

§4.5 Fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$. La matrice jacobienne.

-182-

Déf. Plus généralement, on peut considérer des fonctions $\bar{f} : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

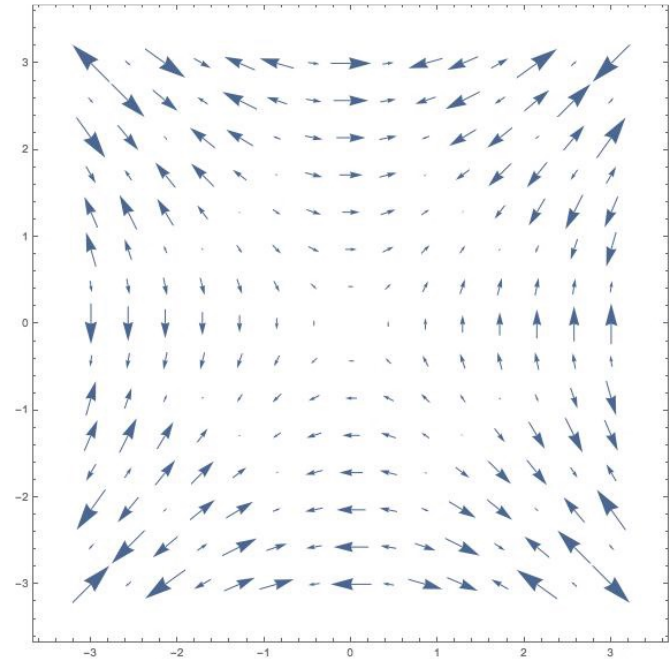
$\nwarrow m$ composantes

Chaque composante f_i est une fonction réelle de n variables réelles.

Exemple. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = \ln(xy)$

$$\Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right)$$

$(\nabla f(x,y))^T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ champs vectoriel



$$(\nabla f(\bar{x}))^T$$

Déf La k -ième dérivée partielle de $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ $\bar{a} \in E$
 est $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x_k}(\bar{a}) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_k} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_k} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_k} \end{pmatrix}$ si chacune des fonctions $f_1, \dots, f_m$ admet
 la dérivée partielle $\frac{\partial}{\partial x_k}$ en $\bar{a}$.

par
composante

Déf. Soit $\bar{v} \neq 0$. La dérivée directionnelle de $f: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ suivant $\bar{v}$ en $\bar{a} \in E$
 est $\underbrace{D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ Df_2(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix}$ si $Df_i(\bar{a}, \bar{v})$ existent pour tout $i=1, \dots, m$

Déf $\bar{f}: E \rightarrow \mathbb{R}^m$ admet $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$ pour limite lorsque $\bar{x} \rightarrow \bar{a}$ si $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$
 tel que $0 < \|\bar{x} - \bar{a}\|_{\mathbb{R}^n} \leq \delta \Rightarrow \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \varepsilon$
 $\bar{x} \in E$

En particulier $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_1(\bar{x}) \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_2(\bar{x}) \\ \vdots \\ \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f_m(\bar{x}) \end{pmatrix}$

puisque $\underbrace{\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\|_{\mathbb{R}^m}^2}_{\text{petit}} =$
 $\underbrace{(f_1(\bar{x}) - \ell_1)^2}_{\text{petits}} + \dots + \underbrace{(f_m(\bar{x}) - \ell_m)^2}_{\text{petits}}$

Déf $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable au point $\bar{a} \in E$ s'il existe une transformation linéaire $\bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et une fonction $\bar{r} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ telles que

$$\bar{f}(\bar{x}) = \underbrace{\bar{f}(\bar{a}) + \bar{L}_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a})}_{\in \mathbb{R}^m} + \bar{r}(\bar{x}) \quad \text{et} \quad \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{\bar{r}(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$$

Alors $\bar{L}_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ est appelée la différentielle de $\bar{f}$ en $\bar{a}$.

Proposition $\bar{f} = (f_1, \dots, f_m) : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dérivable en $\bar{a} \in E$ si et seulement si chaque composante $f_i : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable en $\bar{a} \in E \quad \forall i = 1, \dots, m$.

$$\bar{L}_{\bar{a}}(\bar{v}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{v}) \\ L_{2,\bar{a}}(\bar{v}) \\ \vdots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{v}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$
 où $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, $L_{i,\bar{a}}(\bar{v})$ est la différentielle de f_i calculée en $\bar{a}$ et appliquée à $\bar{v}$.

$$L_{i,\bar{a}}(\bar{v}) = Df_i(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f_i(\bar{a}), \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}$$

puisque la limite se calcule par composante

La matrice Jacobienne.

Déf Si $\bar{f} : E \rightarrow \mathbb{R}^m$ possède toutes les dérivées partielles en $\bar{a} \in E$, alors sa matrice jacobienne (matrice de Jacobi) est définie comme suit:

$$\underbrace{J_{\bar{f}}(\bar{a})}_{\text{notation}} \stackrel{\text{d\'ef}}{=} \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

$$J_{\bar{f}}(\bar{a}) = D_{\bar{f}}(\bar{a})$$

notation [DZ]

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \nabla f_2(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}$$

$\nwarrow \frac{\partial \bar{f}}{\partial x_1}(\bar{a})$
 $\nwarrow \nabla f_1(\bar{a})$

Remarques (1) Si $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{a} \in E$, alors $J_{\bar{f}}(\bar{a}) = \begin{pmatrix} L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_1) & L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_2) & \dots & L_{1,\bar{a}}(\bar{e}_n) \\ L_{2,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots \\ L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_1) & \dots & \dots & L_{m,\bar{a}}(\bar{e}_n) \end{pmatrix}$

puisque $\nabla f_i(\bar{a}) = (L_{i,\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{i,\bar{a}}(\bar{e}_n)) \quad \forall i \Rightarrow$

La matrice Jacobienne = la matrice de la différentielle de $\bar{f}$ en base $(\bar{e}_1 \dots \bar{e}_n)$
(si $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{a}$).

(2) Si $\bar{f}$ est dérivable, alors $D\bar{f}(\bar{a}, \bar{v}) = \begin{pmatrix} Df_1(\bar{a}, \bar{v}) \\ \vdots \\ Df_m(\bar{a}, \bar{v}) \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} \langle \nabla f_1(\bar{a}), \bar{v} \rangle \\ \langle \nabla f_2(\bar{a}), \bar{v} \rangle \\ \vdots \\ \langle \nabla f_m(\bar{a}), \bar{v} \rangle \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \nabla f_1(\bar{a}) \\ \vdots \\ \nabla f_m(\bar{a}) \end{pmatrix}}_m \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}_n = \left(J_{\bar{f}}(\bar{a}) \right) \cdot \bar{v}$$

Déf. Lorsque $m=n$, on définit le déterminant de Jacobi (le Jacobien) de $\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$ en $\bar{a}$:

$$|J_{\bar{f}}(\bar{a})| = \det J_{\bar{f}}(\bar{a}) \stackrel{\text{dét}}{=} \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\bar{a}) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(\bar{a}) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(\bar{a}) \end{pmatrix} = \frac{D(f_1, \dots, f_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}(\bar{a})$$

notations

notation dans [DZ]

Ex 1. Soit $g(x,y) = (\nabla f(x,y))^T$ où $f(x,y) = e^{x^2y} \Rightarrow \bar{g}(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy e^{x^2y} \\ x^2 e^{x^2y} \end{pmatrix} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ -187-

Alors la matrice jacobienne de g en (x,y) est

$$J_{\bar{g}}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2y + 4x^2y^2)e^{x^2y} & (2x + 2x^3y)e^{x^2y} \\ (2x + 2x^3y)e^{x^2y} & x^4 e^{x^2y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \text{Hess}_f(x,y)$$

Exercice: Calculer le Jacobien dans Ex. 1.

$$\begin{aligned} |J_{\bar{g}}(x,y)| &= (2yx^4 + 4x^6y^2)e^{2x^2y} - (4x^2 + 8x^4y + 4x^6y^2)e^{2x^2y} = \\ &= (-6x^4y - 4x^2)e^{2x^2y} \end{aligned}$$

Remarque. D'après la définition on a pour toute fonction $f: E \xrightarrow{C^1} \mathbb{R}^n$ de classe C^2 sur E

$$J_{(\nabla f)^T}(\bar{x}) = \text{Hess}(f)(\bar{x})$$

§4.6. Application des matrices jacobiniennes : dérivée d'une fonction composée.

Thm. Soit $\bar{g} : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$, $g(A) \subset B \subset \mathbb{R}^p$; $\bar{f} : B \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$

$$\bar{f} \circ \bar{g} : \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^q$$

Supposons que $\bar{a} \in A$, $\bar{b} = g(\bar{a}) \in B$; Soit $\bar{g}$ dérivable en $\bar{a}$ avec la différentielle $L_{\bar{a}} \bar{g}$, $\bar{f}$ est dérivable en $\bar{b}$ avec la différentielle $L_{\bar{b}} \bar{f}$

Alors $\bar{f} \circ \bar{g} = \bar{f}(\bar{g}(\cdot))$ est dérivable en $\bar{a}$ et on a :

$$(1) \quad \overline{L}_{\bar{a}}(\bar{f} \circ \bar{g}) = \overline{L}_{\bar{b}} \bar{f} \circ \overline{L}_{\bar{a}} \bar{g}$$

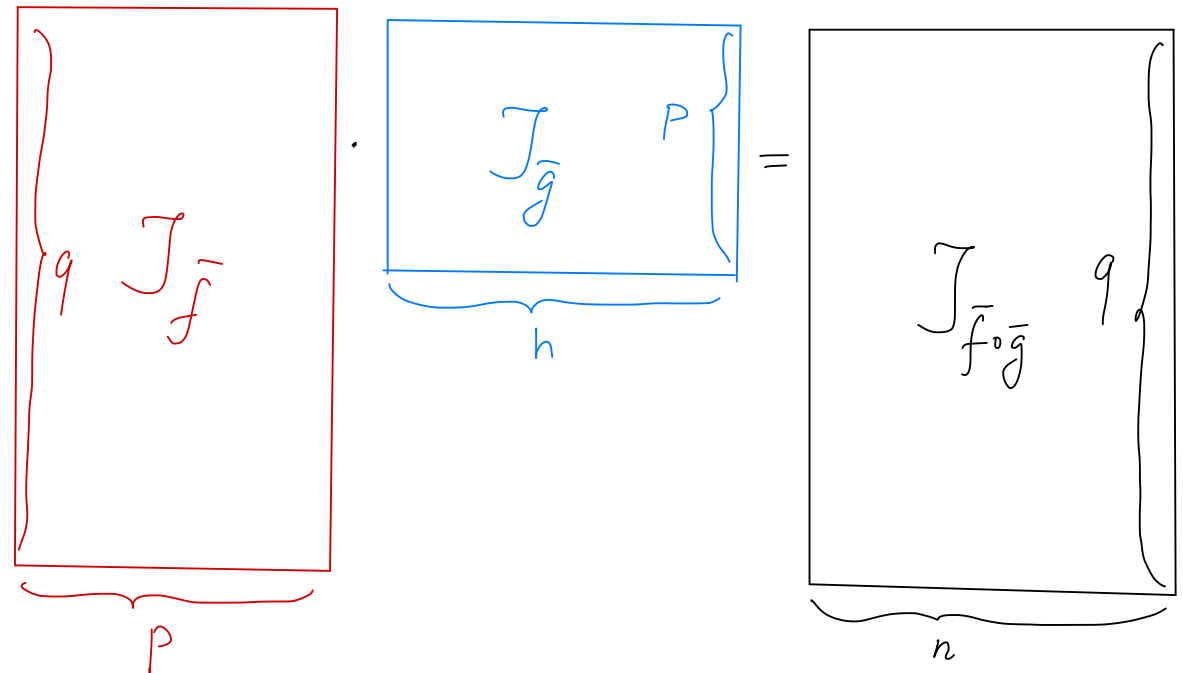
$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow \\ \text{comp. des fonctions} & \text{comp. des transformations} \\ & \text{linéaires} \end{matrix}$

$$(2) \quad J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})$$

$\begin{matrix} \nearrow & \nearrow & \nearrow \\ \text{matrice } q \times n & q \times p & \text{produit matriciel} & p \times n \end{matrix}$

$$(3) \quad \text{Si } n=p=q$$

$$|J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a})| = |J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a}))| \cdot |J_{\bar{g}}(\bar{a})|$$



Idee: $\bar{f}(\bar{g}(\bar{x})) = \bar{f}(\bar{g}(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{g})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x})) = [\bar{f} \text{ est dérivable en } \bar{b} = \bar{g}(\bar{a})] =$

$\nearrow$
 $\bar{g} \text{ est dérivable en } \bar{a}$

$$= \bar{f}(\bar{g}(\bar{a})) + L_{\bar{b}} \bar{f}(L_{\bar{a}}(\bar{g})(\bar{x}-\bar{a}) + \bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x})) + \bar{r}_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{x})) \xrightarrow{\text{linéarité de } L_{\bar{b}} \bar{f}} \bar{f}(\bar{g}(\bar{a})) + \underbrace{L_{\bar{b}} \bar{f}(L_{\bar{a}} \bar{g}(\bar{x}-\bar{a}))}_{(L_{\bar{b}} \bar{f} \circ L_{\bar{a}} \bar{g})(\bar{x}-\bar{a})} + \underbrace{L_{\bar{b}} \bar{f}(\bar{r}_{\bar{g}}(\bar{x}))}_{\text{petit}} + \underbrace{\bar{r}_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{x}))}_{\text{petit}}$$

$\Rightarrow$ lorsque $\|\bar{x}-\bar{a}\| \rightarrow 0 \Rightarrow \|\bar{g}(\bar{x})-\bar{g}(\bar{a})\| \rightarrow 0$ $\bar{g}$ est dérivable en $\bar{a} \Rightarrow$ continue en $\bar{a}$.

$\Rightarrow f \circ g$ est dérivable en $\bar{a}$ avec la différentielle $L_{\bar{a}}(f \circ g) = L_{\bar{g}(\bar{a})} \bar{f} \circ L_{\bar{a}} \bar{g}$.

Ex. 2. $n=p=q=1$. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(y) = \cos y$; $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = x^2 + x$

$$\underset{x}{\mathbb{R}} \xrightarrow{g} \underset{y}{\mathbb{R}} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x) = \cos(x^2 + x).$$

Soit $a \in \mathbb{R} \Rightarrow J_{\bar{g}}(\bar{a}) = 2x+1 \big|_{x=a} = 2a+1 = g'(a)$

Soit $b = g(a) = a^2 + a \Rightarrow J_{\bar{f}}(\bar{b}) = -\sin y \big|_{y=a^2+a} = -\sin(a^2+a)$

$$J_{f \circ g}(a) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(a)) \cdot J_{\bar{g}}(a) = (-\sin(a^2+a)) \cdot (2a+1) = \underbrace{-(2a+1) \sin(a^2+a)}_{\parallel} \quad \left. \begin{array}{l} \Rightarrow (f \circ g)'(a) = \\ f'(g(a)) \cdot g'(a) \end{array} \right\}$$

$$f \circ g(x) = \cos(x^2 + x) \Rightarrow J_{f \circ g}(a) = (2x+1)(-\sin(x^2+x)) \big|_{x=a} = \underbrace{-(2a+1) \sin(a^2+a)}_{\parallel}$$

Résumé sur les matrices jacobiniennes.

$$(1) \text{ Si } \bar{h}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow \bar{h}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} h_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ h_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\bar{h}}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} \left. \vphantom{\begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial h_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial h_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}} \right\} \begin{matrix} m \\ n \end{matrix}$$

$$(2) \text{ Si } g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow J_g(\bar{x}) = \nabla g(\bar{x}) = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \dots \frac{\partial g}{\partial x_n} \right)$$

$$(3) \text{ Si } \bar{g}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m \Rightarrow J_{\bar{g}}(x) = \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} = \begin{pmatrix} g'_1(x) \\ g'_2(x) \\ \vdots \\ g'_m(x) \end{pmatrix}$$

$$(4) \text{ Si } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow J_f(x) = \nabla f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} = f'(x) \text{ la dérivée de } f.$$

$$(5) \text{ Si } \mathbb{R}^n \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}^p \xrightarrow{\bar{f}} \mathbb{R}^q \quad ; \quad \begin{matrix} \bar{g} \text{ est dérivable en } \bar{a} \in \mathbb{R}^n \\ \bar{f} \text{ est dérivable en } \bar{b} = \bar{g}(\bar{a}) \in \mathbb{R}^p \end{matrix}$$

Alors $\bar{f} \circ \bar{g}$ est dérivable en $\bar{a}$ et

$$J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) = J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) \cdot J_{\bar{g}}(\bar{a})$$

matrices de Jacobi produit matriciel.

$$\text{Si } n=p \Rightarrow J_{\bar{g}}(\bar{a}) \text{ carré et inversible} \Rightarrow J_{\bar{f}}(\bar{g}(\bar{a})) = J_{\bar{f} \circ \bar{g}}(\bar{a}) \cdot (J_{\bar{g}}(\bar{a}))^{-1}$$

Ex 3. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 y$; $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, g(u,v) = \begin{pmatrix} \sin u \\ u \sin v \end{pmatrix}$

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{f \circ g}$$

$$J_{f \circ g}(u,v) \quad ?$$

$$f \circ g(u,v) = u \sin^2 u \sin v$$

$$J_f(x,y) = \nabla f(x,y) = (2xy \quad x^2) \Big|_{\substack{x = \sin u \\ y = u \sin v}} = (2u \sin u \sin v \quad \sin^2 u) = J_f(\bar{g}(u,v)).$$

$$J_{\bar{g}}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix}$$

$$J_{f(\bar{g}(u,v))} \cdot J_{\bar{g}}(u,v) = (2u \sin u \sin v \quad \sin^2 u) \begin{pmatrix} \cos u & 0 \\ \sin v & u \cos v \end{pmatrix} = (u \sin v \sin 2u + \sin v \sin^2 u \quad u \cos v \sin^2 u)$$

Directement:

$$\nabla(f \circ g)(u,v) = J_{f \circ g}(u,v) = (\sin^2 u \sin v + 2u \sin u \cos u \sin v \quad u \sin^2 u \cos v)$$

Ex 4. $\mathbb{R}_+ \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}_+^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+$ $\bar{g}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}; f(u,v) = uv^2$ $J_{f \circ \bar{g}}(x) = ?$ -192-

$f \circ \bar{g}$

$$J_{\bar{g}} = \begin{pmatrix} g'_1(x) \\ g'_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} ; J_f(u,v) = \nabla f(u,v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \end{pmatrix} \bigg|_{\substack{g_1(x) \\ u \\ g_2(x) \\ v}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 2x^2 \end{pmatrix}$$

$$J_f(\bar{g}(x)) \cdot J_{\bar{g}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^2} & 2x^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3x^2 \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} = 3 - 2 = 1 = J_{f \circ \bar{g}}(x).$$

Directement: $f \circ \bar{g}(x) = f(x^3, \frac{1}{x}) = x^3 \cdot \frac{1}{x^2} = x = f \circ \bar{g}(x) = x$

$\Rightarrow J_{f \circ \bar{g}}(x) = 1.$

Composée dans l'autre ordre: $\bar{g} \circ f: \mathbb{R}_+^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\bar{g}} \mathbb{R}_+^2$

$$J_{\bar{g} \circ f}(u, v) = ?$$

$$J_f(u, v) = \nabla f(u, v) = \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \end{pmatrix}$$

$$J_{\bar{g}}(x) = \left(\begin{pmatrix} 3x^2 \\ -\frac{1}{x^2} \end{pmatrix} \right) \Big|_{x=uv^2} = \begin{pmatrix} 3u^2v^4 \\ -\frac{1}{u^2v^4} \end{pmatrix}$$

$$f(u, v) = uv^2, f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}_+ \\ \bar{g}(x) = \begin{pmatrix} x^3 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}, \bar{g}: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+^2$$

$$J_{\bar{g} \circ f}(u, v) = J_{\bar{g}}(f(u, v)) \cdot J_f(u, v) = \begin{pmatrix} 3u^2v^4 \\ -\frac{1}{u^2v^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v^2 & 2uv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u^2v^6 & 6u^3v^5 \\ -\frac{1}{u^2v^2} & -\frac{2}{uv^3} \end{pmatrix}$$

Exercice: calculer $J_{\bar{g} \circ f}(u, v)$ directement

$$\bar{g} \circ f = \begin{pmatrix} u^3v^6 \\ \frac{1}{uv^2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_{\bar{g} \circ f} = \begin{pmatrix} 3u^2v^6 & 6u^3v^5 \\ -\frac{1}{u^2v^2} & -\frac{2}{uv^3} \end{pmatrix} \text{ la même matrice.}$$

$\det J_{\bar{g} \circ f}(u, v) = 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}_+^2$
 puisque le rang de $J_{\bar{g} \circ f} \leq 1$.

Question 13

Soit $g: \{(u,v) \in \mathbb{R}^2: u>0, v>0\}$, $g(u,v) = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{u}{v} \end{pmatrix}$

-194-

Soit $f: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 , telle que

$$J_{(f \circ g)(u,v)} = \left((u + \frac{1}{v}) e^{uv}, \left(\frac{u^2}{v} - \frac{u}{v^2} \right) e^{uv} \right) \text{ pour tout } (u,v) \in \mathbb{R}_+^2$$

Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(1,2)$ vaut

$$(x,y) = (1,2)$$

$$x = g_1(u,v) \quad y = g_2(u,v)$$

A. $2e$

B. e

C. 0

D. $\frac{1}{\sqrt{2}} e$

E. $\sqrt{2} e$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{u}{v} \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \quad ?$$

$$J_{(f \circ g)}(u, v) = \left(u + \frac{1}{v}\right) e^{uv}, \left(\frac{u^2}{v} - \frac{u}{v^2}\right) e^{uv}$$

$$\mathbb{R}_+^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$

$$J_{(f \circ g)}(u, v) = J_f(g(u, v)) \cdot J_g(u, v) \Rightarrow J_{f(x, y)} = J_{(f \circ g)}(u, v) \cdot J_g(u, v)^{-1}$$

$$\nabla f(1, 2) = J_f(1, 2) = J_{(f \circ g)}(u, v) \cdot J_g(u, v)^{-1} \Big|_{u, v: g(u, v) = (1, 2)}$$

$$g(u, v) = \begin{pmatrix} uv \\ \frac{u}{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} uv = 1 \\ \frac{u}{v} = 2 \end{cases} \Rightarrow v = \frac{1}{u}, u^2 = 2 \Rightarrow u = \sqrt{2} \quad (u \in \mathbb{R}_+) \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$J_g(u, v) = \begin{pmatrix} v & u \\ \frac{1}{v} & -\frac{u}{v^2} \end{pmatrix} \Big|_{(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow J_g^{-1}\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\det = -4$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla f(1, 2) &= J_f(1, 2) = \left((\sqrt{2} + \sqrt{2})e, (2\sqrt{2} - 2\sqrt{2})e \right) \cdot J_g^{-1}\left(\sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (2\sqrt{2}e \ 0) \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{4\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \\ &= (2e \ e) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) \ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) \right) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = \boxed{2e} \Rightarrow A. \end{aligned}$$