

Rappel: $\mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^q$; $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$
 $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in \mathbb{R}^p$

Alors $\bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ et

$$J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})$$

matrices de Jacobi

produit matriciel.

Si $J_{\bar{g}}(\bar{a})$ est carré et inversible $\Rightarrow J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) = J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) \cdot (J_{\bar{g}}(\bar{a}))^{-1}$.

Rappel:

Déf

$$\underbrace{J_{\bar{f}}(\bar{a})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{dét}}{=}$$

$$J_{\bar{f}}(\bar{a}) = D_{\bar{f}}(\bar{a})$$

notation [DZ]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \nabla f_2(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

$\nabla f_1(\bar{a})$

$\nabla \bar{f}(\bar{a})$

Application: Changement de variables

$$\mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{h}} \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^n$$

Id

Si $\bar{h}$ est un changement de variables, et $\bar{g}$ sa fonction réciproque, alors

$$\bar{g} \circ \bar{h}(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n)$$

$$\Rightarrow J_{\bar{g} \circ \bar{h}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = Id_{n \times n}$$

Supposons que $\bar{h}$ et $\bar{g}$ sont dérivable sur leur domaines

$$\Rightarrow \text{Par le Thm d'une fonction composée} \Rightarrow J_{\bar{g}}(\bar{h}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{h}}(\bar{a}) = J_{\bar{g} \circ \bar{h}}(\bar{a}) = Id_{n \times n}$$

$$\Rightarrow J_{\bar{g}}(\bar{h}(\bar{a})) = (J_{\bar{h}}(\bar{a}))^{-1} \text{ et on a: } (\det J_{\bar{g}}) \cdot (\det J_{\bar{h}}) = 1$$

Remarque. Soit $\bar{g}$ continûment dérivable, $\bar{g}: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow D \subset \mathbb{R}^n$

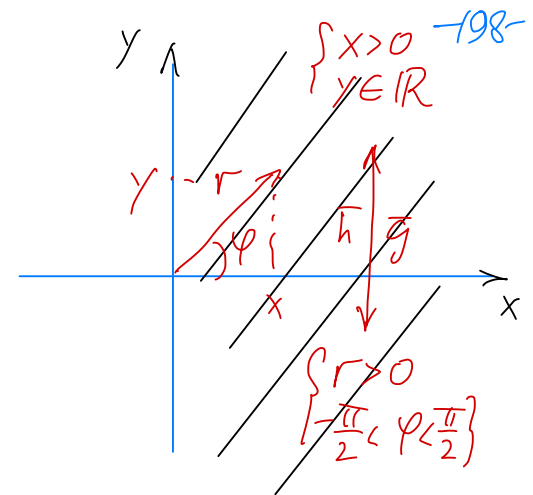
Alors $\bar{g}$ possède une fonction réciproque continûment dérivable

$$\text{dans un voisinage de } \bar{a} \in E \iff \det J_{\bar{g}}(\bar{a}) \neq 0$$

Cas important. Changement de variable en coordonnées polaires.

$$\bar{h}(x, y) = (r, \varphi) \quad ; \quad \bar{g}(r, \varphi) = (x, y)$$

$$\bar{g}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \quad h(x, y) = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2} \\ \arctan \frac{y}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+^* \times]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$(\bar{h} \circ \bar{g})(r, \varphi) = (r, \varphi) \Rightarrow J_{\bar{h} \circ \bar{g}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = J_{\bar{h}}(\bar{g}(r, \varphi)) \cdot J_{\bar{g}}(r, \varphi)$$

$$J_{\bar{g}}(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\bar{h}} = (J_{\bar{g}})^{-1} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & r \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}$$

$$\det \bar{g} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad ; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\Rightarrow J_{\bar{h}}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix} \quad \text{Exercice: } \begin{pmatrix} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{2y}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \\ \frac{-\frac{y}{x^2}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} & \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \end{pmatrix}$$

calculer directement

$$\text{ou } h(x, y) = (r, \varphi)^T = \left(\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x} \right)^T$$

Application: le gradient $\nabla f(x,y)$ en coordonnées polaires.

-199-

Proposition. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Soit $\tilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$ ← changement de variables polaires
Alors $\nabla f(x,y) = \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right)$ - le gradient

Explication: $\tilde{f}(r, \varphi) = f \circ g(r, \varphi)$; $g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \Rightarrow J_g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$

$$J_{f \circ g}(r, \varphi) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) = J_f(x,y) \cdot J_g(r, \varphi) = \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right)}_{g'_1(r, \varphi) \quad g'_2(r, \varphi)} \cdot J_g(r, \varphi)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla f(x,y) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \cdot (J_g(r, \varphi))^{-1} = \left(\frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} \quad \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix} = \\ &= \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \quad \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) \end{aligned}$$

$$\nabla f(x,y) = \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi}, \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\cos \varphi}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right)$$

Application: dérivée seconde avec un changement de variable.

-200-

Exemple: Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Trouver $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ exprimée en coordonnées polaires.

Soit $\tilde{f} = f \circ g(r, \varphi)$, où $g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\widetilde{\frac{\partial f}{\partial x}} \right) = \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} - \frac{\cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{1}{r} \sin^2 \varphi \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} - \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi \partial r} + \\ &+ \frac{\sin \varphi \cos \varphi}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \cos^2 \varphi \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r^2} + \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial \varphi} - \frac{2 \cos \varphi \sin \varphi}{r} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial r \partial \varphi} + \frac{\sin^2 \varphi}{r} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial r} + \frac{\sin^2 \varphi}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

§ 4.7. Dérivée d'une intégrale qui dépend d'un paramètre.

Thm. Soit $f: [a, b] \times \underset{\text{ouvert}}{I}^{\subset \mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur $[a, b] \times \overset{x}{I}^{\overset{y}{}}$.

Alors $g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ est de classe C^1 sur I et on a:

$$g'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \quad \text{pour tout } y \in I.$$

Dém:

$$\frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{y - y_0} \int_a^b (f(x, y) - f(x, y_0)) dx = \frac{1}{\cancel{y - y_0}} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}) (\cancel{y - y_0}) dx =$$

$\tilde{y}$ est entre y et y_0 .

$$= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, \tilde{y}) dx \xrightarrow[\Rightarrow \tilde{y} \rightarrow y_0]{\substack{\frac{\partial f}{\partial y} \text{ continue} \\ y \rightarrow y_0}} \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y_0) dx = g'(y_0).$$

Thm des accroissements finis par rapport à y .

Ex 1. $f: [0, 1] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x, y) = e^{xy^2} ; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2yx e^{xy^2}$ continue sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow g(y) = \int_0^1 f(x, y) dx = \int_0^1 e^{xy^2} dx. \quad \text{Trouver } g'(y).$$

Thm

$$g'(y) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} (e^{xy^2}) dx = \int_0^1 2xy e^{xy^2} dx = \int_0^1 \frac{2xy}{y^2} d(e^{xy^2}) = \frac{2}{y} \int_0^1 x d(e^{xy^2}) =$$

$y \neq 0$

$$= \frac{2x}{y} e^{xy^2} \Big|_0^1 - \frac{2}{y} \int_0^1 e^{xy^2} dx = \frac{2}{y} e^{y^2} - \frac{2}{y} \cdot \frac{1}{y^2} e^{xy^2} \Big|_0^1 = \frac{2}{y} e^{y^2} - \frac{2}{y^3} (e^{y^2} - 1) = g'(y), y \neq 0.$$

$$\text{Directement: } g(y) = \int_0^1 e^{xy^2} dx \stackrel{y \neq 0}{=} \frac{1}{y^2} e^{xy^2} \Big|_0^1 = \underbrace{\frac{1}{y^2} (e^{y^2} - 1)}_{g(y), y \neq 0} \Rightarrow g'(y) = -\frac{2}{y^3} (e^{y^2} - 1) + \frac{1}{y^2} \cdot 2y e^{y^2}$$

Exercice: $y=0$.

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow g(0) = \int_0^1 e^{x \cdot 0} dx = 1$$

$$(1) g(y) \text{ est continue en } y=0 \quad \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{y^2} (e^{y^2} - 1) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 = g(0).$$

$$(2) g'(0) : \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{y^2} (e^{y^2} - 1) - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^{y^2} - 1 - y^2}{y^3} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cancel{1+y^2} + \frac{1}{2}y^4 + \mathcal{E}(y^4) - \cancel{1+y^2}}{y^3} = 0 = g'(0)$$

$$(3) \lim_{y \rightarrow 0} g'(y) = g'(0) \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{y^3} (e^{y^2} - 1) + \frac{2}{y} e^{y^2} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-2(\cancel{1+y^2} + \frac{1}{2}y^4 + \mathcal{E}(y^4)) + 2y^2(\cancel{1+y^2} + \frac{1}{2}y^4 + \mathcal{E}(y^4))}{y^3} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y^4 + 2y^4 + \mathcal{E}(y^4)}{y^3} = 0 \Rightarrow g(y) \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Rappel: Analyse I Thm fondamental du calcul intégral:

$$\frac{d}{dt} \left(\int_a^t f(y) dy \right) = f(t) \quad , \quad \frac{d}{dt} \left(\int_t^b f(y) dy \right) = \frac{d}{dt} \left(- \int_b^t f(y) dy \right) = -f(t).$$

f continue

On peut combiner les résultats:

Thm. Soient $g, h: I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$ fonctions continûment dérivables, et $f: \overset{x}{\underset{\substack{\uparrow \text{ouverts}}}{J}} \times \overset{t}{I} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\frac{\partial f}{\partial t}$ est continue sur I .

Alors $F(t) = \int_{h(t)}^{g(t)} f(x, t) dx$ est continûment dérivable sur I , et on a:

$$F'(t) = f(g(t), t) \cdot g'(t) - f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

Dém: Soit $(g, h, t): \underset{t}{\mathbb{R}} \rightarrow \underset{(g, h, t)}{\mathbb{R}^3}$

$S: \underset{(g, h, t)}{\mathbb{R}^3} \rightarrow \underset{f}{\mathbb{R}} \quad S(g, h, t) = \int_h^g f(x, t) dx$

Alors $\mathbb{R} \xrightarrow{(g, h, t)} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{S} \mathbb{R}$ $S \circ (g, h, t)$ est une fonction composée. = $F(t)$

Alors par le Thm de la dérivée d'une fonction composée on a :

-204-

$$J_{S \circ (g,h,t)} = J_S(g,h,t) \cdot J_{(g,h,t)} = \nabla S(g,h,t) \cdot \begin{pmatrix} g'(t) \\ h'(t) \\ 1 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{\partial S}{\partial g} g'(t) + \frac{\partial S}{\partial h} h'(t) + \frac{\partial S}{\partial t} \cdot 1 = f(g(t), t) \cdot g'(t) - f(h(t), t) \cdot h'(t) + \int_{h(t)}^{g(t)} \frac{\partial f(x,t)}{\partial t} dx. \quad \square$$

Thm de la dérivée d'un intégrale par paramètre.

Ex 2. $\int_{t^2+1}^{t^3-1} \sin(t+x) dx = F(t) ; F'(t) = ?$

$$F'(t) = \sin(t+t^3-1) \cdot (3t^2) - \sin(t^2+t+1) \cdot 2t + \int_{t^2+1}^{t^3-1} \cos(t+x) dx =$$
$$= 3t^2 \sin(t^3+t-1) - 2t \sin(t^2+t+1) + \sin(t+x) \Big|_{t^2+1}^{t^3-1} =$$
$$= (3t^2) \sin(t^3+t-1) - 2t \sin(t^2+t+1) + \sin(t^3+t-1) - \sin(t^2+t+1) =$$
$$= (3t^2+1) \sin(t^3+t-1) - (2t+1) \sin(t^2+t+1).$$

Exercice: calculer $F'(t)$ directement.

Question 14

Soit $F:]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $t \neq 0$

-205-

$$F(t) = \int_{3t}^{t^2} \frac{\ln(1+\sin(tx))}{x} dx \quad \text{Alors}$$

A. $F'(1) = 2\ln(1+\sin 1) - 3\ln(1+\sin 3)$

B. $F'(1) = 2\ln(1+\sin 1) - \ln(1+\sin 3)$

☒ C. $F'(1) = 3\ln(1+\sin 1) - 2\ln(1+\sin 3)$

D. $F'(1) = \ln(1+\sin 1)$

$$F(t) = \int_{3t}^{t^2} \frac{\ln(1+\sin(tx))}{x} dx \quad t \neq 0$$

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{\ln(1+\sin(t^3))}{t^2} \cdot 2t - \frac{\ln(1+\sin(3t^2))}{3t} \cdot 3 + \int_{3t}^{t^2} \left(\frac{1}{x} \right) \frac{x \cos(tx)}{1+\sin(tx)} dx = \\ &= \frac{2}{t} \ln(1+\sin(t^3)) - \frac{1}{t} \ln(1+\sin(3t^2)) + \frac{1}{t} \int_{3t}^{t^2} \frac{d \sin(tx)}{1+\sin(tx)} = \frac{2}{t} \ln(1+\sin(t^3)) - \frac{1}{t} \ln(1+\sin(3t^2)) + \\ &+ \frac{1}{t} \ln(1+\sin(tx)) \Big|_{3t}^{t^2} = \frac{2}{t} \ln(1+\sin(t^3)) - \frac{1}{t} \ln(1+\sin(3t^2)) + \frac{1}{t} \ln(1+\sin(t^3)) - \frac{1}{t} \ln(1+\sin(3t)) = \\ &= \frac{3}{t} \ln(1+\sin(t^3)) - \frac{2}{t} \ln(1+\sin(3t)) \Big|_{t=1} = 3 \ln(1+\sin 1) - 2 \ln(1+\sin 3). \end{aligned}$$

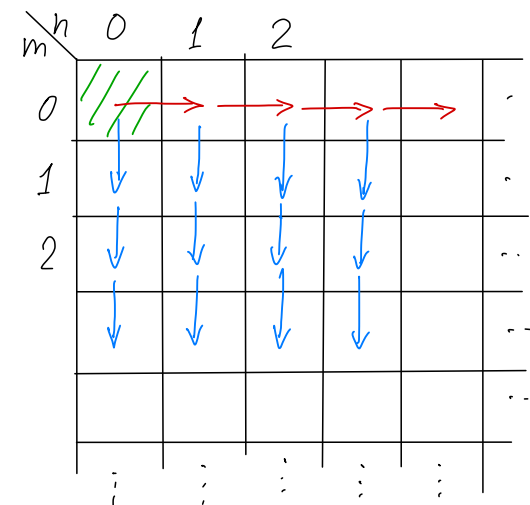
$\Rightarrow \textcircled{C}$

Méthodes de démonstration

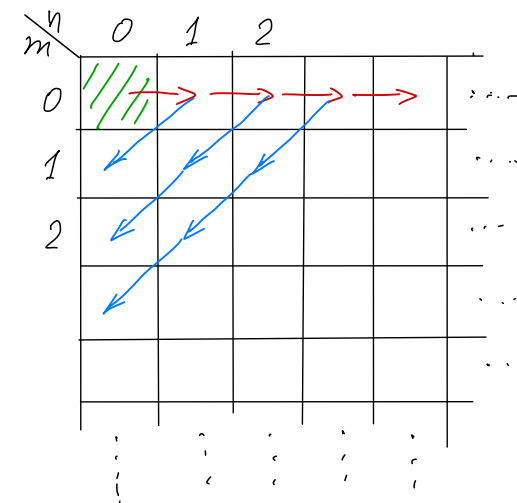
Récurrance sur deux variables

Soit $P(n,m)$ une proposition, $n,m \geq 0$.

- 1 Méthode carré
- (1) $P(0,0)$ est vraie
 - (2) $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0) \quad \forall n \geq 0$
 - (3) $\forall m,n \quad P(n,m) \Rightarrow P(n,m+1)$
- $\Rightarrow$ Alors $P(n,m)$ est vraie $\forall n,m \in \mathbb{N}$



- 2 Méthode diagonale
- (1) $P(0,0)$ est vraie
 - (2) $P(n,0) \Rightarrow P(n+1,0) \quad \forall n \geq 0$
 - (3) $\forall m,n \quad P(n+1,m) \Rightarrow P(n,m+1)$
- $\Rightarrow$ Alors $P(n,m)$ est vraie $\forall n,m \in \mathbb{N}$



$$(3) \quad P(1,0) \Rightarrow P(0,1)$$

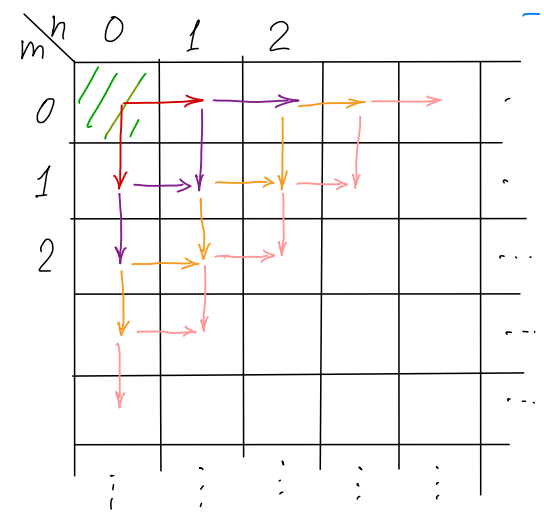
$$P(2,0) \Rightarrow P(1,1) \Rightarrow P(0,2)$$

3 Méthode de deux directions

- (1) $P(0,0)$ est vraie
 (2) $\forall n,m \quad \begin{cases} P(n,m) \Rightarrow P(n,m+1) \\ P(n,m) \Rightarrow P(n+1,m) \end{cases}$

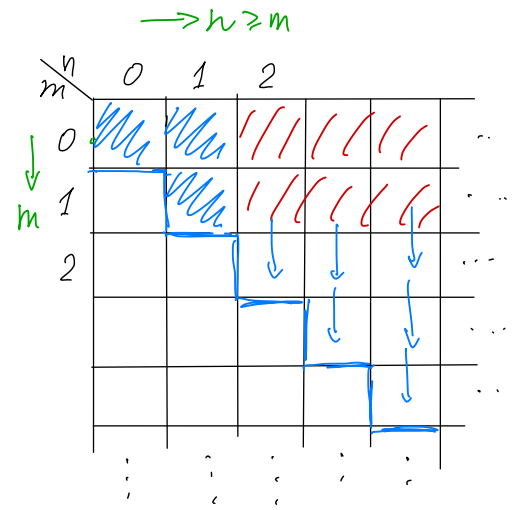
$\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Alors $P(n,m)$ est vraie $\forall n,m \in \mathbb{N}$



Exemple. Nombres de Fibonacci: $f_0=0, f_1=1, f_{n+2} \stackrel{\text{Fib}}{=} f_n + f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

Proposition. $f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m} \quad \forall n,m : n \geq m \geq 0$



Dém: (0) $P(n,m)$ est la proposition $\forall n,m : n \geq m \geq 0$

(1) Base: $P(0,0): f_0 f_1 - f_0 f_1 = (-1)^0 f_0 = 0$ Vrai

$P(1,0): f_1 f_1 - f_0 f_2 = (-1)^0 f_1 \Leftrightarrow 1 - 0 = 1$ Vrai

$P(1,1): f_1 f_2 - f_1 f_2 = (-1)^1 f_0 \Leftrightarrow 1 - 1 = 0$ Vrai

~~$P(0,1)$~~ puisque $n \geq m$.

Méthode carré. (En fait on n'a pas besoin de la base ici puisqu'on pourra démontrer $P(n,0)$ et $P(n,1)$ directement sans récurrence):

(2) Hérité en n : $P(n,0)$ est vraie $\forall n \geq 0$, $P(n,1)$ est vraie $\forall n \geq 1$

$$P(n,0): f_n \underline{f_1} - \underline{f_0} f_{n+1} = f_n \stackrel{?}{=} (-1)^0 f_n \quad \text{Vrai sans récurrence}$$

$$P(n,1): f_n \underline{f_2} - \underline{f_1} f_{n+1} \stackrel{?}{=} (-1)^1 f_{n-1} \Leftrightarrow f_n - f_{n+1} = -f_{n-1} \Leftrightarrow f_{n+1} \stackrel{\text{Fib}}{=} f_n + f_{n-1} \quad \text{Vrai} \quad \forall n \geq 1$$

Hérité en m : Soit n fixé. Alors $P(n,m)$ et $P(n,m+1) \Rightarrow P(n,m+2) \quad \forall m \leq n-2$

$$P(n,m): f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1} = (-1)^m f_{n-m}; \quad P(n,m+1): f_n f_{m+2} - f_{m+1} f_{n+1} = (-1)^{m+1} f_{n-m-1}$$

$$\begin{aligned} P(n,m+2): f_n f_{m+3} - f_{m+2} f_{n+1} &\stackrel{\text{Fib}}{=} f_n (f_{m+1} + f_{m+2}) - (f_m + f_{m+1}) f_{n+1} = \\ &= \underbrace{f_n f_{m+1} - f_m f_{n+1}}_{P(n,m) \stackrel{?}{=} (-1)^m f_{n-m}} + \underbrace{f_n f_{m+2} - f_{m+1} f_{n+1}}_{P(n,m+1) \stackrel{?}{=} (-1)^{m+1} f_{n-m-1}} = (-1)^m (f_{n-m} - f_{n-m-1}) = \\ &\quad \underbrace{f_{n-m} - f_{n-m-1}}_{\text{Fib} \stackrel{?}{=} f_{n-m-2}} = \\ &= (-1)^{m+2} f_{n-m-2} \Rightarrow P(n,m+2) \end{aligned}$$

(3) Conclusion: $P(n,0)$ est vraie $\forall n \geq 0$, $P(n,1)$ est vraie $\forall n \geq 1$, et pour tout $n \geq m+2$ $P(n,m)$ et $P(n,m+1)$ impliquent $P(n,m+2)$. Alors par récurrence $P(n,m)$ est vraie $\forall n \geq m$. 