

Rappel: Thm: Condition suffisante pour un extremum local d'une fonction.

Soit $f: E \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 , $\bar{a} \in E : \nabla f(\bar{a}) = \bar{0}$

Alors (a) Si toutes les valeurs propres de $\text{Hess}_f(\bar{a})$ sont positives $\Rightarrow$ min loc en $\bar{x} = \bar{a}$
 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0$

(b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0$ sont negatives $\Rightarrow$ max loc en $\bar{x} = \bar{a}$.

(c) $\exists \lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum en $\bar{x} = \bar{a}$. (point selle)

Proposition. Cas $n=2$. Les conditions du Thm sur la matrice $\text{Hess}_f(\bar{a})$ sont équivalentes aux conditions suivantes. Posons $\begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hess}_f(\bar{a})$

Alors: (a) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r > 0$. min loc

(b) $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) > 0$ et $r < 0$. max loc

(c) $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$ ou $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0 \Leftrightarrow \det \text{Hess}_f(\bar{a}) < 0$. point selle

Cas $n = 3$. Conditions équivalentes aux conditions suffisantes. f de classe C^2 au voisinage de $\bar{a}$.

$$\text{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{array} \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \hline \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{array} \right)$$

Soit $\Delta_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$

$$\nabla f(\bar{a}) = \vec{0}$$

$$\Delta_2 = \det \text{Mat}_{2 \times 2} \text{ indiquée}$$

$$\Delta_3 = \det \text{Hess}_f(\bar{a}).$$

$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \Leftrightarrow \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \Rightarrow \bar{a}$ est un point de min local

$\Delta_1 < 0, \underline{\Delta_2 > 0}, \Delta_3 < 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \Rightarrow \bar{a}$ est un point de max local

Autrement, si $\Delta_3 \neq 0 \Rightarrow \exists \lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \Rightarrow$ pas d'extremum local en $\bar{a}$

Si $\Delta_3 = 0 \Rightarrow \Rightarrow$ pas de conclusion
(sans démonstration) Critère de Sylvester

Min et max d'une fonction continue sur un compact.

- 240 -

Rappel: Théorème : Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $D \subset \mathbb{R}^n$ atteint son min et max.

$$\left(\begin{array}{l} \exists \bar{c}_1 \in D : f(\bar{c}_1) = \min_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \\ \exists \bar{c}_2 \in D : f(\bar{c}_2) = \max_{\bar{x} \in D} f(\bar{x}) \end{array} \right)$$

Pour trouver $\bar{c}_1$ et $\bar{c}_2$ il faut :

- (1) Trouver les points critiques $\{\bar{c}_i\}$ de f sur $\overset{\circ}{D}$. Calculer les valeurs $f(\bar{c}_i)$.
- (2) Trouver les points $\{\bar{d}_j\}$ de min, max de f (∂D). Calculer les valeurs $f(\bar{d}_j)$.
- (3) Choisir le min et le max de $\{f(\bar{c}_i), f(\bar{d}_j)\}$.

global

Ex. $f(x,y) = -6x^2 + 2x^2y - 3y^2 + 2y + 1$ Trouver le min et le max absolus de f sur le carré $E = \{-2 \leq x, y \leq 2\}$

(1) sur $\overset{\circ}{E} = \{-2 < x, y < 2\} \Rightarrow$ Trouver les points stationnaires

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -12x + 4xy = -4x(3-y) = 0 \Rightarrow \begin{array}{l} x=0 \in \overset{\circ}{E} \Rightarrow -6y+2=0 \Rightarrow y=\frac{1}{3} \quad (0, \frac{1}{3}) \in E \\ y=3 \notin \overset{\circ}{E} \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 - 6y + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -12 + 4y ; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4x \Rightarrow \text{Hess}_f(0, \frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} -12 + \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \quad (0, \frac{1}{3})$$

$$\det = (-12 + \frac{4}{3})(-6) > 0 ; \quad -12 + \frac{4}{3} < 0 \Rightarrow \text{max loc sur } \overset{\circ}{E} \text{ en } (0, \frac{1}{3}).$$

(2) min et max de f sur la frontière de E

$$f(x,y) \Big|_{(x=\pm 2)} = -24 + 8y - 3y^2 + 2y + 1 = -3y^2 + 10y - 23 = g(y)$$

$$g'(y) = -6y + 10 \Rightarrow y = \frac{5}{3} \Rightarrow \left(\pm 2, \frac{5}{3}\right) \text{ max loc}$$
$$g''(y) = -6 < 0$$

$$f(x,y) \Big|_{y=2} = -6x^2 + 4x^2 - 12 + 4 + 1 = -2x^2 - 7 = h_1(x) \Rightarrow (0, 2) \Rightarrow \text{max loc}$$
$$h_1'(x) = -4x \quad h_1''(x) = -4 < 0$$

$$f(x,y) \Big|_{y=-2} = -6x^2 - 4x^2 - 12 - 4 + 1 = -10x^2 - 15 = h_2(x) \Rightarrow (0, -2) \Rightarrow \text{max loc.}$$
$$h_2'(x) = -20x, \quad h_2''(x) = -20 < 0$$

Les coins:

$$f(\pm 2, 2) = -24 + 16 - 12 + 4 + 1 = -15$$
$$f(\pm 2, -2) = -24 - 16 - 12 - 4 + 1 = -55$$

global = absolu

(3) Comparer les valeurs de f aux points trouvés

$$f\left(0, \frac{1}{3}\right) = -3 \cdot \frac{1}{9} + \frac{2}{3} + 1 = \boxed{\frac{4}{3}} \text{ max global sur } E$$

$$f\left(\pm 2, \frac{5}{3}\right) = g\left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{25}{3} + \frac{50}{3} - 23 \begin{matrix} < 0 \\ > -55 \end{matrix}$$

$$f(0, 2) = h_1(0) = -7$$

$$f(0, -2) = h_2(0) = -15$$

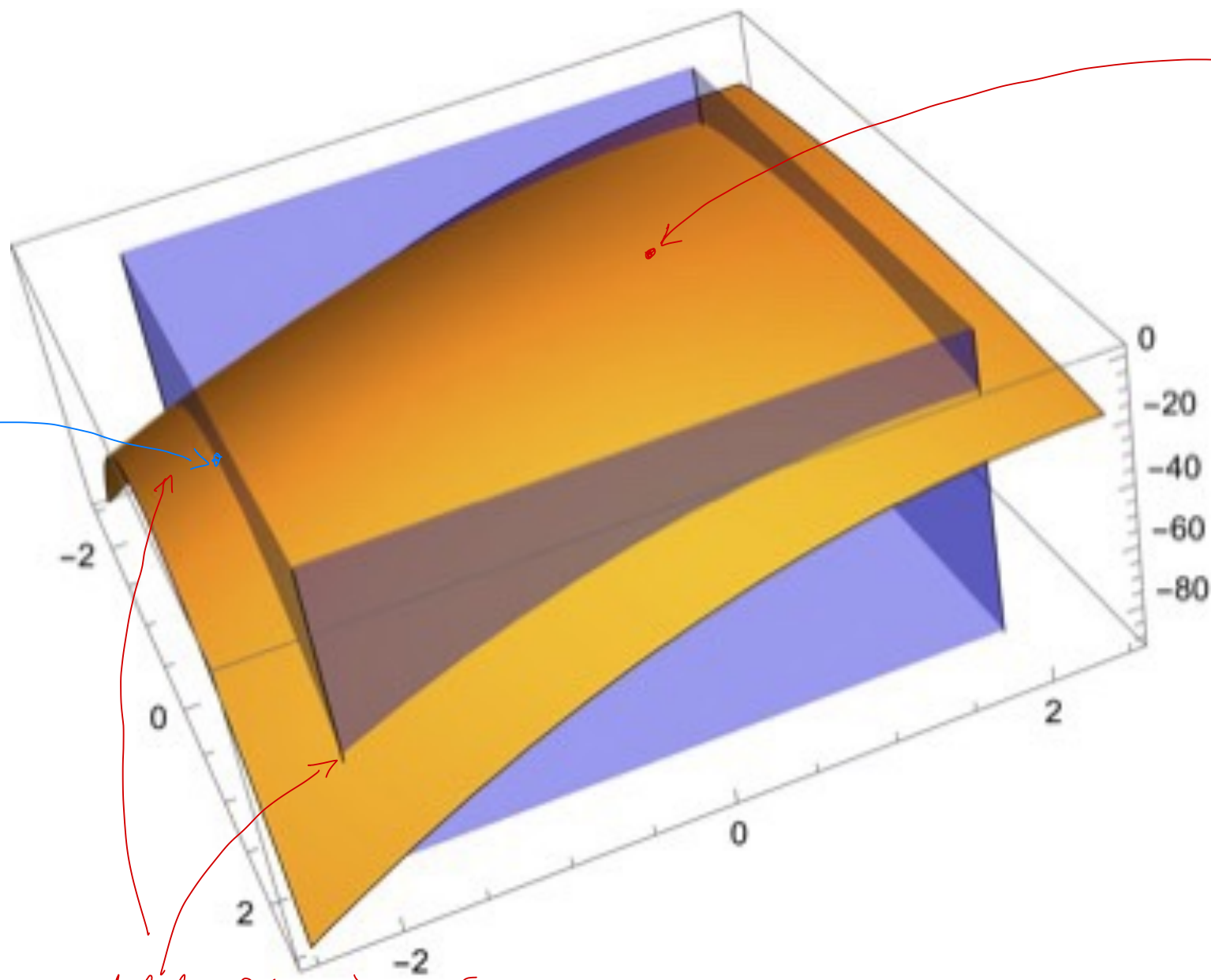
$$f(\pm 2, 2) = -15$$

$$f(\pm 2, -2) = \boxed{-55} \text{ min global sur } E$$

$\Rightarrow f\left(0, \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}$ est le max absolu de f sur E

$f(\pm 2, -2) = -55$ est le min absolu de f sur E

$$f(x, y) = -6x^2 + 2x^2y - 3y^2 + 2y + 1$$



max loc
sur $(x, -2)$

max global
 $f(0, \frac{1}{3}) = \frac{4}{3}$

min global $f(\pm 2, 2) = -55$

§4.10 Théorème des fonctions implicites.

-243-

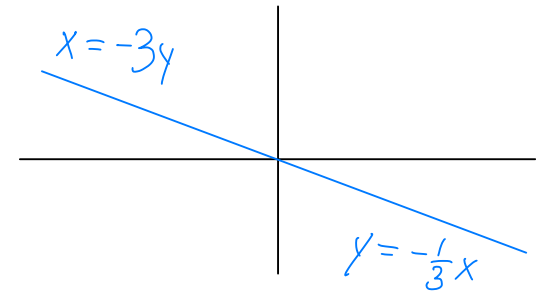
Fonction implicite: une dépendance $f = f(\bar{x})$ qui est définie par une équation.

Question: Est-ce que l'équation $F(x,y)=0$ définit une fonction $y = y(x)$?

Ex 1. $F(x,y) = x + 3y = 0$ définit une fonction $y = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$

$$y = f(x) \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

On a aussi $x = g(y) \Rightarrow x = -3y \quad \forall y \in \mathbb{R}$



Ex 2. $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

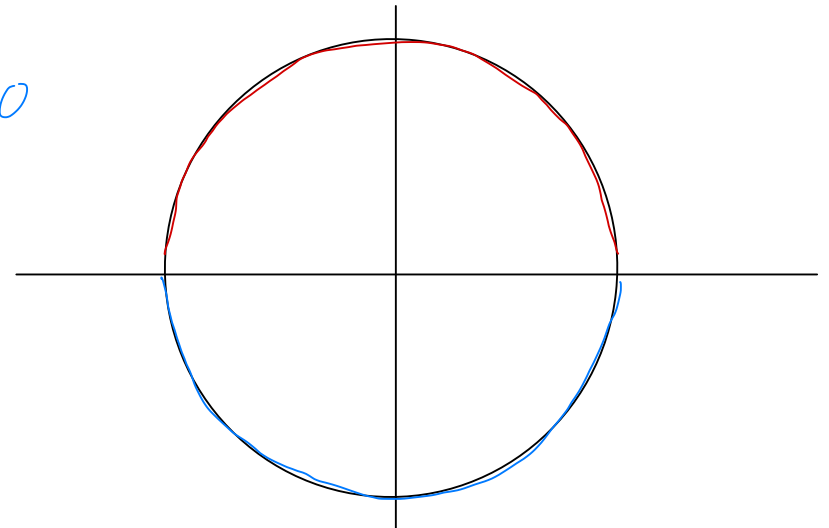
Soit $(a,b) \in \text{cercle} : a^2 + b^2 = 1$.

Si $b > 0 \Rightarrow y = \sqrt{1-x^2}$ au voisinage de (a,b) $b > 0$

Si $b < 0 \Rightarrow y = -\sqrt{1-x^2}$ au voisinage de (a,b) : $b < 0$

Si $b = 0 \Rightarrow$ deux solutions pour chaque x
dans un voisinage de $(\pm 1, 0)$

On ne peut pas avoir une fonction $y = f(x)$
au voisinage de $x \pm 1$



Ex3. $F(x,y) = 1 - y e^x + x e^y = 0 \Rightarrow y = f(x)$ autour d'un point donné $(0,1)$?

Parfois on ne peut pas résoudre l'équation explicitement.

On peut considérer $F(x,y)$ comme une fonction de 2 variables de classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ qui définit une surface $z = F(x,y)$.

On considère l'intersection de cette surface avec le plan $z = 0$.

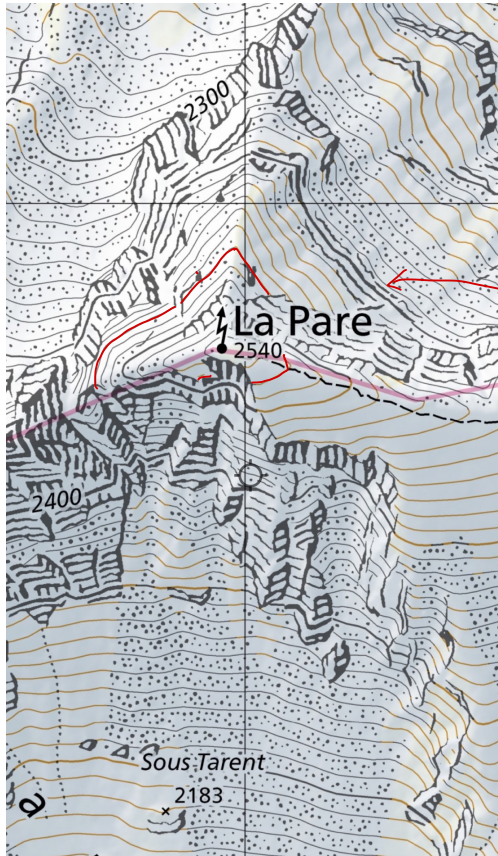
La courbe obtenue s'appelle la ligne de niveau de $F(x,y)$ à $z = 0$.

Déf. Une surface (ligne) de niveau d'une fonction $F(x,y,z)$ ($F(x,y)$) est la surface (ligne) définie par l'équation $F(x,y,z) = C$
 $(F(x,y) = C \in \mathbb{R})$
 le niveau

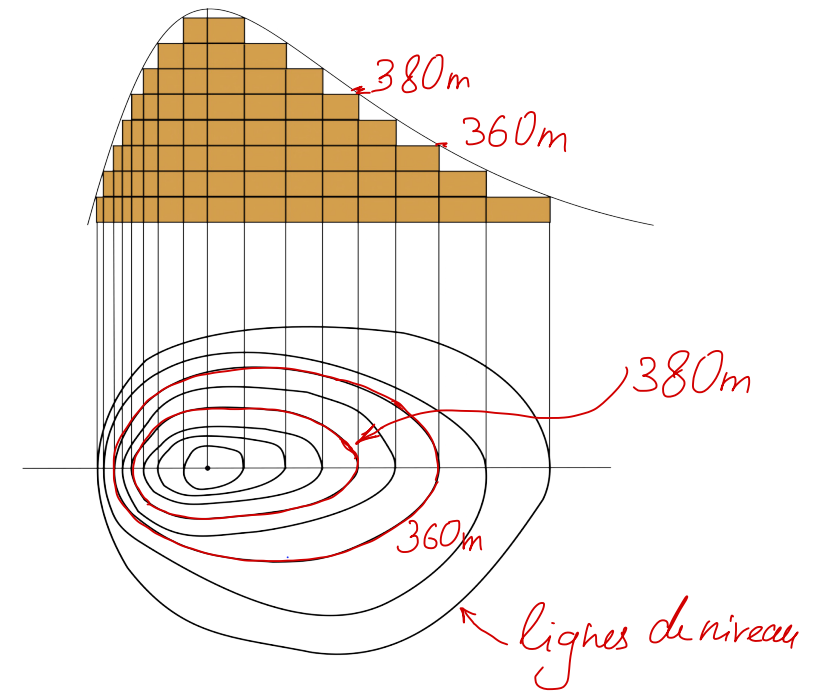
Ex

Cartes géographiques

Courbes d'altitude en cartographie
sont des ensembles des points
situés en même altitude



$z = f(x, y)$
fonction altitude
 $\Rightarrow$ lignes de
niveau



Ex 3. $F(x, y) = 1 - y e^x + x e^y = 0 \Rightarrow y = f(x)$ autour d'un point donné $(0, 1)$?

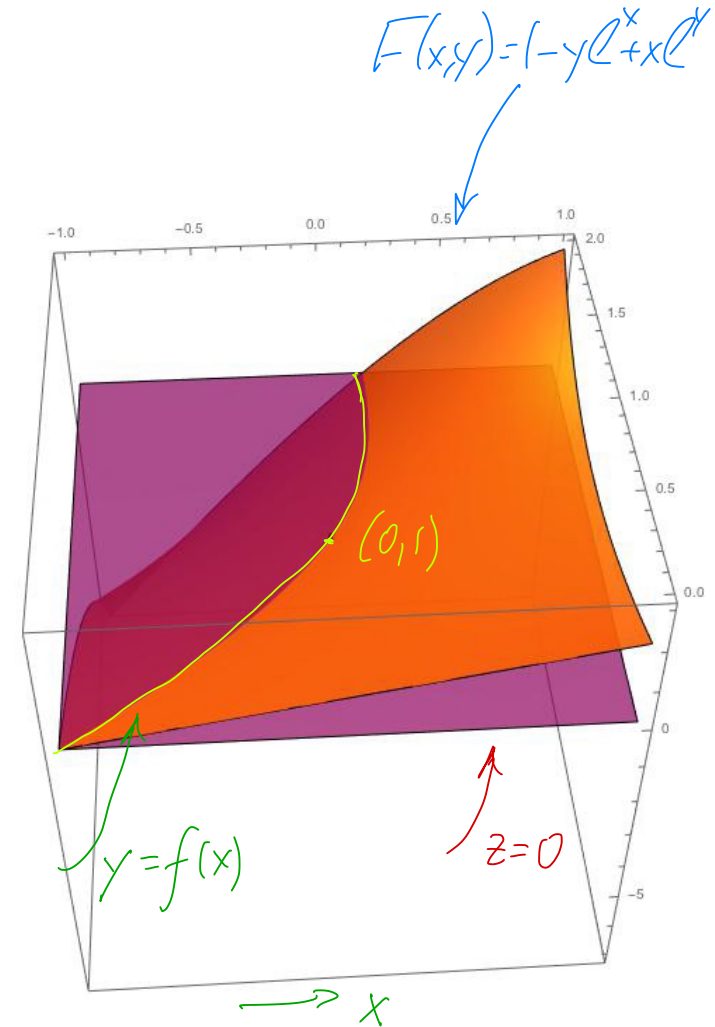
$F(x, y) = 0$ - la courbe de niveau =
 = le graphique de la fonction $y = f(x)$ (si elle existe)
 définie par $F(x, y) = 0$ au voisinage du point donné

$$(0, 1) \in \text{courbe de niveau : } \underset{F(x, y) = 0}{1 - 1e^0 + 0 \cdot e^1 = 0}$$

Vrai

Alors on cherche l'information par rapport
 à la fonction $y = f(x)$ telle que

$$F(x, f(x)) = 0 \text{ pour tout } x \text{ au voisinage de } (0, 1).$$



Quelle information peut-on obtenir d'une fonction définie implicitement?

Théorème des fonctions implicites.

Théorème $F: E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 au voisinage de $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in E$.
 $n \geq 2$ $\subset \mathbb{R}^n$ telle que (1) $F(\bar{a}) = 0$
(2) $\frac{\partial F}{\partial x_n}(\bar{a}) \neq 0$

Alors il existe un voisinage $B(\check{a}, \delta)$ de $\check{a} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et une fonction

$f: B(\check{a}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

(1) $a_n = f(a_1, \dots, a_{n-1})$

(2) $F(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_{n-1}) \in B(\check{a}, \delta)$

De plus, f est de classe C^1 dans un voisinage de $\check{a}$, et on a

(3) $\frac{\partial f}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x_p}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))}{\frac{\partial F}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_{n-1}, f(x_1, \dots, x_{n-1}))} \quad \forall p \in \{1, \dots, n-1\}$

Cas particulier de TFI: deux variables.

-248-

Soit $F(x, y) : E^{CR^2} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que $F(a, b) = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$

Alors l'équation $F(x, y) = 0$ définit localement autour de (a, b) une fonction

$y = f(x)$ telle que

(1) $f(a) = b$

(2) $F(x, f(x)) = 0$ pour tout x dans un voisinage de $x = a$

(3) $f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \Rightarrow$

on peut calculer $f'(a)$
sans savoir la formule
explicite pour $f(x)$.

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \leftarrow$ la condition du Thm n'est pas satisfaite
 $y = f(x)$ n'est pas bien définie

$\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow y = f(x)$ est bien définie : $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \Rightarrow \exists y = f(x) \text{ t.q. } F(x, f(x)) = 0 \text{ au voisinage de } (a, b).$

$\Rightarrow F(x, f(x)) = 0 \text{ au voisinage de } x = a \Rightarrow F'(x, f(x)) = 0$

$x \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix} \xrightarrow{F} F(x, f(x)) \Rightarrow J_{F(x, f(x))} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix} = \frac{\partial F}{\partial x} + f'(x) \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \text{ au voisinage de } x = a$

$\Rightarrow f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \Rightarrow (3) \text{ du Thm.}$

Ex 3.

-249-

$$F(x,y) = \underline{1 - ye^x + xe^y}. \text{ Soit } (x,y) = (0,1)$$

$$F(0,1) = 1 - e^0 + 0e^1 = 0 \quad \checkmark$$

Vérifier que $F(x,y)=0$ définit autour de $(0,1)$
une fonction $y=f(x)$ telle que $F(x,f(x))=0$
au voisinage de $x=0$ et trouver $f'(0)$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -e^x + xe^y \Big|_{(0,1)} = -1 \neq 0 \Rightarrow \text{TFI est applicable}$$

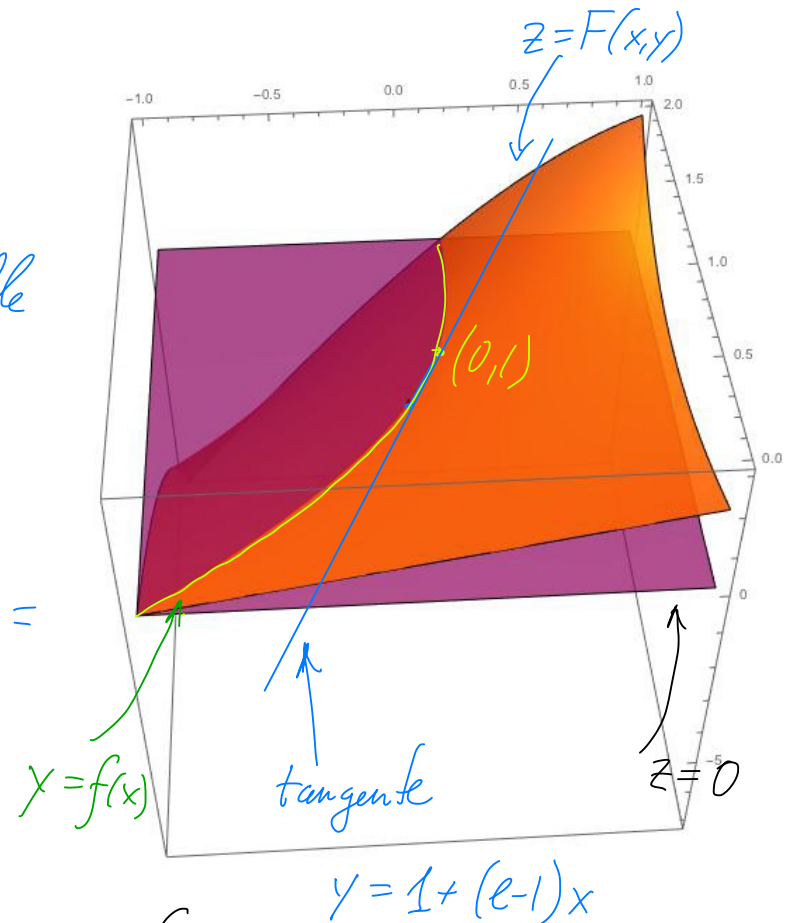
$\Rightarrow \exists y=f(x)$ au voisinage de $(0,1)$: $F(x,f(x))=0$

$$\begin{aligned} \text{et } f'(x) &= - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = - \frac{ye^x + e^y}{-e^x + xe^y} \Big|_{(0,1)} = - \frac{-1+e}{-1} = \\ &= -1+e = f'(0) \end{aligned}$$

Equation de la tangente au point $(0,1)$ à la courbe $y=f(x)$

$$y-1 = (-1+e)(x-0) \quad \Rightarrow \quad y = 1 + (e-1)x$$

$$y-y_0 = \text{pente}(x-x_0) \quad \text{pente} = f'(x_0) \text{ au point } (x_0, y_0)$$



Cas particulier de TFI: trois variables.

-250-

Soit $F(x, y, z) : E \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , t. g. $F(a, b, c) = 0$ et

$$\frac{\partial F}{\partial z}(a, b, c) \neq 0.$$

Alors il existe localement une fonction $z = f(x, y)$ telle que

- (1) $f(a, b) = c$
- (2) $F(x, y, f(x, y)) = 0$ pour tout couple (x, y) dans un voisinage de (a, b)
- (3) $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, f(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, f(x, y))}$.

L'équation $F(x, y) = \sin(x+y)\cos(x-y) - \frac{1}{2} = 0$

A définit au voisinage de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ une fonction $y = g(x)$ avec la tangente $y = -x + \frac{3\pi}{4}$
en $x = \frac{\pi}{2}$

B définit au voisinage de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ une fonction $x = h(y)$ avec la tangente $x = \frac{\pi}{2}$ en $y = \frac{\pi}{4}$

C définit au voisinage de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ une fonction $y = g(x)$ avec la tangente $y = x - \frac{\pi}{4}$
en $x = \frac{\pi}{2}$

D définit au voisinage de $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ une fonction $x = h(y)$ avec la tangente $x = \frac{\pi}{4} + y$
en $y = \frac{\pi}{4}$

$$F(x, y) = \sin(x+y)\cos(x-y) - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x, y) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right).$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} = 0 \quad \text{OK}$$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x+y)\cos(x-y) - \sin(x+y)\sin(x-y) = \cos(x+y+x-y) = \cos(2x) \Big|_{x=\frac{\pi}{2}} = \cos\pi = -1 \quad \text{OK}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x+y)\cos(x-y) + \sin(x+y)\sin(x-y) = \cos(2y) \Big|_{y=\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$\Rightarrow \exists x = h(y) \quad \text{mais pas } y = g(x) \rightarrow \text{X}$$

$$h'(y) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}} \Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right)} = - \frac{0}{-1} = 0 \Rightarrow \text{la pente de la tangente } x = h(y) \text{ en } \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right) \text{ est } 0.$$

$\Rightarrow$ équation de la tangente

$$x - \frac{\pi}{2} = 0 \left(y - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \text{B}$$