ANALYSE II

COURS 18

Point historique. James Joseph Sylvester 1814-1897 était un mathématicien anglais. À l'âge de 14 ans il est accusé d'avoir poignardé un camarade de classe. Plus tard, il invente le mot **matrice**.

🤔 **Rappel** (Formule de Taylor d'ordre 2 autour d'un point).
Soit un ouvert $E \subset \mathbb{R}^n$ contenant un point $\boldsymbol{a} \in E$ et $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^3(E)$.

Alors f s'écrit

$$f(\boldsymbol{x}) = P_2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) + \varepsilon\left(\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|^2\right),$$

avec le **polynôme de Taylor de f d'ordre 2 autour de (a, b)** tel que

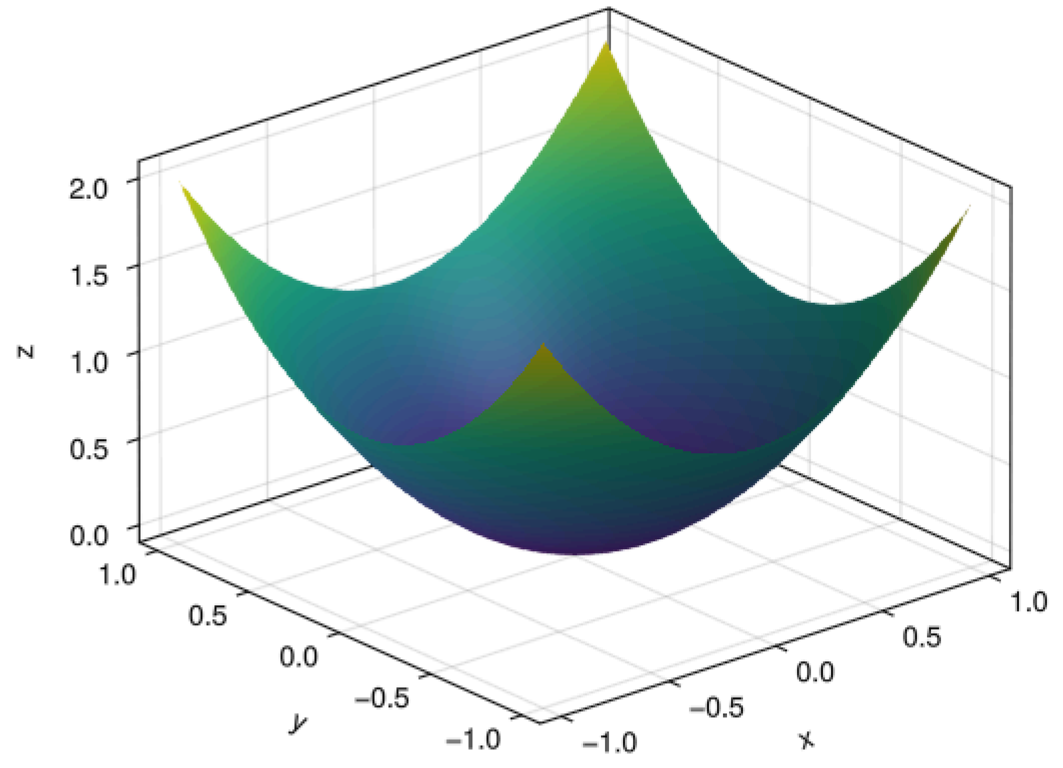
$$P_2 f_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{a}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a} \rangle + \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a})^\top \operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}).$$

§ 4.9 EXTREMA D'UNE FONCTION DE PLUSIEURS VARIABLES

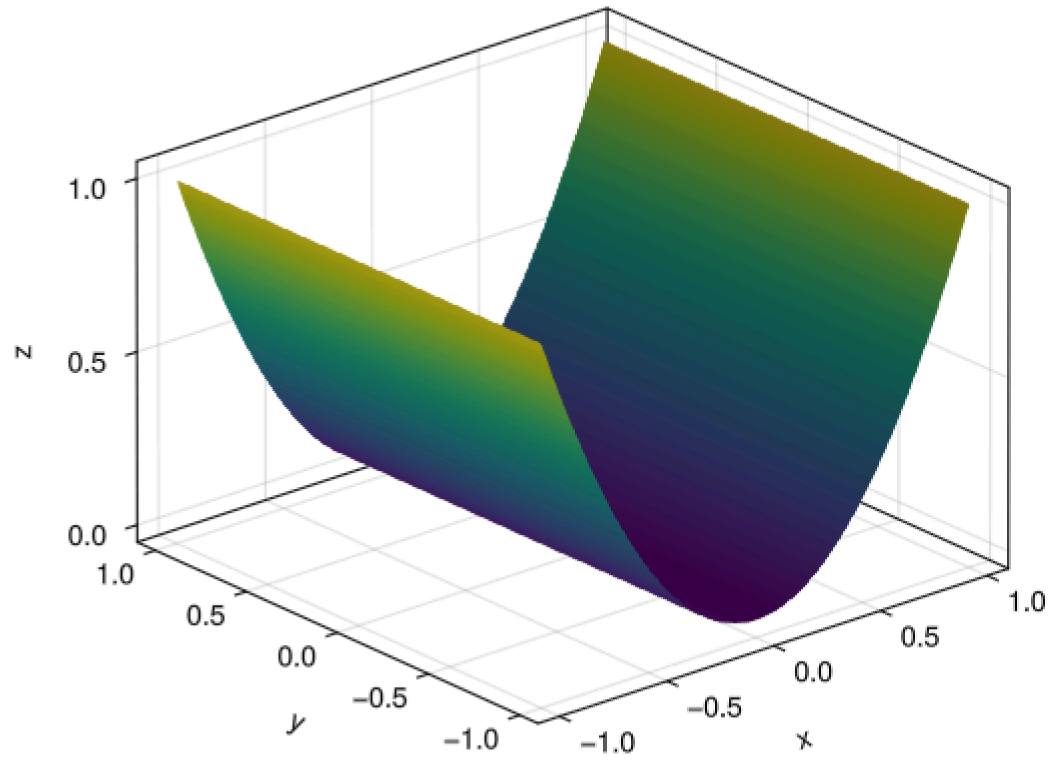
Définition (Point stationnaire)

Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ et $f : E \to \mathbb{R}$. Alors on appelle $\boldsymbol{a} \in E$ un point stationnaire si $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Exemple 1 (Point stationnaire unique).
Si $f(x, y) = x^2 + y^2$, alors $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ s'annule uniquement au point $(0, 0)$.



Exemple 2 (Plusieurs points stationnaires).
Si $f(x, y) = x^2$, alors $\nabla f(x, y) = (2x, 0)$ s'annule aux points $(0, b), \forall b \in \mathbb{R}$.



Définition (Extremum local).
La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ admet un maximum local (resp. minimum local) au point $\boldsymbol{a} \in E$ s'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $\boldsymbol{x} \in E \cap B(\boldsymbol{a}, \delta)$ on a $f(\boldsymbol{x}) \leq f(\boldsymbol{a})$ (resp. $f(\boldsymbol{x}) \geq f(\boldsymbol{a})$).

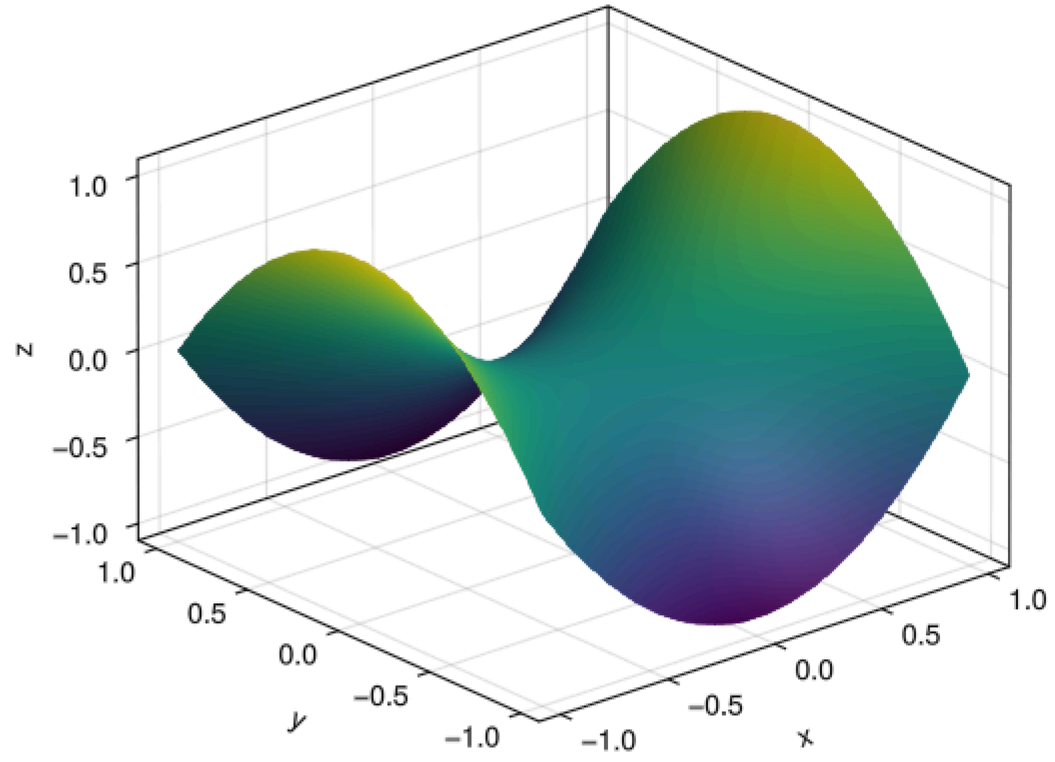
Proposition (Condition nécessaire pour un extremum local).
Si $\boldsymbol{a} \in E$ est un extremum local et $\nabla f(\boldsymbol{a})$ existe, alors $\boldsymbol{a}$ est un point stationnaire $(\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0})$.

Démonstration.
Soit $g_i(x) = f(a_1, \ldots, a_{i-1}, x, a_{i+1}, \ldots, a_n)$.
Par nos hypothèses, $g_i'(a_i)$ existe et $g_i(x)$ admet un extremum local en $x = a$, et donc $g_i'(a_i) = 0$.
Vu que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{a}) = g_i'(a_i) = 0$, et que l'argument s'applique pour tout $i = 1 \ldots, n$, on a $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

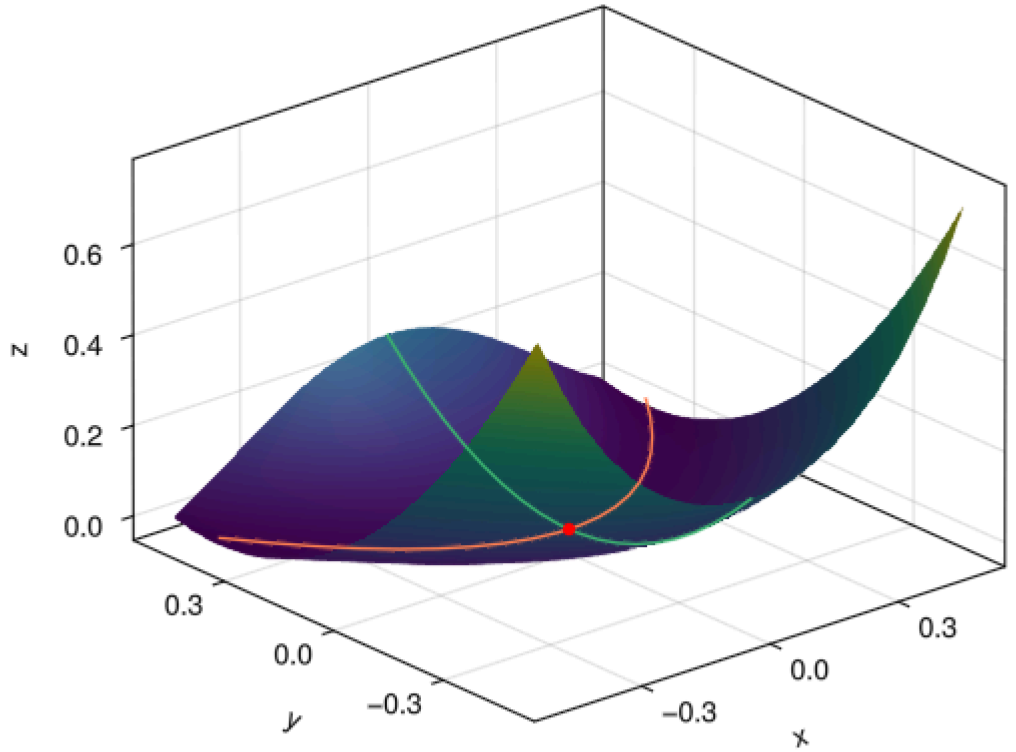
Remarque. Réciproque fausse. $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0} \;\not\Longrightarrow\; \boldsymbol{a}$ est un extremum local.

🐴 **Définition** (Point selle).
Un point stationnaire qui n'est pas un extremum local est un point selle de f.

Exemple 3 (Point selle).
Si $f(x, y) = x^2 - y^2$, alors $\nabla f(x, y) = (2x, -2y)$ s'annule au point $(0, 0)$, mais c'est pas un extremum local.



🔥 **Remarque.** Soit $c(t) = \boldsymbol{a} + t\boldsymbol{v}$ pour $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$. Si $h(t) = f(c(t))$ admet un minimum au point 0, cela n'implique pas que $\boldsymbol{a}$ est un minimum local de f.



Exemple 4 (Minimum par droites).
Étudions $f(x, y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$ autour de $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, selon la droite $c(t) = t(u, v)$.

$$h(t) = (tv - (tu)^2)(tv - 2(tu)^2) = t^2(v^2 + q(t)),$$
$$h'(t) = 2t(v^2 + q(t)) + t^2 q'(t),$$
$$h''(t) = 2v^2 + 2q(t) + 2tq'(t) + t^2 q''(t).$$

On a que $h'(0) = 0$ et $h''(0) \geq 0$ et donc 0 est un minimum local de h.

🔥 Cependent selon la courbe $\tilde{c}(t) = (t, \frac{3}{2}t^2)$ quand $t \neq 0$ on a des points proches de $(0, 0)$ mais tels que

$$f(\tilde{c}(t)) = \left(\frac{3}{2}t^2 - t^2\right)\left(\frac{3}{2}t^2 - 2t^2\right) = -\frac{1}{4}t^4 < f(0, 0).$$

Definition (Point critique).

$\boldsymbol{a} \in E$ est un point critique de $f : E \to \mathbb{R}$ si $\boldsymbol{a}$ est un point stationnaire $\left(\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}\right)$, ou bien au moins une des dérivées partielles de f n'existe pas en $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$.

Théorème (Condition suffisante pour un extremum local)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(E)$, $\boldsymbol{a} \in E$ un point stationnaire, et λ_i les valeurs propres de $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$.

- $\forall i, \lambda_i > 0 \implies$ $\boldsymbol{a}$ est un minimum local.
- $\forall i, \lambda_i < 0 \implies$ $\boldsymbol{a}$ est un maximum local.
- $\exists i, j$ tels que $\lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \implies$ $\boldsymbol{a}$ est un point selle.

Question. Quelle est votre intuition des valeurs propres?

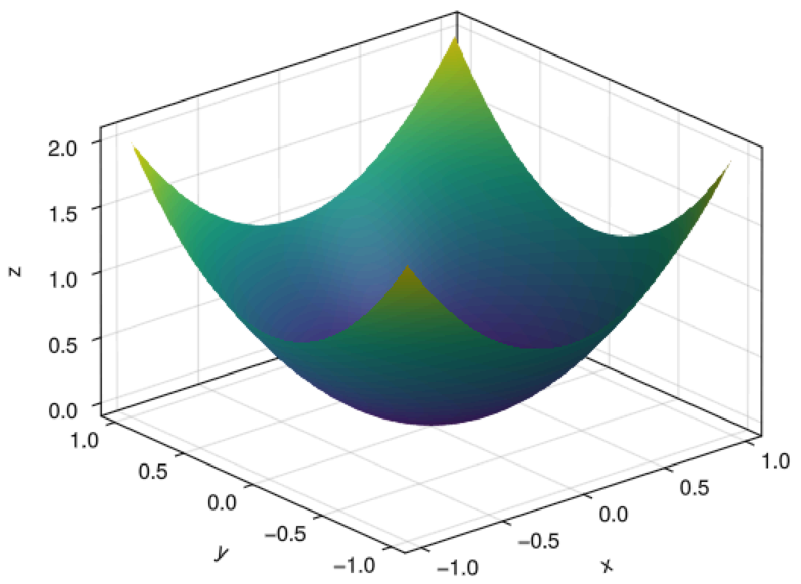
Résultat du théorème. Les Hessiennes peuvent nous dire si un point est un extremum local.

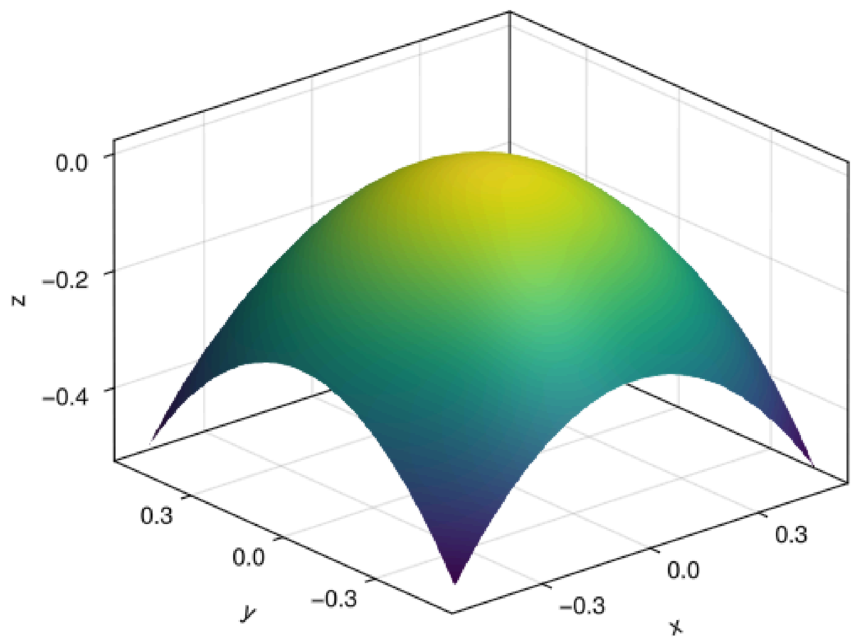
$$f(x,y) = x^2 + y^2 \qquad \operatorname{Hess} f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

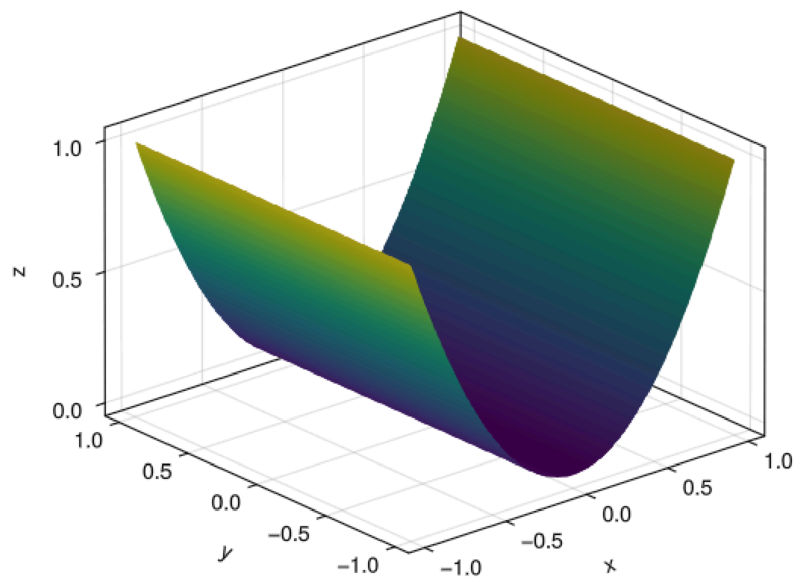
$$f(x,y) = -x^2 - y^2 \qquad \operatorname{Hess} f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

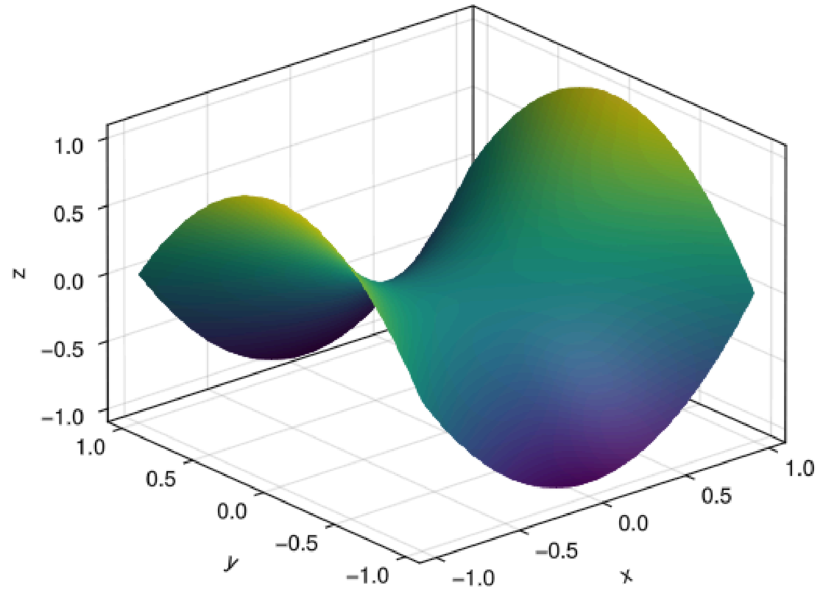
$$f(x,y) = x^2 \qquad \operatorname{Hess} f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(x,y) = x^2 - y^2 \qquad \operatorname{Hess} f(\mathbf{0}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$









📝 **Esquisse de démonstration** (Trouvez les imprécisions!)

Le théorème de Schwartz $\implies$ $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$ est symmétrique $\implies$ $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$ est diagonalisable.

On écrit $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a}) = ODO^\top$ avec O orthogonale et $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

De manière équivalente, on a $\operatorname{Hess} f \circ O^\top(\boldsymbol{a}) = D$, un changement de variables $\boldsymbol{y} = O^\top \boldsymbol{x}$.

Par la formule de Taylor de $f(\boldsymbol{y})$ dans un voisinage de $\boldsymbol{a}$, on peut écrire de manière approximative

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{y}) &= f(\boldsymbol{a}) + \langle \nabla f(\boldsymbol{a}), \boldsymbol{y} - \boldsymbol{a} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}(\boldsymbol{a})(y_i - a_i)^2 + \varepsilon\left(\|\boldsymbol{y} - \boldsymbol{a}\|^2\right) \\
&\approx f(\boldsymbol{a}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (y_i - a_i)^2
\end{aligned}
.
$$

Donc si $\lambda_i > 0$ on a $f(\boldsymbol{y}) \geq f(\boldsymbol{a}), \forall \boldsymbol{y}$ dans un voisinage de $\boldsymbol{a} \implies \boldsymbol{a}$ est un minimum local de f.

$\ldots$

🌱 **Théorème à connaître** (Conditions équivalentes sur $\operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a})$, cas $n = 2$)

La proposition suivante s'applique à toute matrice symétrique, donc on note $H := \operatorname{Hess} f(\boldsymbol{a}) = \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix}$.

1. $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0 \iff \det H > 0 \text{ et } r > 0$
2. $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0 \iff \det H > 0 \text{ et } r < 0$
3. $\operatorname{sgn}(\lambda_1) \neq \operatorname{sgn}(\lambda_2) \neq 0 \iff \det H < 0$

Démonstration

Le déterminant et la trace de H sont invariants par conjugaison. La diagonalisation $H = ODO^\top$ donne alors

$$\begin{aligned} rt - s^2 &= \det H = \det D = \lambda_1 \lambda_2 \\ r + t &= \operatorname{Tr} H = \operatorname{Tr} D = \lambda_1 + \lambda_2. \end{aligned}$$

Suite de la démonstration.

1. ($\Longrightarrow$) Supposons que $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0.$
   Immédiatement, on a que $\det H = \lambda_1\lambda_2 > 0.$
   Ensuite, $\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0$ donc $rt > s^2 \geq 0 \implies r$ et t sont de même signe.
   De plus, $\operatorname{Tr} H = \lambda_1 + \lambda_2 = r + t > 0.$
   On conclut que r doit être strictement positif.
   ($\Longleftarrow$) Supposons que $\det H > 0$ et $r > 0.$
   Alors $\det H = \lambda_1\lambda_2 > 0 \implies \lambda_1$ et λ_2 sont de même signe.
   Ensuite, $\lambda_1\lambda_2 = rt - s^2 > 0$ donc $rt > s^2 \geq 0$
   Mais $r > 0$ donc $t > 0$ aussi $\implies \operatorname{Tr} H = r + t = \lambda_1 + \lambda_2 > 0.$
   On conclut que $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0.$
2. 👹 **En exercice** 👹
3. $\det H < 0 \iff \lambda_1\lambda_2 < 0 \iff \lambda_1$ et λ_2 sont de signes opposés.

🔪 **Théorème** (Critère de Sylvester)

Conditions équivalentes aux conditions suffisantes dans le cas $n = 3$.

Soit $f \in C^2(E)$ au voisinage de $\boldsymbol{a}$, tel que $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$.

Soient

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= \det \mathrm{Hess}_x\, f(\boldsymbol{a}) \\
\Delta_2 &= \det \mathrm{Hess}_{x,y}\, f(\boldsymbol{a}) \\
\Delta_3 &= \det \mathrm{Hess}_{x,y,z}\, f(\boldsymbol{a})
\end{aligned}$$

$$\mathrm{Hess}_f(\bar{a}) = \begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

Alors

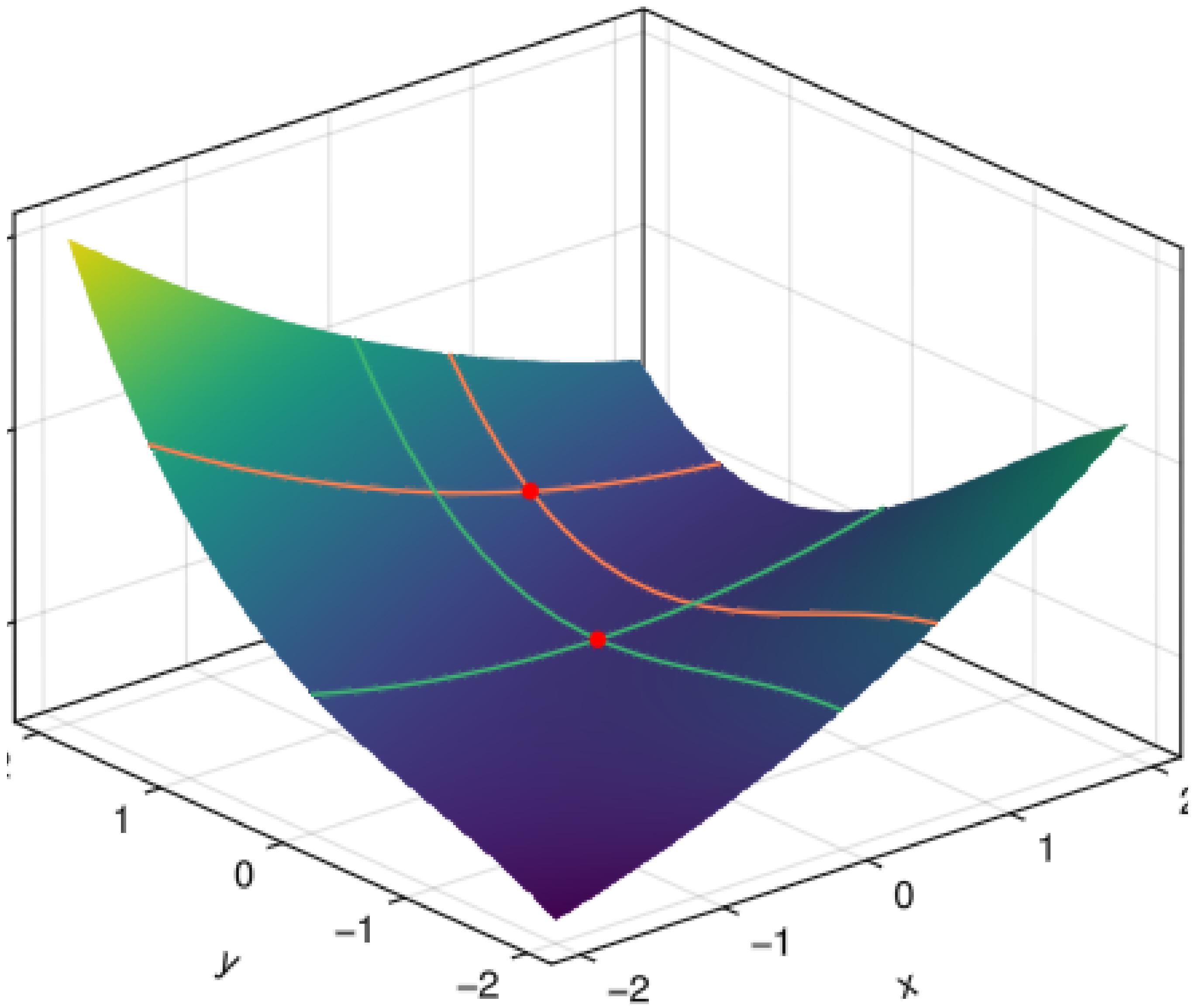
1. $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 > 0 \iff \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \lambda_3 > 0 \iff$ $\boldsymbol{a}$ est un minimum local de f,
2. $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0 \iff \lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \lambda_3 < 0 \iff$ $\boldsymbol{a}$ est un maximum local de f,
3. Autrement $\Delta_3 \neq 0 \implies \exists \lambda_i > 0$ et $\lambda_j < 0 \implies$ $\boldsymbol{a}$ est un point selle de f.

💪 **Exercice** (Trouver les points critiques, déterminer leur nature)

Soit $f(x,y) = y^3 + 3y^2 - 4xy + x^2$. Alors $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ donc tout point critique est stationnaire.

On calcule $\nabla f(x,y) = (-4y + 2x, 3y^2 + 6y - 4x)$ et $\mathrm{Hess}\, f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6y+6 \end{pmatrix}$.

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x = 4y \\ 3y^2 + 6y = 4x \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2y \\ y(3y-2) = 0 \end{cases}$$



On étudie les points stationnaires $(x,y) \in \{(0,0), (4/3, 2/3)\}$.

$$\mathrm{Hess}\, f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 6 \end{pmatrix} \implies \text{dét. } -4 < 0$$

$\implies$ **Point selle** en $(0,0)$.

$$\mathrm{Hess}\, f(4/3, 2/3) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} \implies \text{dét. } 4 > 0$$

$\implies$ **Minimum local** en $(4/3, 2/3)$.