

Rappel: la différentielle

Déf. Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $a \in E$.

On dit que f est dérivable au point $\bar{a}$ s'il existe une transformation linéaire $L_{\bar{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $r: E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x}) \text{ pour tout } \bar{x} \in E$$

$$\text{et } \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0.$$

Déf. $L_{\bar{a}}$ s'appelle la différentielle de f au point $\bar{a} \in E$. $L_{\bar{a}} = df(\bar{a})$ notations

Rappel:

Derivée partielle: $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$

Derivée directionnelle: $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$, $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$.

Gradient: $\nabla f(\bar{a}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{a}), \frac{\partial f}{\partial x_2}(\bar{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{a}) \right)$.

Théorème 1 Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ $\bar{a} \in E$ tel que f est dérivable en $\bar{a}$
de différentielle $L_{\bar{a}}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Alors: (1) f est continue en $\bar{a} \in E$

(2) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$, la dérivée directionnelle $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe et

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$$

(3) Toutes les dérivées partielles existent de f en $\bar{a}$, et

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) \quad \text{où } \bar{e}_k = (0, \dots, \overset{k}{1}, \dots, 0)$$

Le gradient de f existe en $\bar{a}$, et

$$\nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), L_{\bar{a}}(\bar{e}_2), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))$$

(4) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$

$$Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$$

(5) Pour tout $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\|\bar{v}\|=1$, on a $Df(\bar{a}, \bar{v}) \leq \|\nabla f(\bar{a})\|$, et

-141-

$Df\left(\bar{a}, \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|}\right) = \|\nabla f(\bar{a})\| \Rightarrow$ le gradient donne la direction de la plus grande croissance de f en $\bar{a}$. (si $\nabla f(\bar{a}) \neq \bar{0}$).

Explications

(1) f est dérivable en $\bar{a} \Rightarrow f(\bar{x}) = f(\bar{a}) + L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a}) + r(\bar{x})$, et $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} = 0$.

$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} (f(\bar{a}) + \underbrace{L_{\bar{a}}(\bar{x} - \bar{a})}_{\substack{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \rightarrow 0 \\ L_{\bar{a}} \text{ est continue, } L_{\bar{a}}(\bar{0}) = 0}} + \underbrace{r(\bar{x})}_{\bar{x} \rightarrow \bar{a} \rightarrow 0}) = f(\bar{a}) \Rightarrow f \text{ est continue en } \bar{x} = \bar{a}$

(2) Soit $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$, $\bar{v} \neq \bar{0}$. Soit $g(t) = f(\bar{a} + t\bar{v}) : I \xrightarrow{\subset \mathbb{R}} \mathbb{R}$

$\Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = g'(t) \Big|_{t=0}$, si cette dérivée existe.

$Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cancel{f(\bar{a})} + L_{\bar{a}}(t\bar{v}) + r(\bar{a} + t\bar{v}) - \cancel{f(\bar{a})}}{t} =$

$\bar{x} - \bar{a} = t\bar{v}$

$f \text{ est dérivable en } \bar{x} = \bar{a}$

$= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\cancel{t} \cdot L_{\bar{a}}(\bar{v})}{\cancel{t}} + \frac{r(\bar{a} + t\bar{v})}{\|t\bar{v}\|} \cdot \underbrace{\frac{\|t\bar{v}\|}{t}}_{= \|\bar{v}\|} \right) = L_{\bar{a}}(\bar{v})$

$\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{a}} \frac{r(\bar{x})}{\|\bar{x} - \bar{a}\|} \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \boxed{Df(\bar{a}, \bar{v}) = L_{\bar{a}}(\bar{v})} \quad \forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq 0$$

$$(3) \quad \underline{\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = Df(\bar{a}, \bar{e}_k) \stackrel{(2)}{=} L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) \Rightarrow \exists \nabla f(\bar{a}) = (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n))}$$

Remarque cours 11

$$(4) \quad L_{\bar{a}}(\bar{v}) \stackrel{\downarrow}{=} \langle \bar{v}, (L_{\bar{a}}(\bar{e}_1), \dots, L_{\bar{a}}(\bar{e}_n)) \rangle = \langle \bar{v}, \nabla f(\bar{a}) \rangle = \underline{Df(\bar{a}, \bar{v})}$$

$$(5) \quad \text{Soit } \|\bar{v}\|=1 \Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) \Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle \leq \|\nabla f(\bar{a})\| \cdot \overbrace{\|\bar{v}\|}^{=1} = \|\nabla f(\bar{a})\|.$$

Cauchy-Schwartz

$$\text{Soit } \bar{v} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|} \Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{v}) = \left\langle \nabla f(\bar{a}), \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|} \right\rangle = \frac{\|\nabla f(\bar{a})\|^2}{\|\nabla f(\bar{a})\|} = \underline{\|\nabla f(\bar{a})\|}$$

Si $\nabla f(\bar{a}) \neq 0$

$\Rightarrow$ Si $\nabla f(\bar{a}) \neq 0 \Rightarrow$ la valeur maximale de la dérivée directionnelle de f en $\bar{x} = \bar{a}$ le long d'un vecteur unitaire est dans la direction du gradient $\nabla f(\bar{a})$.

Ex 1 $f(x,y) = \ln(x^2+y)$ dérivable sur $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y > 0\}$
(à voir plus tard)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2x}{x^2+y}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x^2+y} \quad \forall (x,y) \in E$$

$$\text{Si } \bar{a} = (1,0) \in E \Rightarrow \nabla f(x,y) = \left(\frac{2x}{x^2+y}, \frac{1}{x^2+y} \right)$$

$$\nabla f(\bar{a}) = (2, 1)$$

Dérivée directionnelle en direction $\bar{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$

$$\text{Par le Thm } Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle = \left\langle (2, 1), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right\rangle = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ le même résultat que dans le cours 11.}$$

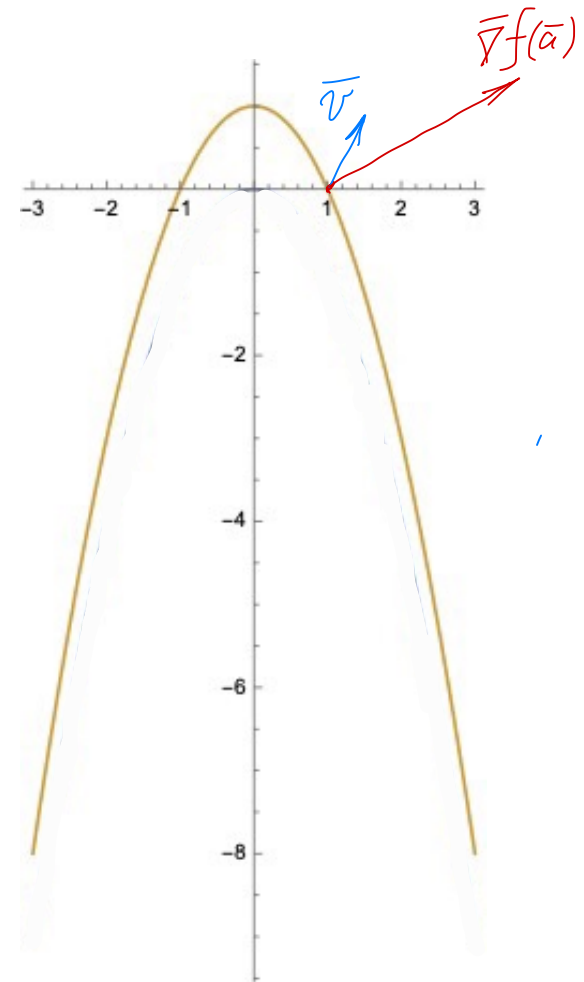
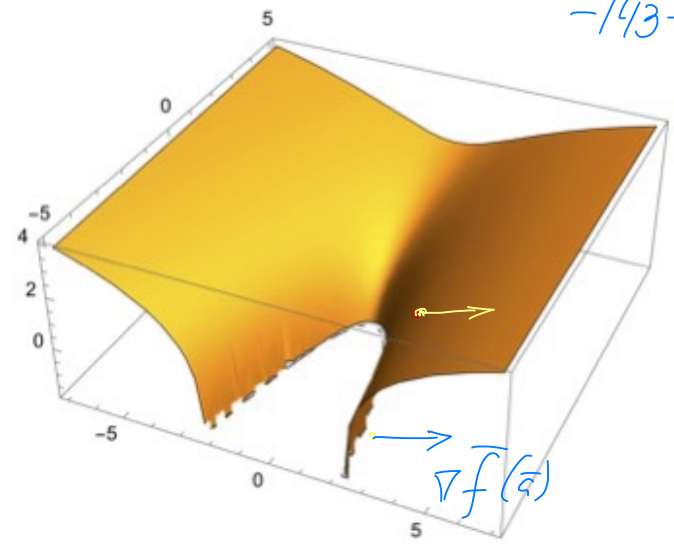
$$Df(\bar{a}, \bar{u}) \text{ où } \bar{u} = \frac{\nabla f(\bar{a})}{\|\nabla f(\bar{a})\|} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)$$

$$Df(\bar{a}, \bar{u}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{u} \rangle = \left\langle (2, 1), \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \right\rangle = \frac{4+1}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$\Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{u}) = \|\nabla f(\bar{a})\|$ valeur maximale de la dérivée directionnelle de f en $\bar{a}$, $\|\bar{v}\|=1$

$$Df(\bar{a}, \bar{u}) > Df(\bar{a}, \bar{v})$$

$$\sqrt{5} > 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Les courbes de niveau de $f = \ln(x^2 + y)$ dans E .

$$\{(x, y) \in E : \ln(x^2 + y) = C\} \Leftrightarrow \{(x, y) \in E : x^2 + y = e^C > 0\} \Leftrightarrow$$

$$\{(x, y) \in E : y = e^C - x^2\} \quad \text{Considérons } \bar{a} = (1, 0) \quad f(\bar{a}) = f((1, 0)) = \ln(1^2 + 0) = 0.$$

$$\ln(1^2 + 0) = 0 \Rightarrow \text{la courbe de niveau } 0 : y = e^0 - x^2 = 1 - x^2 \text{ passant par } \bar{a} = (1, 0)$$

Tangente à la courbe de niveau: $y = 1 - x^2$ en $\bar{a}$

$$(1 - x^2)' = -2x \Big|_{x=1} = -2 \text{ la pente ; } \bar{w} \parallel \text{ la tangente } (1, -2)$$

$$\nabla f(\bar{a}) = (2, 1)$$

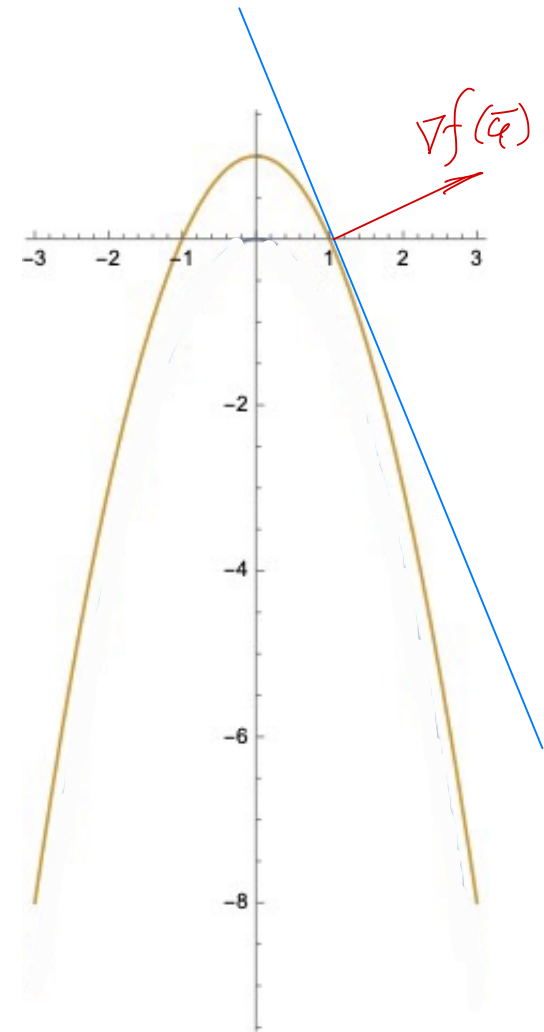
$$\Rightarrow \bar{w} \perp \nabla f(\bar{a}) : \langle (1, -2), (2, 1) \rangle = 0$$

tangent à la courbe
de niveau

Le long de la courbe de niveau $Df(\bar{a}, \bar{w}) = 0$.

$$\Rightarrow Df(\bar{a}, \bar{w}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{w} \rangle = 0$$

$\Rightarrow$ Si $\nabla f(\bar{a}) \neq 0 \Rightarrow \nabla f(\bar{a}) \perp$ la tangente
de la courbe de niveau.



Equation du plan tangent de la surface $F(\bar{x})=0$

Soit $\bar{a}$: $F(\bar{a})=0$, $F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable en $\bar{x}=\bar{a}$ et $\nabla F(\bar{a}) \neq 0$.

$F(\bar{x})=0$ sur la surface $\Rightarrow D F(\bar{a}, \bar{v})=0$ pour tout vecteur $\bar{v}$ dans le plan tangent à la surface $F(\bar{x})=0$ au point $\bar{x}=\bar{a}$.

$$D F(\bar{a}, \bar{v}) \stackrel{\text{Thm 1}}{=} \left\langle \nabla F(\bar{a}), \bar{v} \right\rangle \stackrel{x_0}{=} \Leftrightarrow \bar{v} \perp \nabla F(\bar{a})$$

$\Rightarrow$ L'équation de l'hyperplan tangent à $F(\bar{x})=0$ au point $\bar{a}$: $F(\bar{a})=0$ est

$$\left\langle \nabla F(\bar{a}), (\bar{x}-\bar{a}) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \nabla F(a,b,c), (x-a, y-b, z-c) \right\rangle = 0 \quad \text{si } F(a,b,c)=0 \text{ et } \nabla F(a,b,c) \neq 0$$

Ex 2 $F(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 6 = 0$

ellipsoïde

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$: $a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 6$. Trouver une équation du plan tangent à la surface au point (a, b, c) .

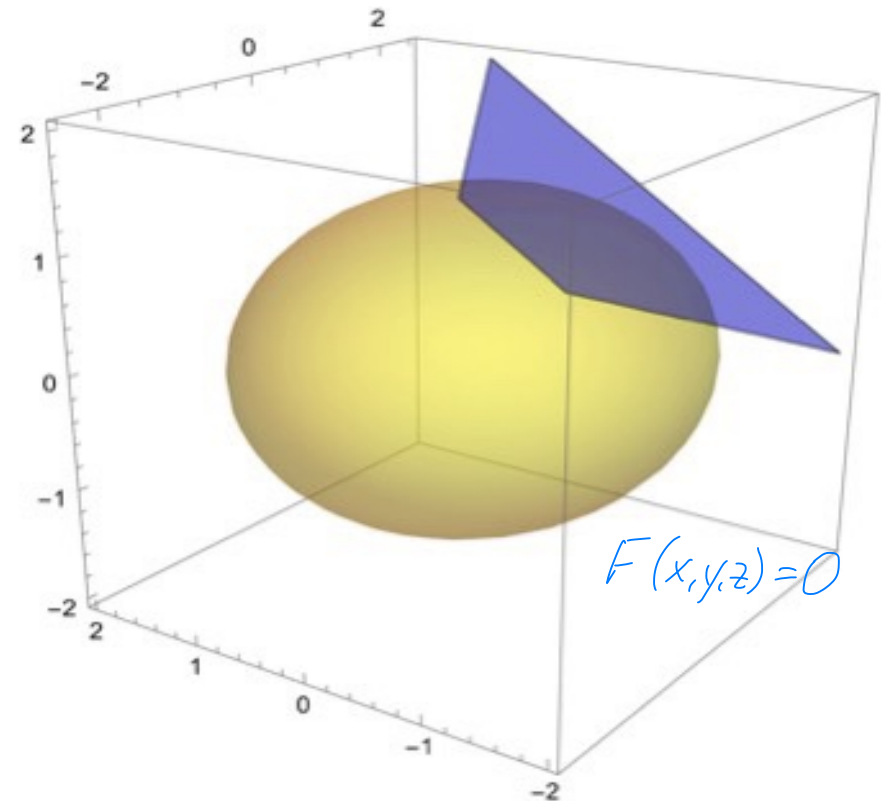
$$\nabla F(x, y, z) = (2x, 4y, 6z) \Big|_{(a, b, c)} = (2a, 4b, 6c) \neq 0 \quad \forall (a, b, c) \in \text{l'ellipsoïde}$$

$\langle \nabla F(a, b, c), (x-a, y-b, z-c) \rangle = 0$ donne l'équation du plan tangent en (a, b, c)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \langle (2a, 4b, 6c), (x-a, y-b, z-c) \rangle &= \\ &= 2a(x-a) + 4b(y-b) + 6c(z-c) = \\ &= 2ax + 4by + 6cz - 2a^2 - 4b^2 - 6c^2 = 0 \\ \Rightarrow ax + 2by + 3cz - \underbrace{a^2 + 2b^2 + 3c^2}_{-6} &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{ax + 2by + 3cz - 6 = 0}$$

équation du plan tangent à l'ellipsoïde
au point (a, b, c) .



Application. Plan tangent à la surface $z = f(x, y)$

Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur E ($\Leftrightarrow f$ est dérivable en tout point de E)

Soit $\bar{a} \in (x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)) \in \mathbb{R}^3$ un point du graphique de f .

On cherche une équation du plan tangent à $z = f(x, y)$ en $\bar{a}$

$F(x, y, z) = z - f(x, y) : \mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable

$F(x, y, z) = 0$ est une surface de niveau de $F \Leftrightarrow z = f(x, y)$

$$\nabla F(x, y, z) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}, -\frac{\partial f}{\partial y}, 1 \right) \neq \vec{0}$$

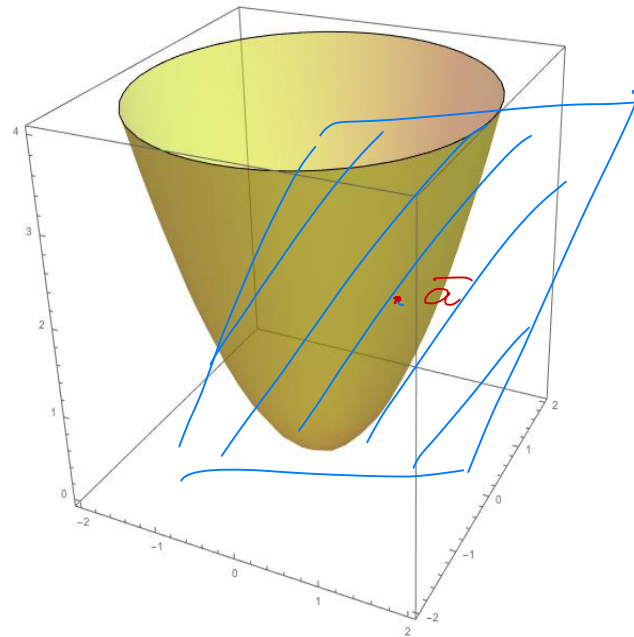
$\Rightarrow$ L'équation du plan tangent à la surface $z = f(x, y)$ au point (x_0, y_0, z_0) est

$$\langle \nabla F(x, y, z), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \rangle = 0$$

$$\left\langle \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), -\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1 \right), (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \right\rangle = 0$$

$$-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) + 1(z - f(x_0, y_0)) = 0$$

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$



$$z_0 = f(x_0, y_0)$$

L'équation du plan tangent

Ex. 3 $f(x, y) = \sin(xy)$ dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

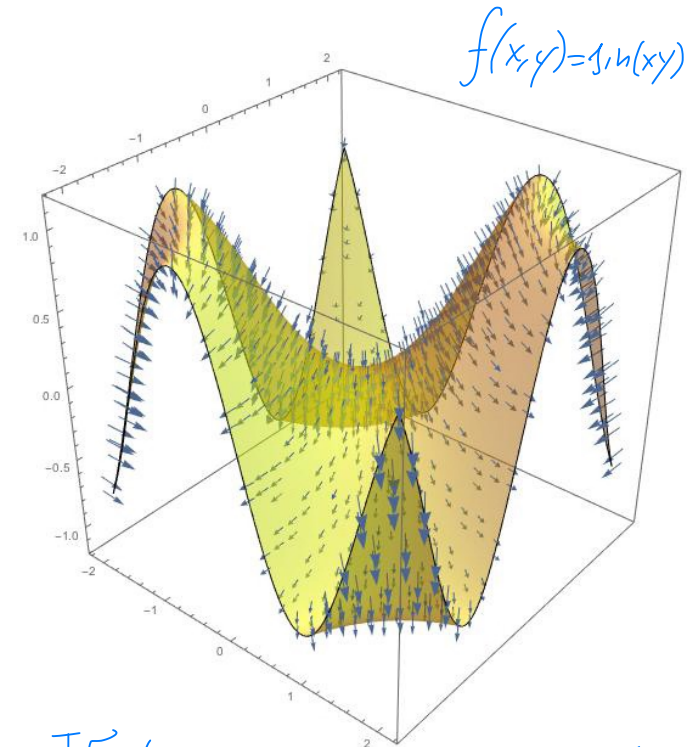
$$\nabla f(x, y) = (y \cos(xy), x \cos(xy)).$$

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \nabla f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

Plan tangent à la surface $z = \sin(xy)$
en $(x_0, y_0, \sin(x_0 y_0))$ est

$$z = \sin(x_0 y_0) + (y_0 \cos(x_0 y_0), x_0 \cos(x_0 y_0), (x - x_0, y - y_0))$$

$$z = \sin(x_0 y_0) + y_0 \cos(x_0 y_0)(x - x_0) + x_0 \cos(x_0 y_0)(y - y_0)$$



Vecteurs normaux à la surface:
 $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right)$

Question 10

Soit S la surface

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \cos(\pi y) + z^2 x + e^{xy} + yz = 1 + e\}$$

Alors l'équation du plan tangent à S au point $(x_0, 2, 0)$ est

A. $x + \frac{1}{4}y + e^{-1}z = \frac{1}{2}$

B. $ex + \frac{1}{4}ey + z = e$

C. $x + y + 2e^{-1}z = \frac{5}{2}$

D. $2ex + (\frac{1}{2}e - \pi)y + 2z = 2(e + \pi)$

$$\cos(2\pi) + 0 + e^{2x} + 0 = 1 + e \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Soit $F(x, y, z) = \cos(\pi y) + z^2 x + e^{xy} + yz - 1 - e$

Alors $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}$

$$\nabla F(x, y, z) = (z^2 + ye^{xy}, -\pi \sin(\pi y) + xe^{xy} + z, 2zx + y)$$

$$\nabla F(\frac{1}{2}, 2, 0) = (2e, \frac{1}{2}e, 2)$$

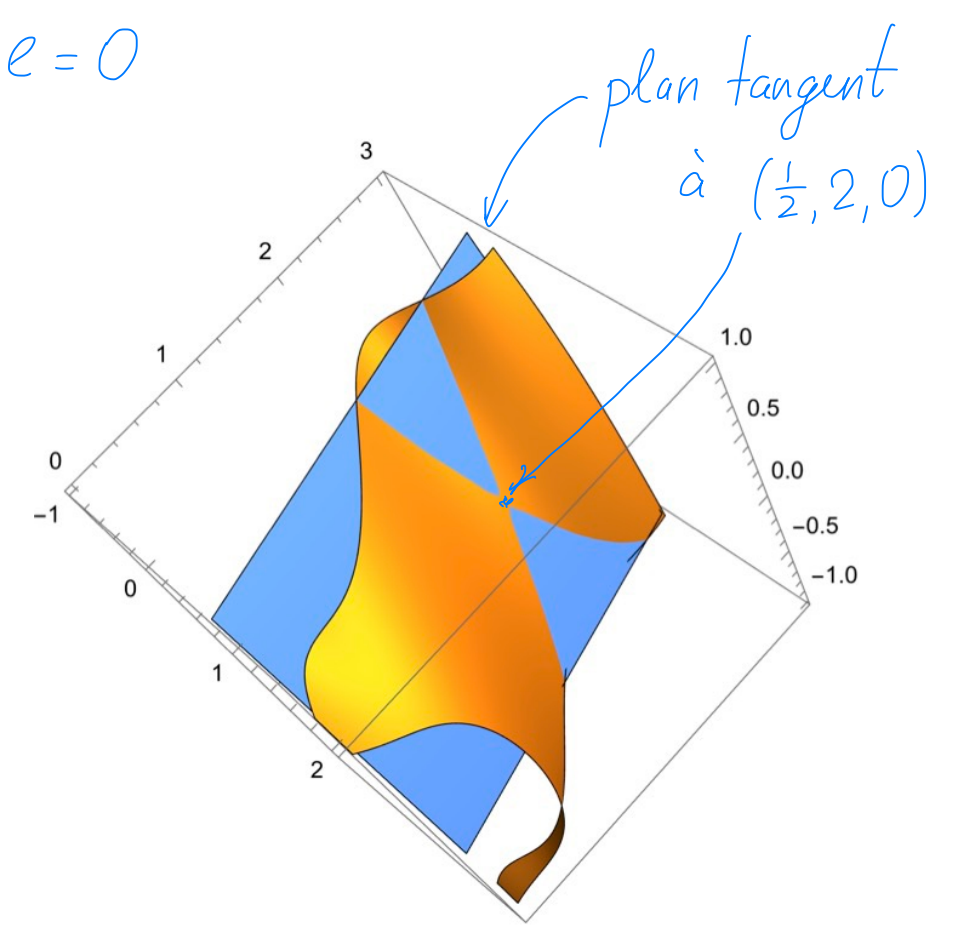
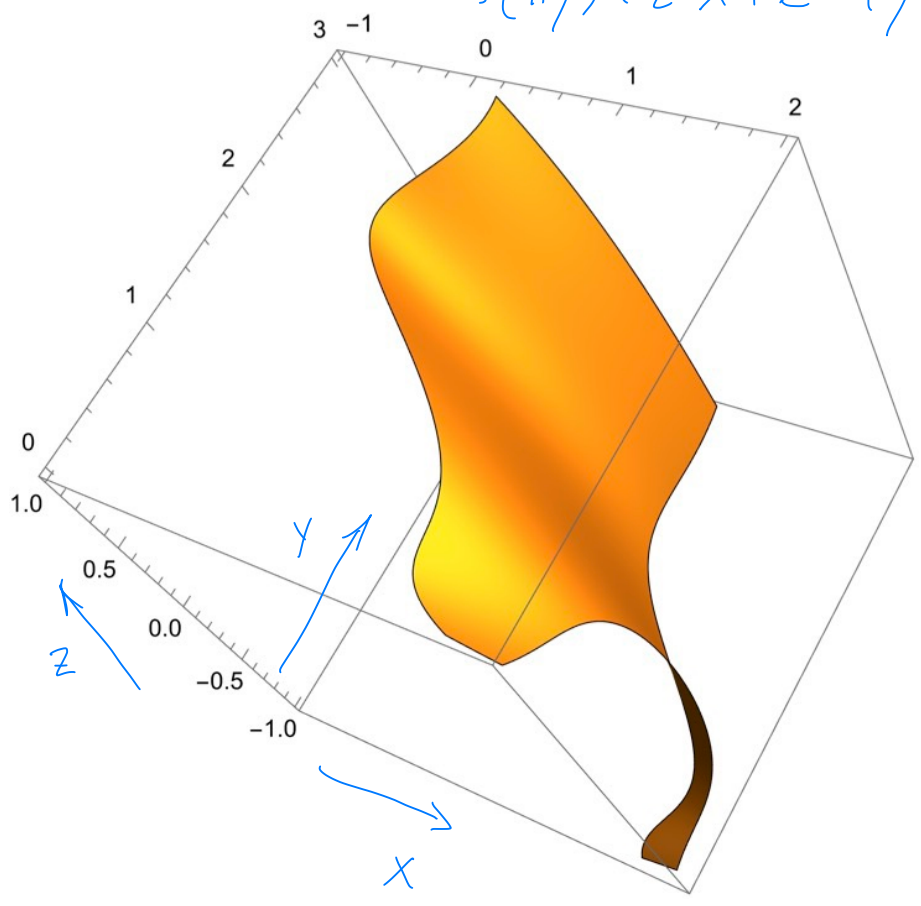
$\Rightarrow$ l'équation du plan tangent en $(\frac{1}{2}, 2, 0)$ est

$$\langle \nabla F(\frac{1}{2}, 2, 0), (x - \frac{1}{2}, y - 2, z) \rangle = 0 \Rightarrow 2e(x - \frac{1}{2}) + \frac{1}{2}e(y - 2) + 2(z - 0) = 0$$

$$2ex - e + \frac{1}{2}ey - e + 2z = 0$$

$$\underline{ex + \frac{1}{4}ey + z = e}$$

$$\cos(\pi y) + z^2 x + e^{xy} + yz - 1 - e = 0$$



Resumé :

Resumé :

1 Dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe ; $\bar{e}_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

1 Dérivées partielles : $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{e}_k) - f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe; $\bar{e}_k = (0, \dots, 1, \dots, 0)$.

2 Dérivées directionnelles : $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe ; $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$.

2 Dérivées directionnelles : $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe ; $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$.

2 Dérivées directionnelles : $Df(\bar{a}, \bar{v}) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{a} + t\bar{v}) - f(\bar{a})}{t}$ si la limite existe ; $\bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$.

3 f est dérivable en $\bar{a}$ $\Leftrightarrow$ $\exists L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $r : E \rightarrow \mathbb{R}$
 transformation linéaire fonction

3 f est dérivable en $\bar{a}$ $\Leftrightarrow$ $\exists L_{\bar{a}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $r : E \rightarrow \mathbb{R}$
 transformation linéaire fonction

Si f est dérivable en $\bar{a}$ $\stackrel{\text{Thm 1}}{\Rightarrow}$ f est continue en $\bar{a}$; $Df(\bar{a}, \bar{v})$ existe $\forall \bar{v} \in \mathbb{R}^n, \bar{v} \neq \bar{0}$
 $\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$ existent $\forall k = 1 \dots n \Rightarrow \nabla f(\bar{a})$ existe,

et on a: $L_{\bar{a}}(\bar{v}) = Df(\bar{a}, \bar{v}) = \langle \nabla f(\bar{a}), \bar{v} \rangle$; $L_{\bar{a}}(\bar{e}_k) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{a})$.

La réciproque est fautive en général: l'existence de toutes les dérivées directionnelles n'implique pas la dérivabilité.

Thm 2 sur dérivabilité $E \subset \mathbb{R}^n$ ouvert, $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{a} \in E$. Supposons qu'il existe $\delta > 0$ tel que toutes les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_k}(\bar{x})$ existent sur $B(\bar{a}, \delta)$ et sont continues en $\bar{a}$. -152-

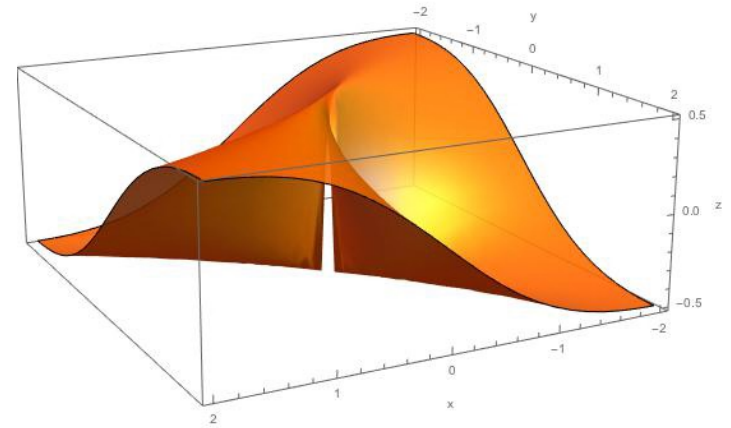
Alors f est dérivable en $\bar{a} \in E$.

Dém: basée sur le Thm des accroissements finis pour chaque variable $x_1, \dots, x_n$. [DZ, §16.4.3]

Ex 1. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$f(x, y)$ n'est pas continue en $(0, 0)$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} f(0, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0 \cdot t}{t^2} = 0 \\ \lim_{t \rightarrow 0} f(t, t) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Thm 1} \\ \Rightarrow f \text{ n'est pas} \\ \text{dérivable en } (0, 0). \end{array}$$



Les dérivées directionnelles en $(0, 0)$: Soit $\bar{v} = (v_1, v_2) \neq (0, 0)$

$$\begin{aligned} Df(\bar{0}, \bar{v}) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\bar{0} + t\bar{v}) - f(\bar{0})}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{t^2 v_1 v_2}{t^2 (v_1^2 + v_2^2)} - 0 \right) = \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{0}) = 0. \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v_1 v_2}{t (v_1^2 + v_2^2)} = \begin{cases} 0, & \text{si } v_1 = 0 \text{ ou } v_2 = 0 \\ \text{n'existe pas, autrement} \end{cases} \end{aligned}$$

les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{0}) = 0$
les dérivées directionnelles dans d'autres directions n'existent pas.