Test blanc

28 avril 2025

10:15 – 11:10

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{x}{x^2+9}(y(x)-1)$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

- [ ] $y(4) = 6$
- [x] $y(4) = 11$
- [ ] $y(4) = 26$
- [ ] $y(4) = 0$

$y' = \frac{x}{x^2+9}(y-1)$ $y=1$ solution constante ; $\frac{y'}{y-1} = \frac{x}{x^2+9}$ EDVS

$$\int \frac{dy}{y-1} = \int \frac{x\,dx}{x^2+9} \Rightarrow \ln|y-1| = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+9)}{x^2+9} = \frac{1}{2}\ln(x^2+9) + \underbrace{C_1}_{=\ln C} = \ln C\sqrt{x^2+9}$$

$C>0$

$$|y-1| = C\sqrt{x^2+9}, \quad C>0$$

$$y-1 = C\sqrt{x^2+9}, \quad C \neq 0$$

$$y = 1 + C\sqrt{x^2+9}$$

$$y(0) = 1 + C\cdot 3 = 7 \Rightarrow C = 2$$

$$y(4) = 1 + 2\sqrt{16+9} = 1 + 2\cdot 5 = \underline{11}$$

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x}\, y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- [x] $y(2) = \frac{3}{20}$
- [ ] $y(2) = -\frac{2}{15}$
- [ ] $y(2) = -\frac{1}{10}$
- [ ] $y(2) = 0$

$$y' + \frac{1}{x} y = \underbrace{\frac{2}{(1+x^2)^2}}_{f(x)} \qquad x > 0$$

$p(x) = \frac{1}{x}$ EDL1

$P(x) = \int \frac{dx}{x} = \ln x$ ($x>0$) ; $\Rightarrow$ $C(x) = \int e^{P(x)} f(x) = \int e^{\ln x} \cdot \frac{2}{(1+x^2)^2} dx =$

$y_{hom} = C e^{-P(x)} = C e^{-\ln x} = \frac{C}{x}$, $x > 0$, $C \in \mathbb{R}$

$= \int \frac{2x\,dx}{(1+x^2)^2} = \int \frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^2} = -\frac{1}{(1+x^2)}$

$\Rightarrow y_p(x) = C(x) e^{-P(x)} = -\frac{1}{(1+x^2)} \cdot \frac{1}{x}$

$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{x(1+x^2)} + \frac{C}{x}$; $y(1) = -\frac{1}{1 \cdot 2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$y(2) = -\frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{2 \cdot 2} = -\frac{1}{10} + \frac{1}{4} = \frac{-2+5}{20} = \underline{\frac{3}{20}}$

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

- [ ] $y(\ln(3)) = -\frac{1}{3}$
- [ ] $y(\ln(3)) = 0$
- [x] $y(\ln(3)) = -\frac{4}{9}$
- [ ] $y(\ln(3)) = -12$

$y'' - y' - 6y = 4e^{-x}$ EDL2 coeff const.

$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda-3)(\lambda+2) \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2$

$y_{hom} = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$; $f(x) = 4e^{-x}$ -1 n'est pas une racine de

$\Rightarrow$ Ansatz $y(x) = Ae^{-x}$; $y'(x) = -Ae^{-x}$; $y''(x) = Ae^{-x}$

$\Rightarrow$ $Ae^{-x} + Ae^{-x} - 6Ae^{-x} = 4e^{-x} \Rightarrow -4Ae^{-x} = 4e^{-x} \Rightarrow A = -1$.

$\Rightarrow y_p = -e^{-x}$ (vérification!)

$y(x) = -e^{-x} + C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x}$; $y'(x) = e^{-x} + 3C_1 e^{3x} - 2C_2 e^{-2x}$

$y(0) = -1 + C_1 + C_2 = -2 \Rightarrow C_2 = -1 - C_1$

$y'(0) = 1 + 3C_1 - 2C_2 = 3 \Rightarrow 1 + 3C_1 + 2 + 2C_1 = 3 \Rightarrow C_1 = 0$

$\Rightarrow C_2 = -1$

$y(x) = -e^{-x} - e^{-2x}$

$y(\ln(3)) = -e^{-\ln 3} - e^{-2\ln 3} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \underline{-\frac{4}{9}}$

Question 4 : Le sous-ensemble

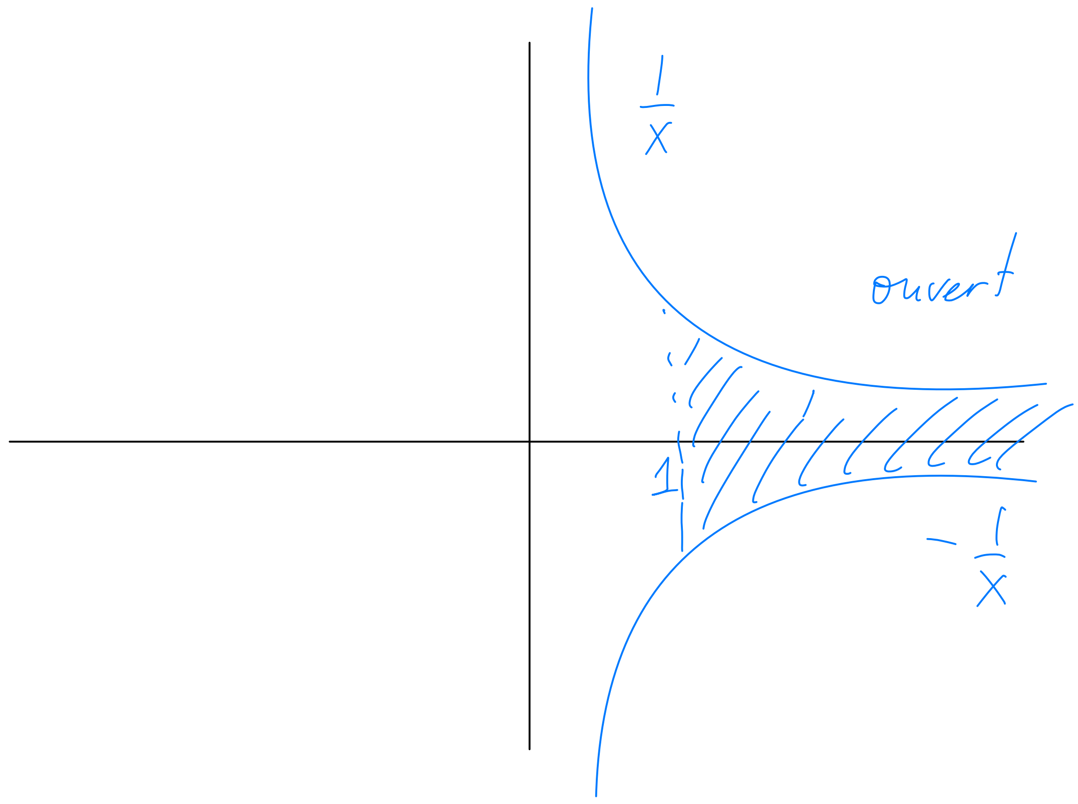
$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\} \subset \mathbb{R}^2$$

- [ ] est ouvert et borné
- [ ] est fermé et non borné
- [ ] est fermé et borné
- [x] est ouvert et non borné

$x > 1 \quad , \quad -1 < xy < 1$

$\Rightarrow x > 0 \qquad -\frac{1}{x} < y < \frac{1}{x}$

ouvert, non borné



Question 5 : Soit $\{\overline{x}_n\}$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\overline{x}_n = \Big(\underbrace{n\sin\Big(\frac{(-1)^n}{n}\Big)}_{x_{1,n}},\ \underbrace{\frac{(-1)^n}{n}\sin(n)}_{x_{2,n}}\Big)^{\mathrm{T}}, \qquad \text{pour tout } n \in \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Alors

par composante !

- [ ] la suite converge et $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = (0,\, 1)^{\mathrm{T}}$
- [ ] la suite n'est pas bornée
- [x] la suite est bornée mais pas convergente
- [ ] la suite converge et $\lim_{n\to\infty} \overline{x}_n = (1,\, 0)^{\mathrm{T}}$

$$x_{1,n} = n \sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) = \underbrace{\frac{\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)}{\frac{(-1)^n}{n}}}_{\to 1} (-1)^n$$

diverge, mais bornée

$$x_{2,n} = \underbrace{\underbrace{\frac{(-1)^n}{n}}_{\to 0}\ \underbrace{\sin(n)}_{\text{bornée}}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}$$

$\Rightarrow$ bornée, pas convergente

Question 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y + y^3x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- [ ] $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas
- [x] f est dérivable en $(0,0)$
- [ ] f est continue en $(0,0)$ mais f n'est pas dérivable en $(0,0)$
- [ ] f n'est pas continue en $(0,0)$

$$\frac{x^3y + y^3x}{x^2+y^2} = \frac{xy\cancel{(x^2+y^2)}}{\cancel{x^2+y^2}} \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

$$f(x,y) = \begin{cases} xy, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{f(x,y) = xy} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

fonction de classe C^∞

$\Rightarrow$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$

Question 7 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sin(\pi x^2 y)\,.$$

Alors la dérivée directionnelle $D_{\overline{v}} f(1,1)$ de f en $(1,1)$ suivant le vecteur $\overline{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\ \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{\mathrm{T}}$ vaut

- ☐ -3π
- ☒ 0
- ☐ $-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$

$$D_v f(1,1) = \lim_{t\to 0} \frac{f\left(1-\frac{t}{\sqrt5},\ 1+\frac{2t}{\sqrt5}\right) - f(1,1)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\frac{t}{\sqrt5}\right)^2\left(1+\frac{2t}{\sqrt5}\right)\right) - 0}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1-\frac{2t}{\sqrt5}+\frac{t^2}{5}\right)\left(1+\frac{2t}{\sqrt5}\right)\right)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin\left(\pi\left(1+\overbrace{\frac{t^2}{5}-\frac{4t^2}{5}+\frac{2t^3}{5\sqrt5}}^{t^2u}\right)\right)}{t} =$$

$$u = -\frac{3}{5} + \frac{2t}{5\sqrt5} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} -\frac{3}{5}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\sin(\pi + t^2\pi u)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\overbrace{\sin\pi}^{=0}\cos t^2\pi u + \cos\pi \sin t^2\pi u}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{-\sin(t^2\pi u)}{t} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \underbrace{\frac{-\sin(t^2\pi u)}{t^2\pi u}}_{\to -1} \underbrace{t\pi u}_{\to 0} = \underline{0}$$

$(1,1) = (x,y)$

Autrement, puisque f est dérivable, $\nabla f(x,y) = \left(2\pi xy\cos(\pi x^2 y),\ \pi x^2\cos(\pi x^2 y)\right) = (-2\pi, -\pi)$

$$D_v f(1,1) = \left\langle \nabla f(1,1), \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) \right\rangle = \left\langle (-2\pi, -\pi), \left(-\frac{1}{\sqrt5}, \frac{2}{\sqrt5}\right) \right\rangle = \frac{2\pi}{\sqrt5} - \frac{2\pi}{\sqrt5} = \underline{0}$$

Question 8 : Soit $\overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par

$$\overline{f}(x,y) = \left(xy,\, x^2+y^2\right)^{\mathrm{T}}$$

et soit $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$\nabla g(1,2) = \left(1,\, -\tfrac{1}{4}\right).$$

Alors la fonction composée $h = g \circ \overline{f}\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ satisfait

- [ ] $\nabla h(1,1) = \left(\frac{3}{2}\,,\, 0\right)$
- [ ] $\nabla h(1,1) = \left(\frac{3}{4}\,,\, \frac{3}{2}\right)$
- [x] $\nabla h(1,1) = \left(\frac{1}{2}\,,\, \frac{1}{2}\right)$
- [ ] $\nabla h(1,1) = \left(\frac{7}{4}\,,\, 1\right)$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\overline{f}"] \arrow[rr, bend right, "g\circ\overline{f} = h"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$$J_{g\circ\overline{f}} = J_{g(f(x,y))} \cdot J_{f(x,y)}$$

$$\nabla h(x,y) = \nabla g(f(x,y)) \cdot J_{f(x,y)}$$

$$(x,y) = (1,1) \Rightarrow f(x,y) = (1,2)$$

$$\nabla g(1,2) = \left(1, -\tfrac{1}{4}\right)$$

$$J_{f(x,y)} = \begin{pmatrix} y & x \\ 2x & 2y \end{pmatrix}\Bigg|_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

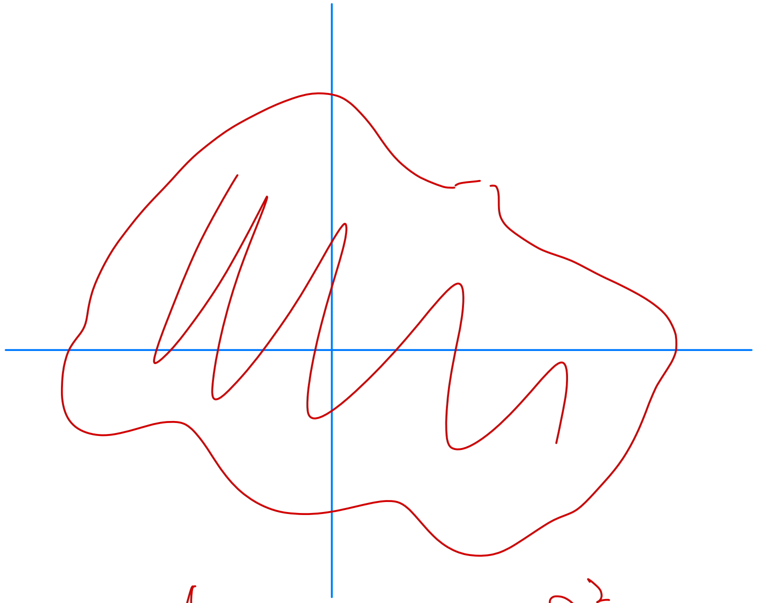
$$\Rightarrow \nabla h(1,1) = \left(1 \quad -\tfrac{1}{4}\right)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\left(\tfrac{1}{2} \quad \tfrac{1}{2}\right)}$$

Question 9 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in A \text{ et } z = 0\}$$

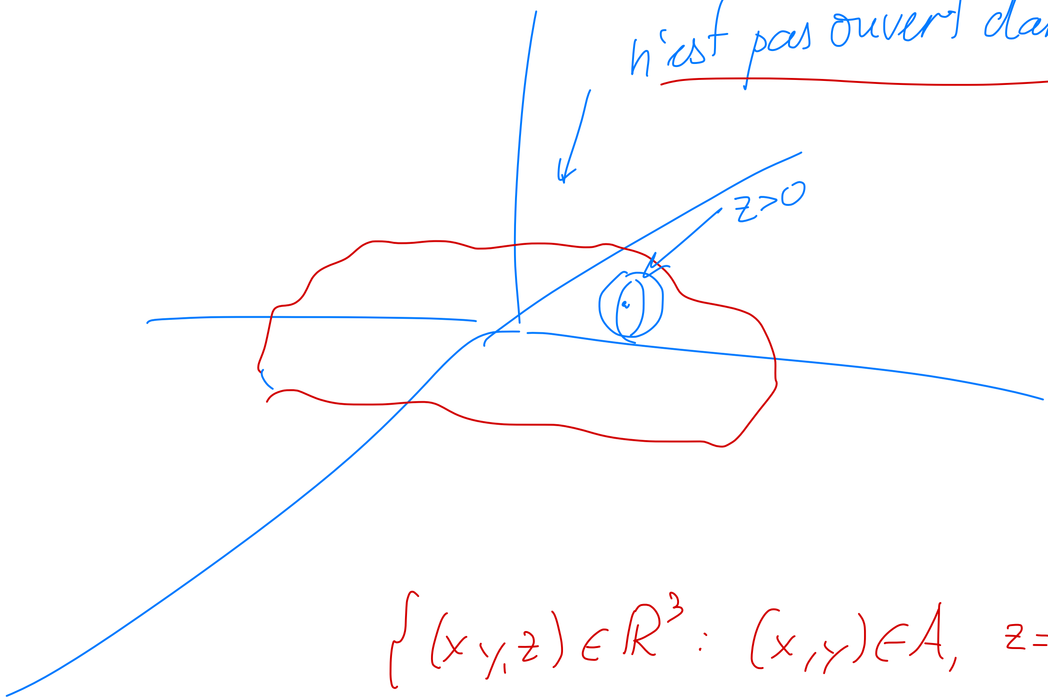
est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☒ FAUX



A ouvert $\subset \mathbb{R}^2$

n'est pas ouvert dans $\mathbb{R}^3$

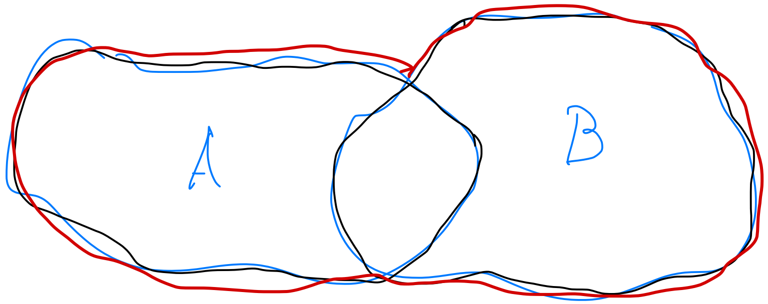


$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A,\ z=0\}$

Question 10 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

☐ VRAI ☒ FAUX



$\partial A \cup \partial B \neq \partial(A \cup B)$

la frontière

Question 11 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, $\lim_{r\to 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f\big(r\cos(\vartheta)\,,\, r\sin(\vartheta)\big) \leq h(r) \qquad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \vartheta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

☒ VRAI ☐ FAUX

$$\underbrace{g(r)}_{\substack{\downarrow\, r\to 0\\ 0}} \leq \underbrace{f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)}_{\substack{\downarrow\\ 0}} \leq \underbrace{h(r)}_{\substack{\downarrow\, r\to 0\\ 0}}$$

par les 2 gendarmes en coordonnées polaires. $\Rightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

Rappel : cours 9, p. 108 :

<u>Proposition.</u> Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$ définie au voisinage de $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \ell$ <u>si et seulement si</u>

$\exists\ \delta > 0$ et $\psi :]0,\delta[\to \mathbb{R}$: (1) $\forall \varphi \in [0,2\pi], \forall r \in]0,\delta[\Rightarrow |f(x_0 + r\cos\varphi, y_0 + r\sin\varphi) - \ell| \leq \psi(r)$.

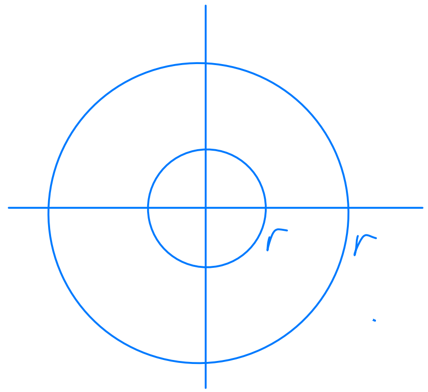
(2) $\lim_{r\to 0^+} \psi(r) = 0$

Question 11 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim_{r\to 0} g(r) = 0$, $\lim_{r\to 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f\big(r\cos(\vartheta)\,,\, r\sin(\vartheta)\big) \leq h(r) \qquad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \vartheta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX



$$g(r) \leq f(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta) \leq h(r) \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R},\ \forall r > 0$$

$$g\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \leq f(x,y) \leq h\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^2_*$$

$\downarrow$ 0 $\qquad$ $\downarrow$ $(x,y)\to(0,0)$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $\downarrow$ 0

$\sqrt{x^2+y^2} \to 0 \iff (x,y)\to(0,0)$

$\Rightarrow f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$

par 2 gendarmes

Question 12 : Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$.
Si $(x_0, y_0) \in U$ est tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, alors $f(x_0, y_0) = L$.

☐ VRAI ☒ FAUX

f n'est pas forcement continue.

Ex :

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Question 13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en $(0,0)$, telle que

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \nabla f(0,0) = \big(0,\, 0\big)\,.$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

■ VRAI ☐ FAUX

$$r(x,y) \overset{\text{déf}}{=} f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \langle \underbrace{\nabla f(0,0)}_{=0}\,,\,(x,y)\rangle = f(x,y)$$

$$f \text{ est dérivable } \overset{\text{déf}}{\iff} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0$$

$$\Big\Updownarrow$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\|(x,y)\|} = 0.$$