(1-2y^2+y^4)-2y^2+2y^4 = 1-2+4y^2-2y^4-2y^2+2y^4 = -1+2y^2=0 \Rightarrow y=\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x=1-y^2=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) \quad x+y^2 > 0.$

$\Rightarrow$ 3 points stationnaires

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{(x+y^2)^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x+y^2)-4y^2}{(x+y^2)^2} - 2 = \frac{2(x-y^2)}{(x+y^2)^2} - 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\frac{2y}{(x+y^2)^2}$$

$$x+y^2 \Big|_{(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$(x-y^2) \Big|_{(\frac{1}{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Hess } f_{(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{2}-2 \end{pmatrix} \quad \det < 0 \Rightarrow \text{point selle} \\ \text{pas d'extremum local}$$

$$\text{Hess } f_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \begin{pmatrix} -3 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \det = 6-2=4 > 0 \\ -3 < 0 \Rightarrow \text{max loc}$$

$$\text{Hess } f_{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}})} = \begin{pmatrix} -3 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2 \end{pmatrix} \quad \det = 6-2=4 > 0 \\ -3 < 0 \Rightarrow \text{max loc}$$

$\Rightarrow$ C

Extrema liés. Methodes des multiplicateurs de Lagrange.

Théorème (cas $n=2$) Condition nécessaire pour un extremum sous contrainte.

Soient les fonctions $f, g: E \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 .

Supposons que $f(x, y)$ admet un extremum en $(a, b) \in E$ sous la contrainte $g(x, y) = 0$.

$$\min, \max \{ f(x, y) : (x, y) \in E \text{ et } g(x, y) = 0 \}$$

et que $\nabla g(x, y) \neq \vec{0}$ pour $g(x, y) = 0$ Alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\boxed{\nabla f(a, b) = \lambda \nabla g(a, b)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) = 0 \end{cases}$$

Déf: λ est le multiplicateur de Lagrange.

Extrema liés: interprétation géométrique

Soit $g(x,y)=0$ la contrainte $\Rightarrow$ c'est une courbe de niveau

$\Rightarrow \nabla g(x,y) \perp$ à la courbe, $\nabla g(x,y) \neq 0$.

Si (a,b) est un extremum local de $f(x,y)$ sur la courbe $\Rightarrow$ soit $\nabla f(a,b) = \vec{0}$, soit

$$D_f(a,b)(\vec{v} \text{ tangent à } g(x,y)=0) = \langle \nabla f(a,b), \vec{v}_{\text{tang}} \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(a,b) \perp \vec{v}_{\text{tang}} \text{ à la courbe } g(x,y)=0$$

$$\Leftrightarrow \nabla f(a,b) \text{ est collinéaire avec } \nabla g(a,b).$$

Alors on a :

$$\left[\begin{array}{l} \nabla f(a,b) = \vec{0} \Leftrightarrow \nabla f(a,b) = 0 \cdot \nabla g(a,b), \lambda = 0 \\ \nabla f(a,b) \text{ est collinéaire avec } \nabla g(a,b) \Leftrightarrow \nabla f(a,b) = \lambda \cdot \nabla g(a,b), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0. \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b), \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0.$$

$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : \nabla f(a,b) = \lambda \nabla g(a,b) \quad - \text{Thm de Lagrange.}$$

