

Rappel:

↑↑
 Dérivée partielle: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$

↑↑
 Gradient: $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$.

↑↑
 Dérivée directionnelle: $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

$f: E \rightarrow \mathbb{R}$
 est dérivable
 en $\bar{x} = \bar{a}$

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}} \cdot (\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \text{ pour tout } \bar{x} \in E$$

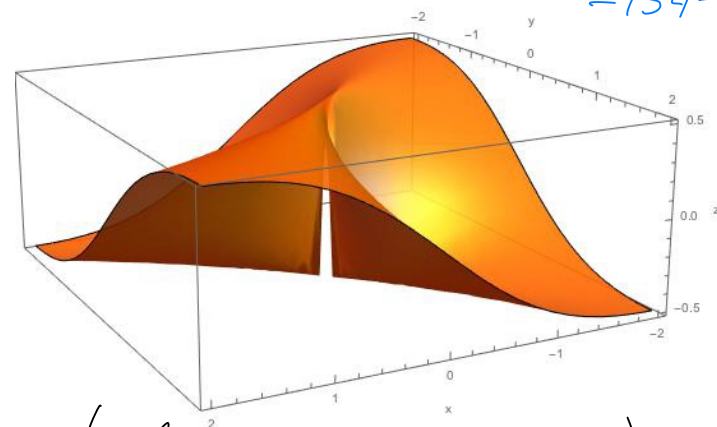
$$\text{et } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0.$$

Thm 1
 $\Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$

Thm 2 sur dérivabilité $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existent sur $B(\bar{a}, \delta)$ et sont continues en $\bar{a}$.

Alors f est dérivable en $\bar{a} \in E$.

Ex 1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$



(1) f n'est pas continue en $(x,y) = (0,0)$

(2) $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; $Df(\vec{0}, \vec{v})$ n'existe pas autrement (si: $\vec{v} \neq \alpha \vec{e}_1$ ou $\alpha \vec{e}_2$). ↖ Cours 12

(3) Dérivées partielles de $f(x,y)$, $(x,y) \neq (0,0)$: $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y(x^2+y^2) - 2x^2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2y}{(x^2+y^2)^2} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial x} \left(0, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^4}} \text{ n'existe pas}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \dots = \frac{x^3 - y^2x}{(x^2+y^2)^2} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\partial f}{\partial y} \left(\frac{1}{k}, 0\right) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{k^3}}{\frac{1}{k^4}} \text{ n'existe pas}$$

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues au point $(0,0)$.

Les dérivées partielles existent au point $(0,0)$; la fonction n'est pas continue et n'est pas dérivable en $(0,0)$.

Ex 2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$f(x,y)$ n'est pas continue en $(0,0)$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5}{t^4(1+t^2)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{1+t^2} = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^3, t^2) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6 \cdot t^6}{t^{12} + t^{12}} = \frac{1}{2}$$

f n'est pas continue $\Rightarrow$ n'est pas dérivable en $(0,0)$

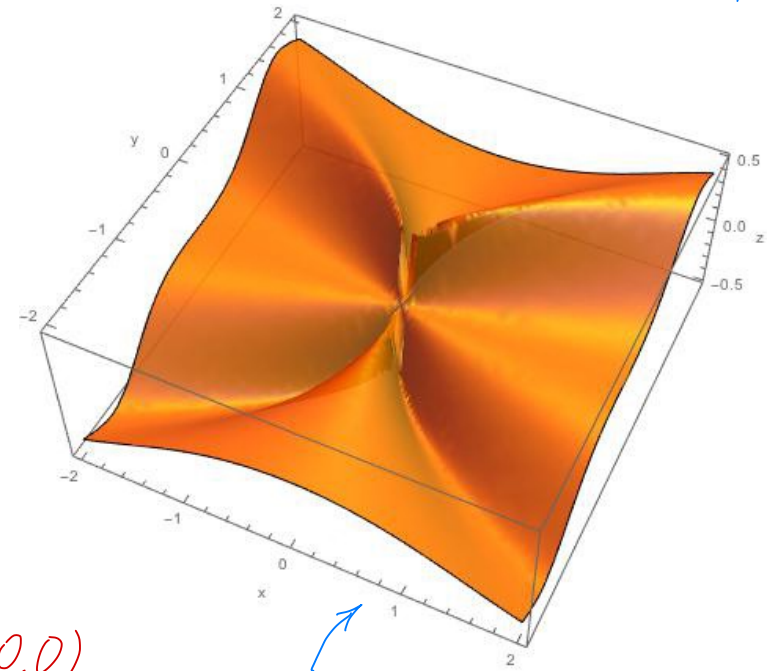
Derivées directionnelles en $(0,0)$ $\vec{v} = (v_1, v_2) \neq (0,0)$

$$Df(\vec{0}, \vec{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{0} + t\vec{v}) - f(\vec{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 v_1^2 v_2^3}{t(t^4 v_1^4 + t^6 v_2^6)}$$

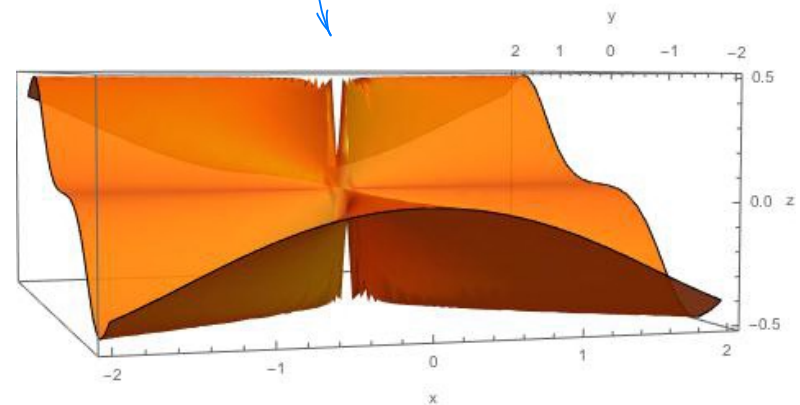
$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^5 v_1^2 v_2^3}{t^5 (v_1^4 + t^2 v_2^6)} = \begin{cases} \frac{v_1^2 v_2^3}{v_1^4} = \frac{v_2^3}{v_1^2} & \text{si } v_1 \neq 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{0 + t^7 v_2^6} = 0 & \text{si } v_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Les dérivées directionnelles existent en $(0,0)$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\vec{v} \neq \vec{0}$.

En particulier,



$f(x,y)$



$$\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = Df(\bar{0}, \overset{v_2=0}{(1,0)}) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = Df(\bar{0}, \overset{v_1=0}{(0,1)}) = 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{0}) = \bar{0}. \quad -156-$$

Mais la fonction n'est pas dérivable en $(0,0)$

Exercice: Vérifier que les dérivées partielles ne sont pas continues en $(0,0)$

Comment vérifier si la fonction donnée est dérivable au point donné ?

Deux méthodes.

1 Si toutes les dérivées partielles d'ordre 1 sont continue en point donné $\Rightarrow$
 f est dérivable à ce point (Thm 2).

2 Par la définition : (1) Si $\nabla f(\bar{a})$ n'existe pas $\overset{\text{Thm 1}}{\Rightarrow} f$ n'est pas dérivable en $\bar{a}$.

(2) Si $\nabla f(\bar{a})$ existe, posons $r(\bar{x}) = f(\bar{x}) - f(\bar{a}) - \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{x} - \bar{a} \rangle$

Alors : Si $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0 \Rightarrow f$ est dérivable en $\bar{a}$ (par déf)

Si $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \neq 0 \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $\bar{a}$ (par déf)

Ex 4

-157-

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\nabla f(0,0): \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \cdot 0}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{t^3} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{0 \cdot t^3}{t^2} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t^3}{t^3} = 0 \quad \Rightarrow \nabla f(0,0) = \vec{0}.$$

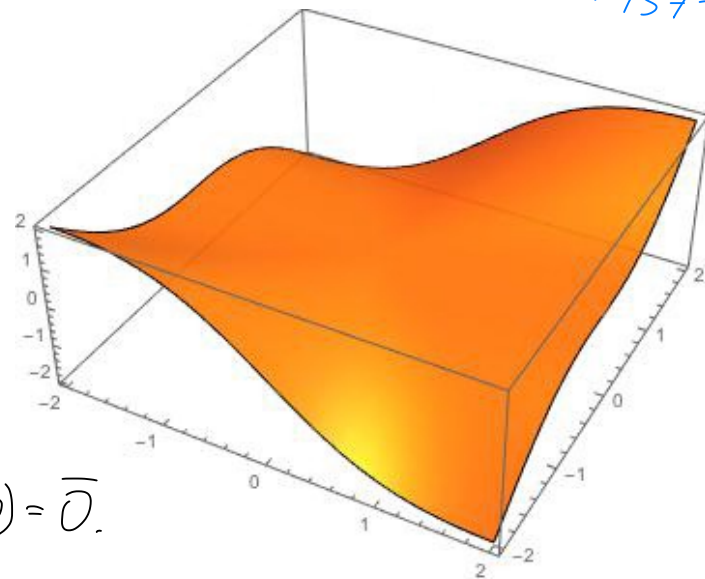
$$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0,0)}_{=0} - \underbrace{\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}_{=0} = f(x,y) = \frac{xy^3}{x^2+y^2}$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)-(0,0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{r^3} =$$

$$= \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r}_{\downarrow 0} (\underbrace{\cos \varphi \sin^3 \varphi}_{\text{bornée}}) = 0 \Rightarrow f \text{ est dérivable en } (0,0).$$

Exercice: calculer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(x,y) \neq (0,0)$

Vérifier que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continue en $(0,0)$



Ex 4 $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y^3(x^2+y^2) - 2x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^5 - x^2y^3}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[\text{(x,y) \rightarrow (0,0)}]{\text{polaire}} \frac{r^5(\sin^5\varphi - \cos^2\varphi \sin^3\varphi)}{r^4} =$

$= r(\underbrace{\sin^5\varphi - \cos^2\varphi \sin^3\varphi}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{bornée}}}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{3xy^2(x^2+y^2) - 2xy^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^3y^2 + xy^4}{(x^2+y^2)^2} \xrightarrow[\text{(x,y) \rightarrow (0,0)}]{\text{polaire}} \frac{r^5(3\cos^3\varphi \sin^2\varphi + \cos\varphi \sin^4\varphi)}{r^4} =$

$= r(\underbrace{3\cos^3\varphi \sin^2\varphi + \cos\varphi \sin^4\varphi}_{\substack{\downarrow 0 \\ \text{bornée}}}) \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$

$\Rightarrow$ on a la fonction avec les dérivées partielles continues en $(0,0)$
 $\Rightarrow$ dérivable en $(0,0)$.

Important: Le fait qu'une ou plusieurs dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ ne soient pas continues en $\bar{a}$ n'implique pas que f n'est pas dérivable en $\bar{a}$ (à voir Ex 5).

Ex 5. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}) & , x \neq 0, \forall y \in \mathbb{R} \\ 0 & , x = 0 \forall y \in \mathbb{R} \end{cases}$

(1) $f(x,y)$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ $x^2 \sin(\frac{1}{x}) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$

(2) Dérivées partielles. $\frac{\partial f}{\partial x} \underset{x \neq 0}{=} 2x \sin(\frac{1}{x}) + x^2 \cos(\frac{1}{x}) (-\frac{1}{x^2}) =$
 $= 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$; $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

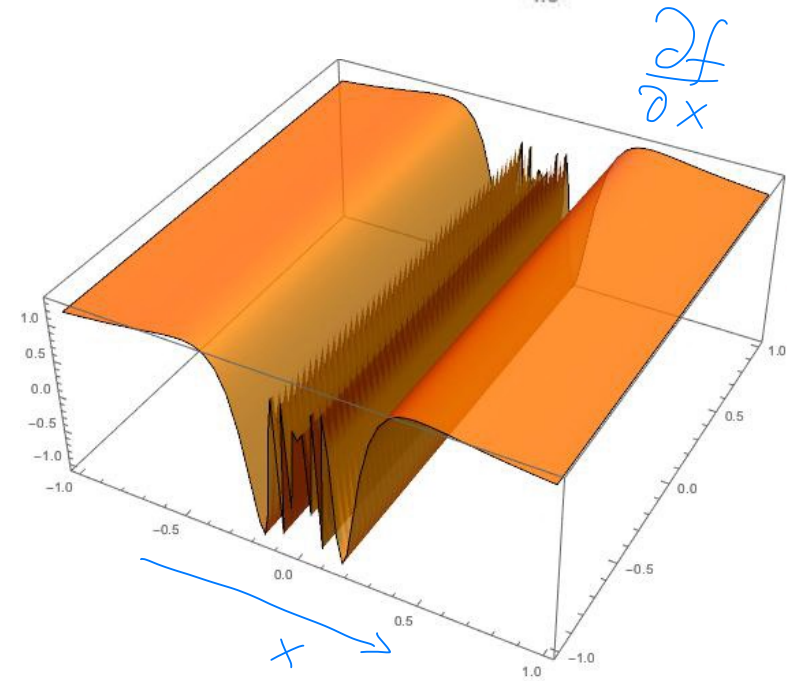
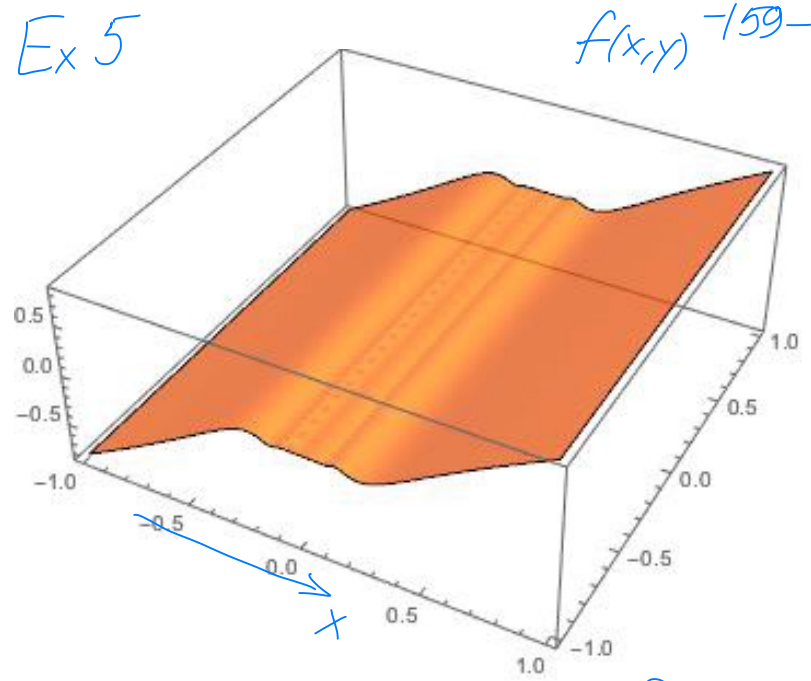
$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2 \sin(\frac{1}{t}) - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \underbrace{t \sin(\frac{1}{t})}_{\text{bornée}} = 0$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow 0} (2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x}))$ n'existe pas.
 $\rightarrow 0$ n'existe pas!

$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue sur $(0, y_0) \forall y_0 \in \mathbb{R}$

(3) Dérivabilité : Méthode 2

$r(x,y) = f(x,y) - \underbrace{f(0,y_0)}_{=0} - \underbrace{\langle \nabla f(0,y_0), (x, y-y_0) \rangle}_{=0} =$
 $= f(x,y) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$



$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{|r(x,y)|}{\|(x,y)-(0,y_0)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,y_0)} \frac{x^2 |\sin(\frac{1}{x})|}{\sqrt{x^2 + \underbrace{(y-y_0)^2}_{\geq 0}}} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 |\sin(\frac{1}{x})|}{\underbrace{\sqrt{x^2}}_{=|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| |\sin(\frac{1}{x})| = 0$$

→ 0 bornée

$\Rightarrow f(x,y)$ est dérivable sur $(0,y_0) \forall y_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$

Mais la dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,y_0)$.

Remarque. Le plan tangent au graphique d'une fonction est défini seulement pour les fonctions dérivables au point donné [DZ: Annexe E4.2].

Rappel: Si $f(x,y)$ est dérivable en $(x_0,y_0) \Rightarrow$ le plan tangent à la surface $z = f(x,y)$ au point $(x_0,y_0, f(x_0,y_0))$ est défini par l'équation:

$$z = f(x_0,y_0) + \langle \nabla f(x_0,y_0), (x-x_0, y-y_0) \rangle.$$

Si $f(x,y)$ n'est pas dérivable en (x_0,y_0) , ce plan n'est pas un plan tangent, même si le gradient $\nabla f(x_0,y_0)$ existe.

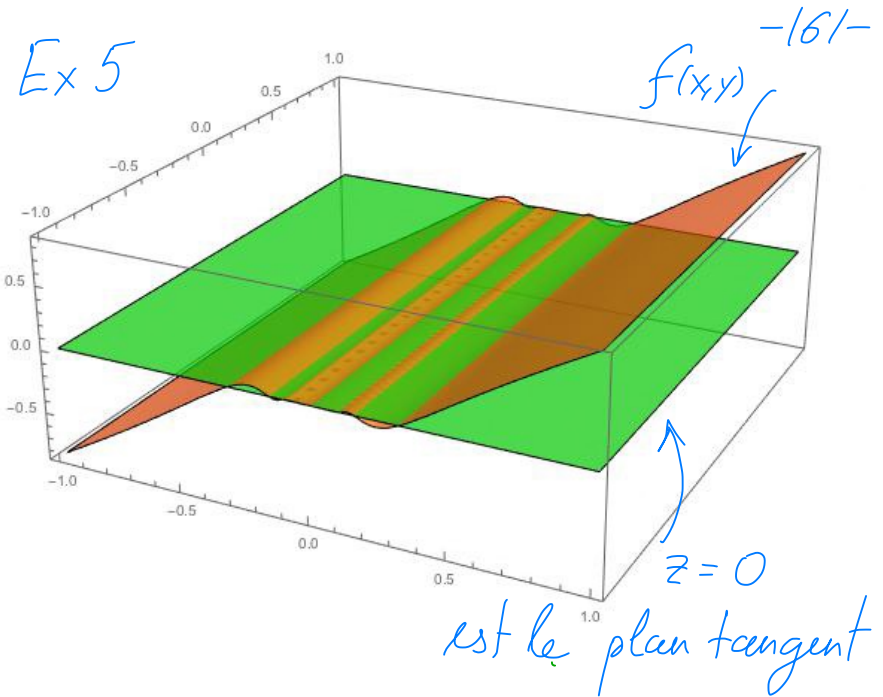
Le plan tangent n'est pas défini dans ce cas.

Ex 5. $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin(\frac{1}{x}), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

f est dérivable en $(0, y_0)$, $\nabla f(0, y_0) = \vec{0}$

$$z = 0 + \underbrace{\langle \nabla f(0, y_0), (x-0, y-y_0) \rangle}_{=0} = 0$$

$\Rightarrow z = 0$ est le plan tangent en $(0, y_0)$
 $\forall y_0 \in \mathbb{R}$



Ex 2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^4 + y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

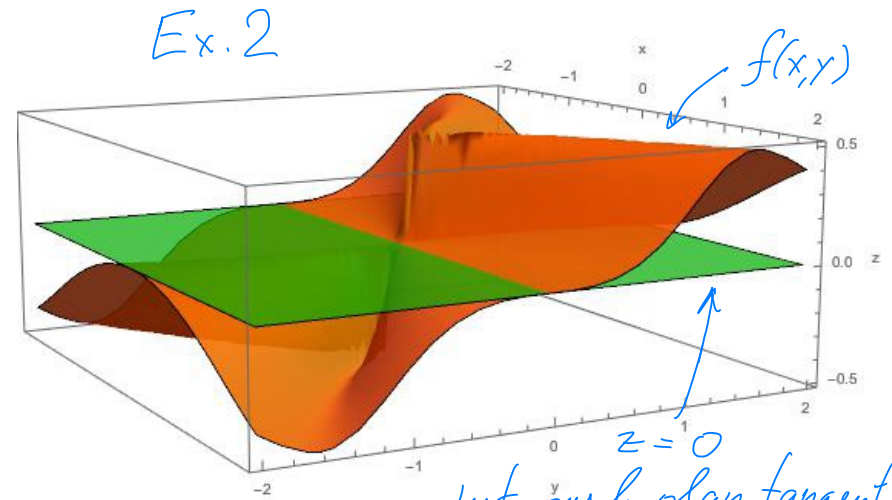
$$\exists \nabla f(0,0) = (0,0)$$

On peut écrire l'équation d'un plan

$$z = \underbrace{f(0,0)}_{=0} + \underbrace{\langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle}_{=0} = 0 \Rightarrow z=0$$

$z=0$ n'est pas le plan tangent au graphique $z=f(x,y)$ en $(0,0)$

Le plan tangent n'est pas défini en $(0,0)$.



Ex 6. Fonction continue mais pas dérivable en un point.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

f est continue sur $\mathbb{R}^2$. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^5 (\cos^4 \varphi \sin \varphi)}{r^4} = \lim_{r \rightarrow 0} r \underbrace{(\cos^4 \varphi \sin \varphi)}_{\text{bornée}} = 0$

Dérivabilité:
(Méthode 2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 \cdot 0}{t(t^2 + 0)^2} = 0$$

$$\Rightarrow \nabla f(0,0) = \vec{0}.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{(0 + t^2)^2 \cdot t} = 0$$

Si f était dérivable en $(0,0)$, alors $r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(x,y), (x,y) \rangle =$
 $= f(x,y) = \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2}$ serait telle que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$

Or on a: $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^2 \sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 y}{(x^2 + y^2)^{5/2}}$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^4 t}{\underbrace{(t^2 + t^2)^{5/2}}_{t^5}} = \frac{1}{(2)^{5/2}}$$

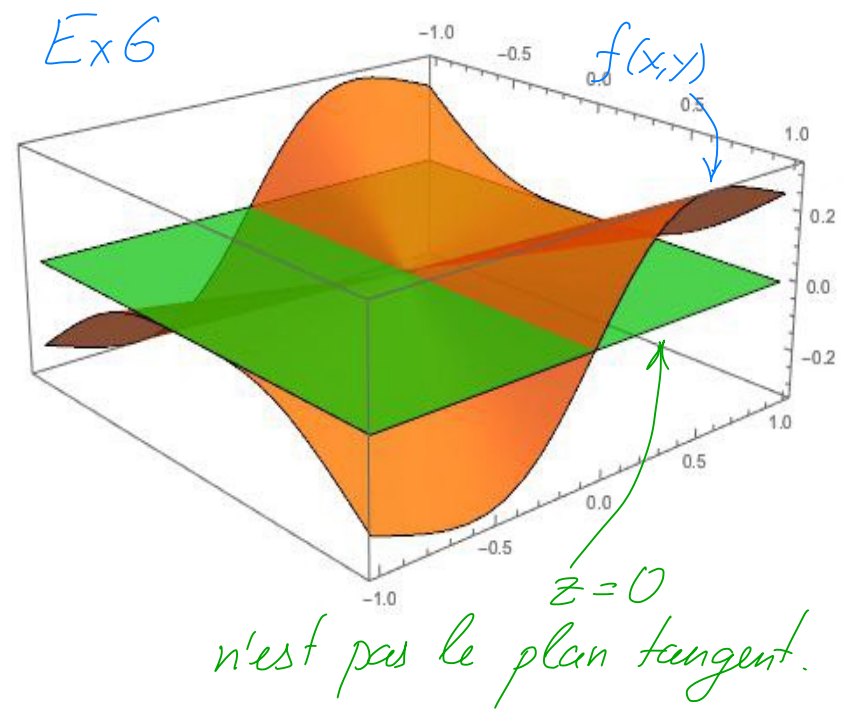
$$\lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{t^5} = 0$$

$\Rightarrow$ la limite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|}$ n'existe pas.

$\Rightarrow f(x,y)$ n'est pas dérivable en $(0,0)$.

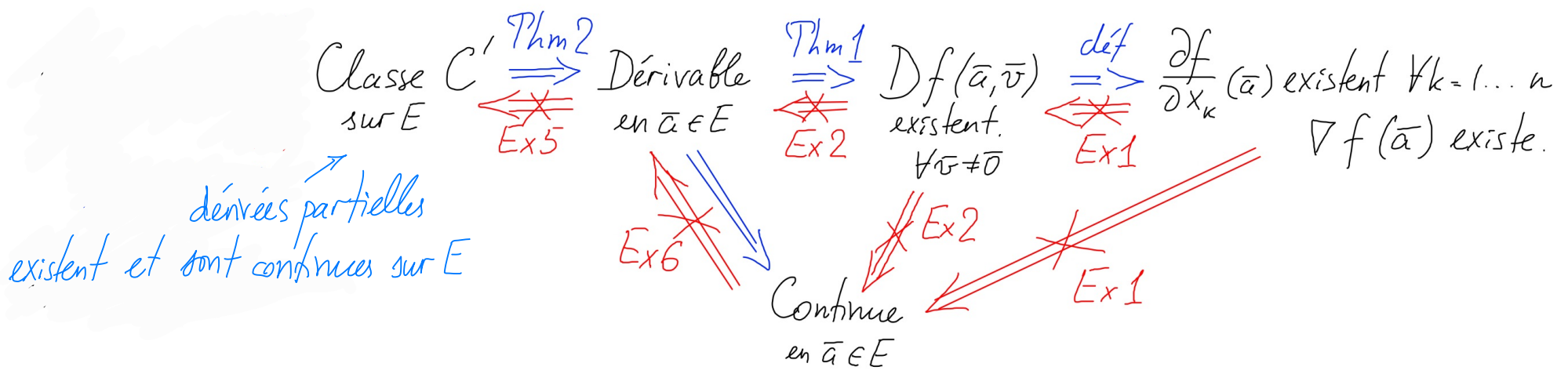
En particulier, le plan $z=0$ n'est pas un plan tangent à la surface $z=f(x,y)$ en $(0,0)$

Mais la fonction est continue en $(0,0)$



Résumé

Soit $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$



Question 11

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x \sin|y|}{\sqrt{3x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\frac{t \sin 0}{\sqrt{3t^2+0}} - 0}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t\sqrt{3}|t|} = 0 \end{aligned}$$

A. f n'est pas continue en $(0,0)$

B. f est continue en $(0,0)$, mais $\nabla f(0,0)$ n'existe pas

C. f est continue, $\nabla f(0,0)$ existe, mais f n'est pas dérivable en $(0,0)$.

D. f est continue et dérivable en $(0,0)$

$$(1) f \text{ est continue en } (0,0): \quad 0 \leq \left| \frac{x \sin|y|}{\sqrt{3x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{|x| |\sin|y||}{\sqrt{3x^2+y^2}} \leq \frac{|x| |\sin|y||}{\sqrt{3}|x|} \leq \frac{1}{\sqrt{3}} |y| \rightarrow 0 \quad \text{si } x \neq 0$$

$$(2) \nabla f(0,0): \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cdot \sin 0}{t \sqrt{3t^2+0}} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin|t|}{t \sqrt{0+t^2}} = 0 \Rightarrow \nabla f(0,0) = \vec{0}.$$

$$r(x,y) = f(x,y) - f(0,0) - \langle \nabla f(0,0), (x,y) \rangle = f(x,y)$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{r(x,y)}{\|(x,y)\|} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin|y|}{\sqrt{3x^2+y^2} \sqrt{x^2+y^2}} : \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(t,t)}{\|(t,t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \sin|t|}{2|t|\sqrt{2}|t|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin|t|}{2\sqrt{2}|t|} \rightarrow 0$$

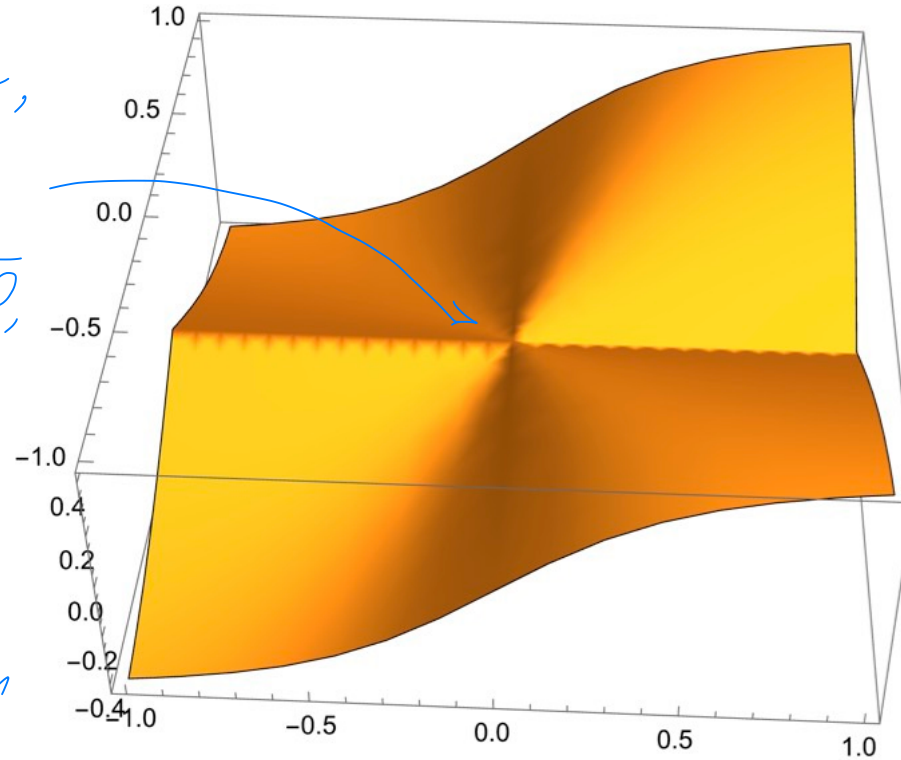
$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{r(0,t)}{\|(0,t)\|} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot \sin|t|}{\sqrt{t^2} \sqrt{t^2}} = 0$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $(0,0)$, $\nabla f(0,0)$ existe, f est continue en $(0,0) \Rightarrow \text{C.}$

$$f(x,y) = \frac{x \sin |y|}{\sqrt{3x^2 + y^2}}$$

La fonction est continue,
les dérivées partielles
existent en $(0,0)$, $\nabla f(0,0) = \vec{0}$,
mais la fonction n'est
pas dérivable en $(0,0)$

Ça veut dire que la fonction
n'admet pas d'approximation par un plan autour de $(0,0)$.



Méthodes de démonstration.Méthode 7. Recurrence.

Réurrence forte. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$, et $P(n)$ une proposition qui dépend de $n \in \mathbb{N} : n \geq n_0$.

Supposons que (1) $P(n_0)$ est vraie

(2) $\{P(n_0), P(n_0+1), \dots, P(n)\}$ impliquent $P(n+1)$
pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0, n \in \mathbb{N}$.

Ex Graphe à $n \geq 2$ sommets tel que tous les 2 sommets sont connectés par exactement une arête. Démontrer qu'il existe un chemin suivant les arêtes qui passe par tous les sommets.

Dém: par récurrence forte. (0) $P(n)$ est la proposition donnée.

(1) Base: $n=2$ $\circ \longrightarrow \circ$ ou $\circ \longleftarrow \circ$ $P(2)$ est vraie.

(2) Hérité