Analyse II

Section IN/SC

Printemps 2025

Anna Lachowska

Chapitre I. Equations différentielles ordinaires.

§1.1. Définitions et exemples.

Déf Une équation différentielle ordinaire est une expression

$$E(x, y, y', \dots y^{(n)}) = 0 \qquad (*)$$

où E est une expression fonctionnelle, $n \in \mathbb{N}_+$, $y = y(x)$ une fonction inconnue de x

Déf Une solution de l'équation différentielle est une fonction $y: I \to \mathbb{R}$ de classe C^n sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ telle que l'équation donnée est satisfaite $\forall x \in I$.

Soit $E(x, y, \dots y^{(n)}) = 0$ $(*)$ équation différentielle (ED)

Déf La solution générale d'une ED est l'ensemble de toutes les solutions de l'équation différentielle.

Ex 1. $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ telle que $y' = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = C$ où $C \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow I = \mathbb{R}$

$y(x) = 1$ solution particulière $\forall x \in \mathbb{R}$

$y(x) = C$ pour $\forall C \in \mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ est la solution générale.

Ex 2. $y'' = 3$

$\Rightarrow y'(x) = \int 3\,dx = 3x + C_1$ $\forall C_1 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow y(x) = \int (3x + C_1)\,dx = \frac{3}{2}x^2 + C_1 x + C_2$ $\forall C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow I = \mathbb{R}$

solution générale sur $\mathbb{R}$

Ex 3. $y + y' = 0$; $\Rightarrow y' = -y$ $\Rightarrow (y(x))' = -e^{-x}$ une solution sur $\mathbb{R}$

$y(x) = Ce^{-x}$ $\Rightarrow$ $y'(x) = -Ce^{-x} = -y(x)$

la solution générale sur $\mathbb{R}$

Terminologie Soit $E(x, y, \ldots y^{(n)}) = 0$ $(*)$ équation différentielle (ED)

Déf Un nombre naturel $n \in \mathbb{N}_+$ est l'ordre de l'équation $(*)$ si n est l'ordre maximal de dérivée de $y(x)$ dans l'équation.

Déf. Si $(*)$ est de la forme $a_0(x)y + a_1(x)y' + a_2(x)y'' + \ldots + a_n(x)y^{(n)} = b(x)$ alors l'équation est dite linéaire, où $a_i(X)$, $b(x)$ sont des fonctions continues.

Déf. Si l'expression $(*)$ ne contient pas de x, l'équation $(*)$ est dite autonome.

Ex 4.

(a) $(2\sin x)\cdot y + x^2 \cdot y' = \cos x$ Equation linéaire d'ordre 1

(b) $y^2 - y'' + y = 0$ ED d'ordre 2 autonome

(c) $y''' + 3x^2 y = e^x$ ED linéaire d'ordre 3

(d) $2xy = \sin y + y'$ ED d'ordre 1

Équation différentielle à variables séparées. (EDVS)

Ex 1 et Ex 2 sont de la forme $y^{(n)} = f(x)$ où $f(x)$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ on peut résoudre cette équation par intégration.

Un autre type d'ED résoluble par intégration :

Déf. $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une EDVS où

$f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$

$g : J \to \mathbb{R}$ est une fonction continue sur $J \subset \mathbb{R}$.

Une fonction $y : J' \subset J \to I$ de classe C^1 satisfaisant l'équation $f(y) \cdot y' = g(x)$ est une solution.

Explication : $f(y) \dfrac{dy}{dx} = g(x)$ „$\Rightarrow$" $\underbrace{\int f(y)\,dy}_{\text{seulement } y} = \underbrace{\int g(x)\,dx}_{\text{seulement } x}$

variables séparées

Ex3.

$y' = -y$ „Equation à variables séparées"

$$\underbrace{-\frac{1}{y}}_{f(y)} \cdot \underbrace{y'}_{y'} = \underbrace{1}_{g(x)}$$

EDVS sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dx} = -1 \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int -1 dx$$

$$\Rightarrow \ln|y| + C_1 = -x + C_2 \Rightarrow \underline{\ln|y| = -x + C}, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$|y| = e^{-x+C} = \underbrace{e^C}_{C_3 > 0} e^{-x} = C_3 e^{-x}$$

$$\Rightarrow y = \pm \underset{\neq 0}{C_3} e^{-x}$$, aussi $y(x) = 0$ est une solution

$$\Rightarrow \underline{y(x) = C_4 e^{-x}}$$ où $C_4 \in \mathbb{R}$ arbitraire

$x \in \mathbb{R}$

Problème de Cauchy

Déf. Résoudre le problème de Cauchy (ED avec des conditions initiales) pour l'equation $E(x, y, y', \ldots y^{(n)}) = 0$ c'est de trouver l'intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$ et une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^n(I)$, telle que $E(x, y \ldots y^{(n)}) = 0$ sur I et $\underbrace{y(x_0) = b_0,\ y(x_1) = b_1 \ldots y'(x_2) = \ldots \text{etc}}_{\text{conditions initiales}}$

Une solution d'un problème de Cauchy s'appelle une solution particulière

Le nombre des conditions initiales dépend du type de l'ED

Déf Une solution d'un problème de Cauchy est maximale si elle est définie de classe C^n sur le plus grand intervalle possible.

Plus généralement, une solution d'une ED est dite maximale s'il n'existe pas d'intervalle plus grande où la même fonction donne une solution.

Ex 2 Résoudre le problème de Cauchy pour $y''=0$ avec les conditions initiales $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

$y''=0$

$y'=C_1=y'(x)$

$y=y(x)=C_1x+C_2$ Solution générale

Or : $y(0)=C_2=1$

$y'(0)=C_1=2$

Solution particulière : $y(x)=2x+1$ $x\in\mathbb{R}$

Il s'agit de la solution maximale du problème de Cauchy.

Exercice: $y''=0$ avec les conditions: $y(0)=3$, $y(4)=1$.

$y'=C_1$ $\forall C_1\in\mathbb{R}$, $y=C_1x+C_2$ $\forall C_1,C_2\in\mathbb{R}$, $\forall x\in\mathbb{R}$
solution générale

$y(0)=C_2=3$, $y(4)=C_1\cdot 4+C_2=3+C_1\cdot 4=1$ $\Rightarrow$ $C_1\cdot 4=-2$, $C_1=-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $y(x)=-\frac{1}{2}x+3$ solution particulière, sur $\mathbb{R}$. Aussi la solution maximale.

Théorème (Existence et unicité d'une solution de EDVS).

Soit $f: I \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(y) \neq 0 \ \forall y \in I$
$g: J \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors pour tout couple
$(x_0 \in J,\ b_0 \in I)$, l'équation $\boxed{f(y) \cdot y' = g(x)}$ $(**)$
admet une solution $y: J' \subset J \to I$ vérifiant
la condition initiale $y(x_0) = b_0$.

Si $y_1: J_1 \to I$ et $y_2: J_2 \to I$ sont deux solutions
telles que $y_1(x_0) = y_2(x_0) = b_0$, alors $y_1(x) = y_2(x)$ pour tout $x \in J_1 \cap J_2$

(démonstration la prochaine fois).

Ex. EDVS : $x^2 y' = e^y$ (Problème de Cauchy : $y(-2)=0$).

$f(y)\cdot y' = g(x)$: $e^{-y} y' = \frac{1}{x^2}$ $\quad f(y) = e^{-y}$ sur $\mathbb{R}$, $f(y) \neq 0$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ sur $]-\infty, 0[$ et $]0, \infty[$

$$\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \frac{dx}{x^2}$$

$$\Rightarrow -e^{-y} = -\frac{1}{x} + C \Rightarrow e^{-y} = \frac{1}{x} - C, \; C \in \mathbb{R} \Rightarrow -y = \ln\left(\frac{1}{x} - C\right)$$

$y = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right) \Rightarrow$ il faut $\frac{1}{x} - c > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > c$

(1) $c > 0$ $\quad \frac{1}{x} > c \Rightarrow x > 0 \Rightarrow x < \frac{1}{c}$ et $x > 0 \Rightarrow x \in \left]0, \frac{1}{c}\right[$ $\quad c > 0$

(2) $c = 0$ $\quad \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow x \in]0, \infty[$, $c = 0$

(3) $c < 0$ $\quad \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{c} < 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ll} x > 0, \; x > \frac{1}{c} \Rightarrow x \in]0, \infty[& c < 0 \\ x < 0 \quad x < \frac{1}{c} \Rightarrow x \in \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[& c < 0 \end{array}\right.$

$$\begin{cases} y = -\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln x, & x \in]0, \infty[\\ y = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right), & x \in \left]0, \frac{1}{c}\right[\quad c > 0 \\ y = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right), & x \in \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[\quad c < 0 \\ y = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right), & x \in]0, \infty[, \quad c < 0 \end{cases}$$

la solution générale

Vérification: $y = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right) \Rightarrow y' = -\frac{1}{\frac{1}{x}-c} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^2} \frac{1}{\frac{1}{x}-c}$.

$x^2 \cdot y' = \frac{1}{\frac{1}{x}-c} = e^{y} = e^{-\ln\left(\frac{1}{x}-c\right)}$ V

Condition initiale: $y(-2) = 0$.

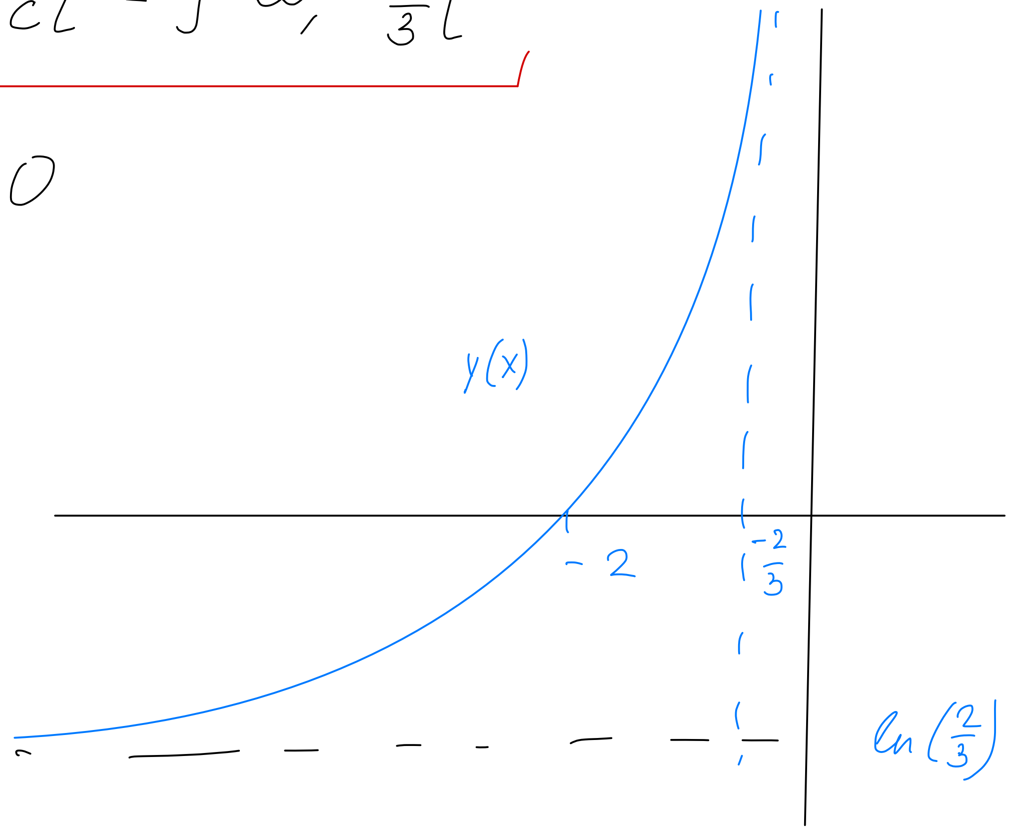
$y(x) = -\ln\left(\frac{1}{x} - c\right) \Rightarrow y(-2) = -\ln\left(-\frac{1}{2} - c\right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} - c = 1$

$\Rightarrow c = -\frac{3}{2} < 0$.

$\Rightarrow y = -\ln\left(\frac{1}{x} + \frac{3}{2}\right), \; x \in \left]-\infty, \frac{1}{c}\right[= \left]-\infty, -\frac{2}{3}\right[$

$$\lim_{x\to\infty} -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right) = -\ln\frac{3}{2} = \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$$

$$\lim_{x\to -\frac{2}{3}} -\ln\left(\frac{1}{x}+\frac{3}{2}\right) = +\infty$$



Méthodes de démonstration. Raisonnement mathématique

Déf. Une proposition est un énoncé qui peut être vrai ou faux.

Euclid
(325–265 BC)

Ex
(a) Il existe une infinité de nombres premiers. Vrai

(b) $\cos(2x) = 2\cos x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ Faux

(c) Ouvrez la porte ! N'est pas une proposition.

Déf. Une démonstration est une suite d'implications logiques qui sert à dériver la proposition en question à partir des axiomes (propositions admises comme vraies) et des propositions préalablement obtenues.

Méthodes de démonstration

Méthode 1. Démonstration directe : $P \Longrightarrow$ implications logiques, axiomes, propositions connues $\Longrightarrow Q$

P : conditions données

Q : proposition désirée

Ex 1 : Démontrer que $g(x) = (\cos x)^{\cos x}\left(\cos x \cdot \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) \leq 0 \quad \forall x \in \underbrace{\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[}_{=I}$

$\underbrace{(\cos x)^{\cos x}}_{>0}\left(\cos \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) \leq 0 \underset{\cos x > 0}{\Rightarrow} \cos x \cdot \ln(\cos x) \leq \frac{\sin^2 x}{\cos x} \underset{\cos x > 0}{\Rightarrow}$

$\underbrace{\ln(\cos x)}_{\leq 0 \; \cos x \leq 1} \leq \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \underbrace{\tan^2 x}_{>0} \Rightarrow$ Vrai. $\Rightarrow$ la proposition originale est vrai !

C'est une „démonstration" fallacieuse !

Si P, Q deux propositions telles que $P \Rightarrow Q$ et Q est vrai, cela n'implique pas que P est vrai !

Ex : $-2 = 0$ faux $\cdot 0 \Rightarrow 0 = 0$ vrai

Dém : $0 < \cos x \leq 1$ sur $I \Rightarrow (\cos x)^{\cos x} > 0$, $\ln(\cos x) \leq 0$.

$\Rightarrow \cos \cdot \ln(\cos x) \leq 0$, $\frac{\sin^2 x}{\cos x} \geq 0 \Rightarrow \cos x \cdot \ln(\cos x) \leq \frac{\sin^2 x}{\cos x} \quad \forall x \in I$

$\Rightarrow (\cos x)^{\cos x}\left(\cos x \ln(\cos x) - \frac{\sin^2 x}{\cos x}\right) \leq 0 \quad \forall x \in I.$

Méthode 2. Raisonnement par contraposée

$P \Rightarrow Q$ est équivalent à non $Q \Rightarrow$ non P
implique $\Leftrightarrow$ $\neg Q \Rightarrow \neg P$

Ex 2. Si $\underbrace{r \in \mathbb{R}_{>0} \text{ est irrationnel}}_{P}$, alors $\underbrace{\frac{1}{\sqrt[3]{r}} \text{ est aussi irrationnel.}}_{Q}$

Supposons que $\frac{1}{\sqrt[3]{r}} = \frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow \frac{1}{r} = \frac{a^3}{b^3} \Rightarrow r = \frac{b^3}{a^3} \Rightarrow r$ est rationnel

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ Par contraposée, $P \Rightarrow Q$ $\blacksquare$