

Rappel: Méthodes de calcul des limites de fonctions $f: E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}$

-III-

(1) S'il existent 2 suites $\bar{a}_k, \bar{b}_k \subset E \setminus \{\bar{x}_0\}$: $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{a}_k = \bar{x}_0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \bar{b}_k = \bar{x}_0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) \neq \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k)$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x})$ n'existe pas.

(2) S'il existent 2 courbes $\gamma_1, \gamma_2: [a, b] \rightarrow E \setminus \{\bar{x}_0\}$: $\lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_1(t) = \lim_{t \rightarrow a^+} \gamma_2(t) = \bar{x}_0$ et $\lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_1(t)) \neq \lim_{t \rightarrow a^+} f(\gamma_2(t))$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x})$ n'existe pas.

(3) Deux gendarmes: $f, g, h: E \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = l$ et $\exists \alpha > 0$: $\forall x \in \{x \in E : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| \leq \alpha\}$ on a $f(\bar{x}) \leq h(\bar{x}) \leq g(\bar{x})$, alors $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} h(\bar{x}) = l$.

Version avec la valeur absolue: $\exists \alpha > 0$; $\forall x \in \{x \in E : 0 < \|\bar{x} - \bar{x}_0\| < \alpha\}$ on a $|f(\bar{x}) - l| \leq g(\bar{x})$ et $\lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} g(\bar{x}) = 0 \Rightarrow \lim_{\bar{x} \rightarrow \bar{x}_0} f(\bar{x}) = l$.

(4) Coordonnées polaires: $f: E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}$. Alors $\lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. Ici $\varphi = \varphi(r)$ fonction inconnue de r .

(5) Deux gendarmes en coordonnées polaires: $f: E \xrightarrow{\subset \mathbb{R}^2} \mathbb{R}$

Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l \Leftrightarrow \exists \delta > 0$ et $\varphi:]0, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$

$\forall \varphi \in [0, 2\pi]$, $\forall r \in]0, \delta[$ on a: $|f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - l| \leq \varphi(r)$. et $\lim_{r \rightarrow 0^+} \varphi(r) = 0$

Aujourd'hui :

(6) On peut utiliser les DL connus pour les fonctions d'une seule variable pour trouver des estimations pour les Deux gendarmes.

Notamment, dans les limites lorsque $\|(x,y)-(0,0)\| \rightarrow 0$ on peut remplacer des expressions $\varphi(x), \chi(y)$ par leurs DL autour de $x=0$ ou $y=0$:

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k + x^n \cdot \varepsilon(x) \quad \text{1 seule variable}$$

$$\chi(y) = \sum_{k=0}^n b_k y^k + y^n \cdot \varepsilon(y), \text{ etc...}$$

(7) On peut composer avec une fonction d'une seule variable.

Proposition Soit $D \subset \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in D$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de (x_0, y_0) , telle que (1) $f(x,y) = (\varphi \circ g)(x,y) = \varphi(\underbrace{g(x,y)}_s) = \varphi(s)$, $s \in g(D)$

(2) $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} g(x,y) = l \quad \leftarrow \text{"facile"}$

(3) $\lim_{s \rightarrow l} \varphi(s) = \varphi(l) \quad \leftarrow \text{"difficile" mais 1 seule variable}$

Alors $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x,y) = \lim_{s \rightarrow l} \varphi(s) = \varphi(l).$

Ex 4

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(xy)}{xy} & , x \neq 0 \text{ et } y \neq 0. \\ 1, & \text{autrement.} \end{cases}$$

$$f(x, y) = h \circ g(x, y) \text{ où } g(xy) = xy \text{ continue sur } \mathbb{R}^2$$

$$h(t) = \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & , t \neq 0 \\ 1, & \text{autrement} \end{cases} \quad t = g(xy) = xy$$

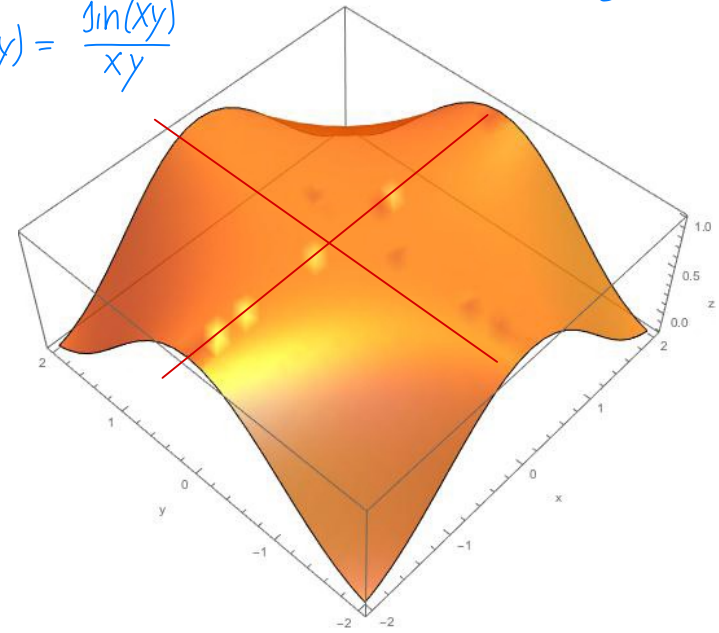
$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ \text{ou } y \rightarrow 0}} g(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} xy = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 = h(0)$$

$$\Rightarrow h(t) \text{ est continue sur } \mathbb{R} \Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 1$$

$$\Rightarrow f(x, y) \text{ est continue sur } \mathbb{R}^2$$

$$f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy}$$



Ex 6 $f(x,y) = \begin{cases} xy \ln(|x|+|y|) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) - ?$

On cherche une fonction $g(x,y)$ telle que $0 \leq |f(x,y) - 0| \leq g(x,y)$ pour (x,y) au voisinage de $(0,0)$.
et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$.

Soit $(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \Rightarrow$

$$\left. \begin{aligned} |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \leq |x| \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\leq 1} \leq |x| \\ |x \cdot y| &= |x| \cdot |y| \leq |y| \sqrt{x^2+y^2} \leq |y| \end{aligned} \right\} \Rightarrow |x \cdot y| \leq \frac{1}{2}(|x| + |y|)$$

$$0 \leq |xy \ln(|x|+|y|)| \leq \underbrace{\frac{1}{2}(|x|+|y|)}_{\forall (x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \leq 1} |\ln(|x|+|y|)| = g(x,y)$$

$$\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0 \Rightarrow (|x|+|y|) \leq 2\sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$$

Soit $t = (|x|+|y|) \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t |\ln t|$

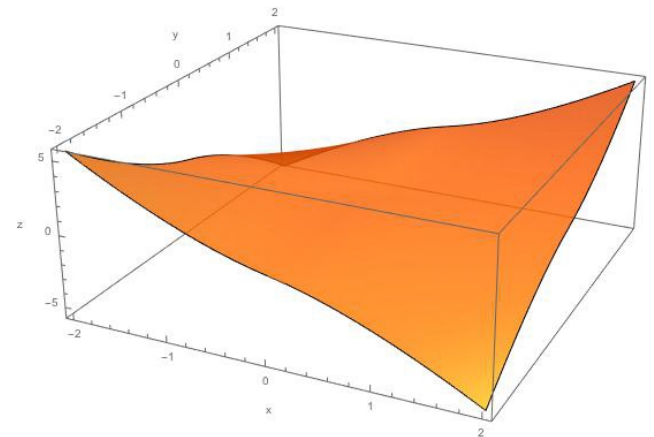
$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t |\ln t| = - \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t \ln t = \lim_{s = \frac{1}{t}, s \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{\ln s}{s} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0 \Rightarrow$ par les 2 gendarmes

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$$

$$\begin{aligned} |y| &= \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \\ |x| &= \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} \end{aligned}$$

$f(x,y) = xy \ln(|x|+|y|)$



Ex 7. $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} \quad \frac{0}{0}$

$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)}$

On cherche une fonction $g(x,y)$: $0 \leq |f(x,y) - 0| \leq g(x,y)$ au voisinage de $(1,0)$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} g(x,y) = 0$.

$$0 \leq |f(x,y) - 0| = \left| \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2} \right| \leq \frac{(x-1)^2}{(x-1)^2 + y^2} |\ln x| = |\ln x|$$

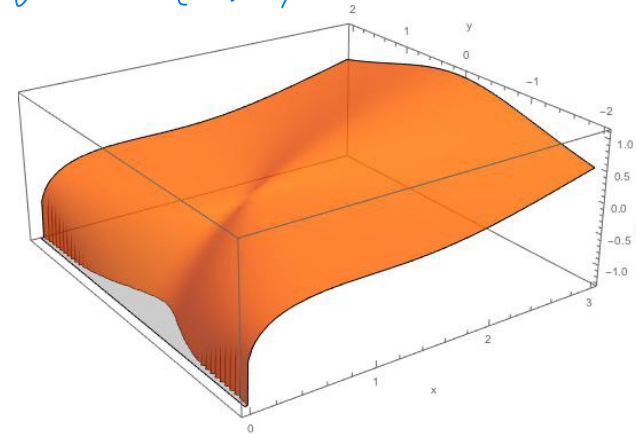
$$0 \leq |f(x,y) - 0| \leq |\ln x| = g(x)$$

$$|x-1| \leq \sqrt{(x-1)^2 + y^2} \rightarrow 0 \Rightarrow x \rightarrow 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} |\ln x| = 0.$$

$$\Rightarrow \text{par les 2 gendarmes} \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} f(x,y) = 0.$$

$$f(x,y) = \frac{(x-1)^2 \ln x}{(x-1)^2 + y^2}$$



E x 8

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 + \ln(1+3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{autrement} \end{cases}$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} \varepsilon(u) = 0$$

On utilise le DL $\ln(1+u) = u + \varepsilon(u)u$ autour de $u=0$ $\left(\begin{array}{l} y^2 \leq x^2 + y^2 \rightarrow 0 \Rightarrow \\ 3y^2 = u \rightarrow 0 \end{array} \right)$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + \ln(1+3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2 + 3y^2 \varepsilon(3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

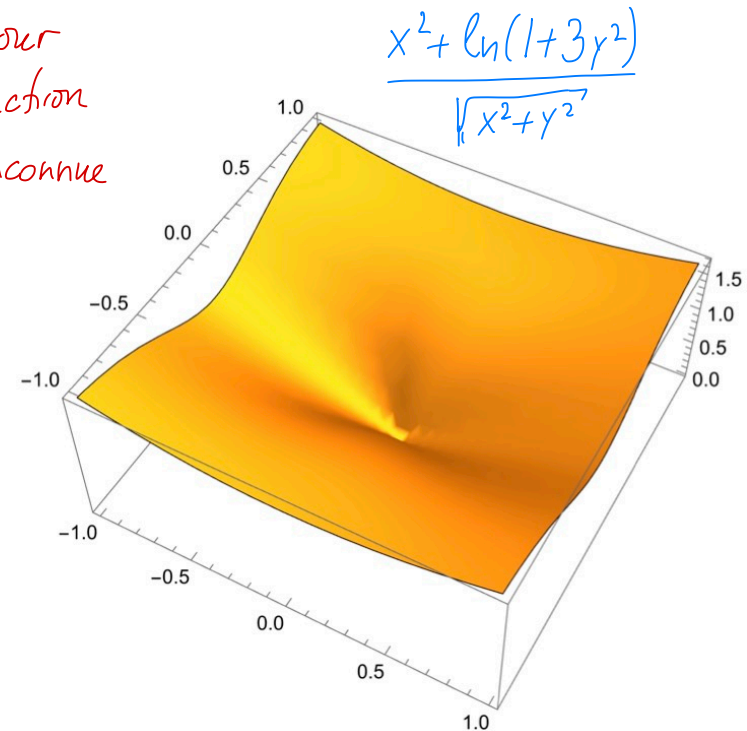
$$= \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 + 3y^2}{\sqrt{x^2+y^2}} + \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3y^2 \varepsilon(3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 + 0$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)}{r} = \lim_{r \rightarrow 0} \underbrace{r(\cos^2 \varphi + 3 \sin^2 \varphi)}_{\leq 4 \text{ bornée même pour une fonction } \varphi = \varphi(r) \text{ inconnue}} = 0$$

$$0 \leq \left| \frac{3y^2 \varepsilon(3y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}} - 0 \right| \leq \frac{3|x^2+y^2|}{\sqrt{x^2+y^2}} |\varepsilon(3y^2)| = 3\sqrt{x^2+y^2} |\varepsilon(3y^2)|$$

$(x,y) \rightarrow (0,0) \rightarrow 0 \quad \rightarrow 0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0.$$



Question 8

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{y^2}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad g(x, y) = \begin{cases} \frac{1 - e^{x^3}}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{autrement} \end{cases} \quad -117-$$

Alors:

A. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq 0$

B. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$

C. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y) = 0$

D. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$ n'existe pas

E. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas et $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} g(x,y)$ n'existe pas

$$(1) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-e^{y^2}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-1-y^2-y^2\mathcal{E}(y^2)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-y^2(1+\mathcal{E}(y^2))}{x^2+y^2}$$

$$e^{y^2} = 1 + y^2 + y^2\mathcal{E}(y^2)$$

??

$$\frac{1-e^{y^2}}{x^2+y^2}$$

$$\rightarrow \lim_{t \rightarrow 0} f(t,0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-1}{t^2+0} = 0 ; \lim_{t \rightarrow 0} f(0,t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1-e^{t^2}}{t^2} = -1$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas.

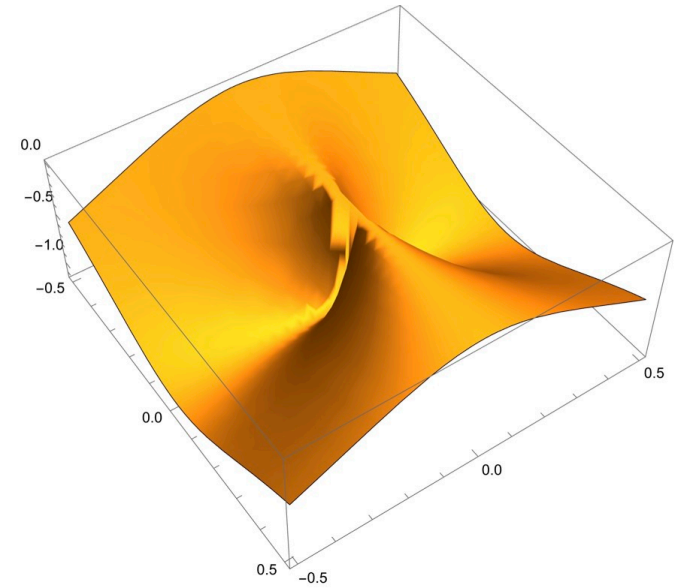
$$(2) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-e^{x^3}}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-1-x^3-x^3\mathcal{E}(x^3)}{x^2+y^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{-x^3(1+\mathcal{E}(x^3))}{x^2+y^2}$$

$$0 \leq \left| \frac{-x^3(1+\mathcal{E}(x^3))}{x^2+y^2} - 0 \right| = \underbrace{\left| \frac{x^3}{x^2+y^2} \right|}_{\leq 1} |x| \underbrace{|1+\mathcal{E}(x^3)|}_{\text{bornée}} \leq |x|$$

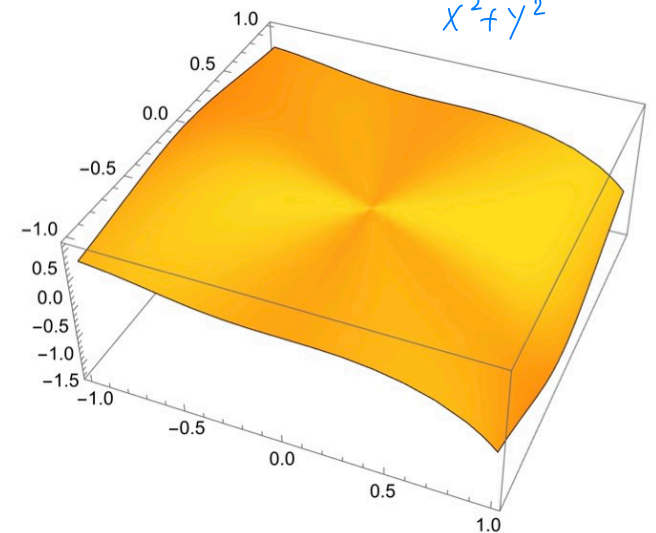
$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \mathcal{E}(x^3) = 0$$

$$|x| < \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow 0$$

par les 2 gendarmes $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1-e^{x^3}}{x^2+y^2} = 0$.



$$\frac{1-e^{x^3}}{x^2+y^2}$$



Attention: Soit $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ définie au voisinage de $(0,0) \in D$.

Supposons que $\forall m \in \mathbb{R}$ $\lim_{t \rightarrow 0} f(t, mt) = l$
 fixé

ou supposons que

$$\forall \varphi \in [0, 2\pi] \quad \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = l$$

fixé

Cela n'implique pas $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = l$

Voir Série 6.

Ex. 9 $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^6} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$

$$f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) = \frac{r^4 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r^6 \sin^6 \varphi} = \frac{r^2 \cos \varphi \sin^3 \varphi}{\cos^2 \varphi + r^4 \sin^6 \varphi}$$

$\varphi \in [0, 2\pi]$ fixé

$r \rightarrow 0$

Si $\cos \varphi = 0 \Rightarrow 0$

Si $\cos \varphi \neq 0$
 φ fixé

$$\frac{\overbrace{r^2 \cos \varphi \sin^3 \varphi}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{\cos^2 \varphi}_{\neq 0} + \underbrace{r^4 \sin^6 \varphi}_{\rightarrow 0}} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0$$

Mais

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t^3, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^6}{t^6 + t^6} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{0}{t^2 + 0} = 0$$

$\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ n'existe pas!

Proposition. Continuité d'une fonction composée

$A \xrightarrow{\bar{g}} B \xrightarrow{f} \mathbb{R}$. Si $g_1(\bar{x}) \dots g_p(\bar{x})$ sont continues en $\bar{a} \in A$,
 $\subset \mathbb{R}^n \quad \subset \mathbb{R}^p$ et $f(\bar{y})$ est continue en $(g_1(\bar{a}), g_2(\bar{a}) \dots g_p(\bar{a}))$,
 alors $f \circ g(\bar{x})$ est continue en $\bar{x} = \bar{a}$.

[DZ §14.3.7]

Ex. 4 $h(x, y) = \sin(x^2 - y^2) \cos(x^2 - y^2) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$

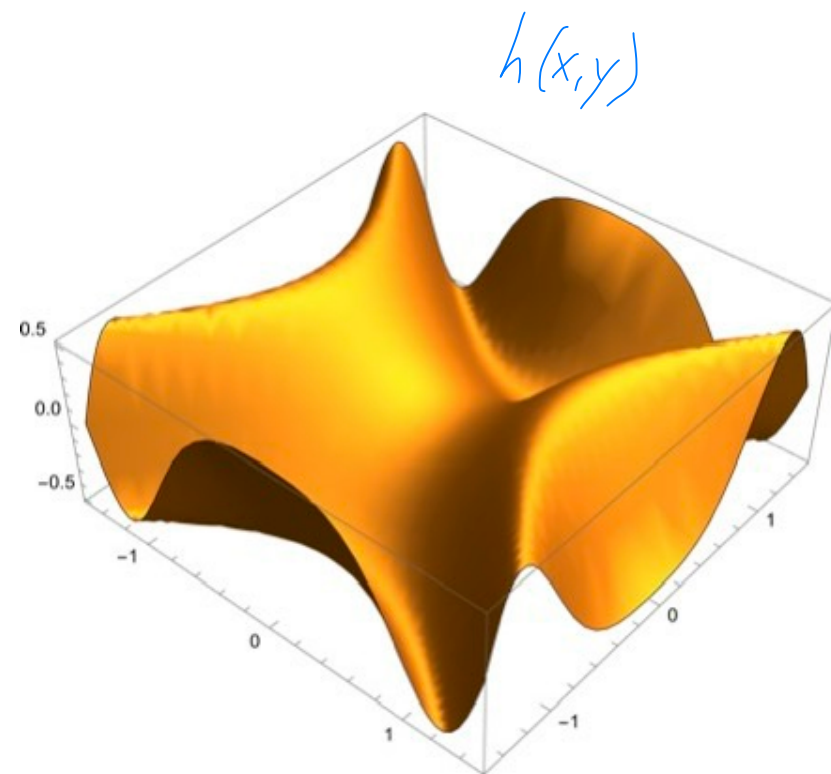
Soit $g(x, y) = x^2 - y^2$ continue sur $\mathbb{R}^2$

et $f(t) = \sin t \cos t$ continue sur $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow f \circ g(x, y) = \sin(x^2 - y^2) \cos(x^2 - y^2)$$

est continue sur $\mathbb{R}^2$ par la proposition

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$$



§ 3.3. Maximum et minimum d'une fonction sur un compact.

Déf. $f: E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Alors si $M \in \mathbb{R}$ et $m \in \mathbb{R}$ satisfont

$$\begin{cases} (1) f(x) \leq M \quad (f(x) \geq m) \quad \forall x \in E \\ (2) M \in f(E) \quad (m \in f(E)). \end{cases} \begin{cases} M = f(\bar{a}) \\ m = f(\bar{b}) \end{cases}$$

Alors M est le maximum (m est le minimum) de la fonction f sur E .

Ex. $f(x, y) = \sin^2(xy) \Rightarrow f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$
 $\max f(x, y) = 1, \min f(x, y) = 0.$

Thm. Une fonction continue sur un sous-ensemble compact $E \subset \mathbb{R}^n$ atteint son maximum et son minimum. ($\Leftrightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}), \exists \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$).

Dém: (1) $\{f(\bar{x})\}_{\bar{x} \in E}$ est borné. Par absurde.

Supposons que $\exists \{\bar{x}_k\}_{k \in \mathbb{N}} : |f(\bar{x}_k)| \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{\bar{x}_k\} \subset E$ une suite bornée
 $\Rightarrow$ Par Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite $(E \text{ compact} \Rightarrow \text{borné})$ convergente.

$\{\bar{x}_{k_p}\}_{p=0}^{\infty} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \bar{x}_0$ Puisque E est fermé $\Rightarrow \bar{x}_0 \in E$

Puisque f est continue $\Rightarrow \lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{x}_{kp}) = f(\bar{x}_0) \in \mathbb{R}$ $\left. \begin{array}{l} \bar{x}_0 \in E \\ \{f(\bar{x}_{kp})\} \text{ n'est pas bornée} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{absurde}$
 mais par construction $|f(\bar{x}_k)| \geq k \quad \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \{f(\bar{x}_{kp})\}$ n'est pas bornée
 $\Rightarrow f$ est bornée sur E .

(2) f atteint son min et son max sur E .

$f(E)$ est un sous-ensemble borné de $\mathbb{R} \Rightarrow \exists M = \sup \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$
 $\exists m = \inf \{f(\bar{x}), \bar{x} \in E\}$
 $\Rightarrow \{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \subset E : \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = m, \lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{b}_k) = M$ (par la déf de Sup et Inf)

$\{\bar{a}_k\}, \{\bar{b}_k\} \subset E$ bornées $\Rightarrow \exists$ sous-suites convergentes $a_{kp} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \bar{a}$
 $b_{kp} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \bar{b}$

Puisque E est fermé $\Rightarrow \bar{a} \in E$ et $\bar{b} \in E$

$\lim_{p \rightarrow \infty} f(\bar{a}_{kp}) \stackrel{f \text{ continue}}{=} f(\bar{a})$

$\Rightarrow \exists \bar{a} \in E : f(\bar{a}) = m = \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$

limite
d'une
sous-suite

$\lim_{k \rightarrow \infty} f(\bar{a}_k) = m$

par construction

D'une façon similaire $\exists \bar{b} \in E :$
 $f(\bar{b}) = M = \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x})$

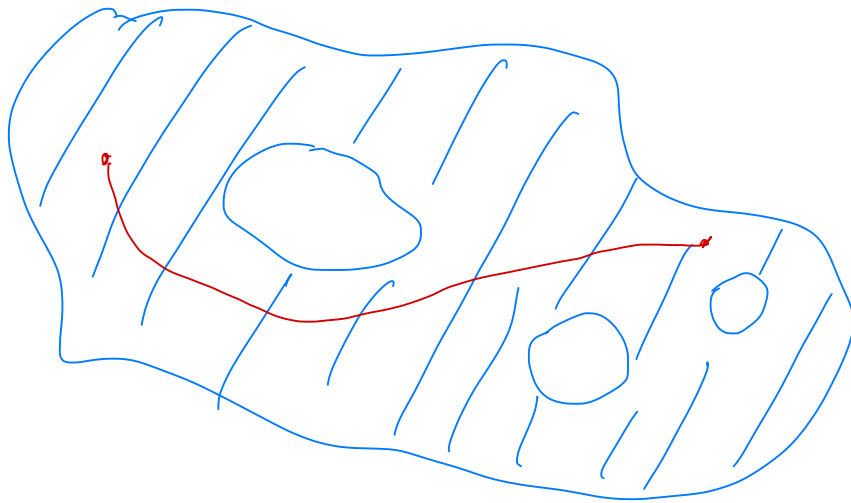


Conclusion: Thm: Une fonction continue sur un sous-ensemble compact atteint son maximum et son minimum. -123-

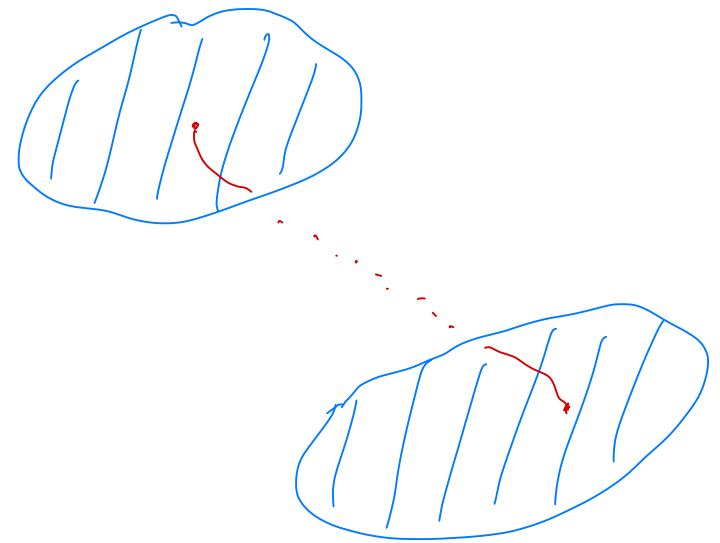
$$(E \subset \mathbb{R}^n \text{ compact}, f: E \rightarrow \mathbb{R} \text{ continue} \Rightarrow \exists \max_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) = f(\bar{a}), \exists \min_{\bar{x} \in E} f(\bar{x}) = f(\bar{b}); \bar{a}, \bar{b} \in E)$$

Remarque. Pour que f atteigne aussi toute valeur intermédiaire entre m et M , il suffit que l'ensemble E soit compact et connexe par chemins.

chemin: $\bar{g}: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $t \rightarrow (g_1(t), g_2(t), \dots, g_n(t))$ où $g_i(t)$ est continue sur $[0,1] \ \forall i=1 \dots n$.



$E \subset \mathbb{R}^2$ compact
connexe par chemins



$A \subset \mathbb{R}^2$ compact
n'est pas connexe
par chemins