Durée : 60 minutes

Analyse II
Test intermédiaire
MT/MX
Printemps 2025

Enoncé

Pour les questions à **choix multiple**, on comptera :

$+3$ points si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Pour les questions de type **vrai-faux**, on comptera :

$+1$ point si la réponse est correcte,

0 point si la question n'est pas répondue ou s'il y a plusieurs réponses,

-1 point si la réponse est incorrecte.

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle
$$y'(x) = \frac{x}{x^2+9}\big(y(x)-1\big)$$
qui satisfait la condition initiale $y(0) = 7$ vérifie aussi

☐ $y(4) = 6$ ☐ $y(4) = 26$ ☐ $y(4) = 0$ ☐ $y(4) = 11$

Question 2 : Le sous-ensemble
$$E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 1 \text{ et } -1 < xy < 1\big\} \subset \mathbb{R}^2$$

☐ est fermé et non borné

☐ est fermé et borné

☐ est ouvert et non borné

☐ est ouvert et borné

Question 3 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2\backslash\big\{(0,0)\big\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = \frac{1-\cos(x)}{x^2+y^2}\,.$$
Alors

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{2}$

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\frac{1}{2}$

Question 4 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par
$$f(x,y) = \sin(\pi x^2 y)\,.$$
Alors la dérivée directionnelle $D_{\vec{v}}f(1,1)$ de f en $(1,1)$ suivant le vecteur $\vec{v} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ vaut

☐ 0 ☐ -3π ☐ $-\frac{3\pi}{\sqrt{2}}$ ☐ $\frac{6\pi}{\sqrt{5}}$

Question 5 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y+y^3x}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Alors

- ☐ f est continue en $(0,0)$ mais f n'est pas différentiable en $(0,0)$
- ☐ f est différentiable en $(0,0)$
- ☐ f n'est pas continue en $(0,0)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas

Question 6 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) - 6y(x) = 4e^{-x}$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -2$ et $y'(0) = 3$ vérifie aussi

☐ $y\big(\ln(3)\big) = -\dfrac{1}{3}$ ☐ $y\big(\ln(3)\big) = 0$ ☐ $y\big(\ln(3)\big) = -\dfrac{4}{9}$ ☐ $y\big(\ln(3)\big) = -12$

Question 7 : Soit $(\vec{x}_n)$ la suite d'éléments de $\mathbb{R}^2$ définie par

$$\vec{x}_n = \left(n\sin\left(\frac{(-1)^n}{n}\right), \frac{(-1)^n}{n}\sin(n)\right), \qquad \text{pour tout } n \in \{1,2,3,\ldots\}.$$

Alors

- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \big(0,\, 1\big)$
- ☐ la suite n'est pas bornée
- ☐ la suite converge et $\lim\limits_{n\to\infty} \vec{x}_n = \big(1,\, 0\big)$
- ☐ la suite est bornée mais pas convergente

Question 8 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + \frac{1}{x}y(x) = \frac{2}{(1+x^2)^2}$$

sur l'intervalle $]0,+\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

☐ $y(2) = -\dfrac{2}{15}$ ☐ $y(2) = -\dfrac{1}{10}$ ☐ $y(2) = 0$ ☐ $y(2) = \dfrac{3}{20}$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer (sans faire de ratures) la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 9 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en $(0,0)$, telle que

$$f(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} f(0,0) = \big(0,0\big).$$

Alors

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 10 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, alors $D_{\vec{v}} f(x_0,y_0) = 0$ pour tout $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|\vec{v}\| = 1$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 11 : Soit $f\colon U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un sous-ensemble ouvert non vide $U \subset \mathbb{R}^2$. Si $(x_0,y_0) \in U$ est tel que $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, alors $f(x_0,y_0) = L$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 12 : Soient A et B deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^n$. Alors

$$\partial(A \cup B) = (\partial A) \cup (\partial B)$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 13 : Si $A \subset \mathbb{R}^2$ est un sous-ensemble ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$, alors l'ensemble

$$\big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A \text{ et } z = 0\big\}$$

est un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^3$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 14 : Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables. Si $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions telles que $\lim\limits_{r\to 0} g(r) = 0$, $\lim\limits_{r\to 0} h(r) = 0$ et

$$g(r) \leq f\big(r\cos(\theta)\,,\, r\sin(\theta)\big) \leq h(r) \qquad \text{pour tout } r > 0 \text{ et pour tout } \theta \in \mathbb{R},$$

alors $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

☐ VRAI ☐ FAUX