Analyse II **Série de révision**

MT/MX Printemps 2025

Première partie, questions à choix multiple

Pour chaque question, marquer la case correspondant à la réponse correcte. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Question 1 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x\,y'(x) - y(x) = x\cos^2\left(\frac{y(x)}{x}\right)$$

pour $x \in \,]0,\infty[$ qui satisfait la condition initiale $y(1) = \dfrac{\pi}{4}$ est

- ☐ $y(x) = x\arctan\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$
- ☐ $y(x) = x\arctan\big(\ln(x)^2 + 1\big)$
- ☐ $y(x) = \dfrac{1}{x}\arctan\big(\ln(x) + 1\big)$
- ☐ $y(x) = x\arctan\big(\ln(x) + 1\big)$

Indication: Effectuer le changement de variables $y(x) = x\,v(x)$.

Question 2 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x\,y'(x) = y(x) + \big(y(x)\big)^2, \qquad \text{avec } x > 0.$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = -1$
- ☐ $y(2) = -4$
- ☐ $y(2) = -2$
- ☐ $y(2) = -3$

Question 3 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{2y(x)}{x} - \frac{5x}{y(x)}, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 4$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = 49$
- ☐ $y(2) = 7$
- ☐ $y(2) = 14$
- ☐ $y(2) = 21$

Question 4 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) + 6x y'(x) + 6y(x) = 0\,, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 3$ et $y'(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(3) = \frac{11}{9}$
- ☐ $y(3) = \frac{7}{9}$
- ☐ $y(3) = \frac{11}{3}$
- ☐ $y(3) = \frac{7}{3}$

Question 5 : La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$x^2 y''(x) - 5x y'(x) + 8y(x) = 0\,, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 2$ et $y'(1) = 0$ satisfait aussi

- ☐ $y(2) = -16$
- ☐ $y(2) = -32$
- ☐ $y(2) = -4$
- ☐ $y(2) = -8$

Question 6 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{y \ln\left(1 + \left(x^2 + y^2\right)^2\right)}{\left(x^2 + y^2\right)^{5/2} \exp\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)}$$

Alors

- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{1}{4}$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$
- ☐ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ n'existe pas

Question 7 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^5 - y^5}{x^4 + y^4} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = -1$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$
- ☐ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$

Question 8 : Soit $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \sqrt[3]{3x + 5y^3} .$$

Alors l'approximation linéaire de f autour du point $(x,y) = (1,1)$ évaluée en $(0.9, 1.1)$ est égale à

- ☐ 1.8
- ☐ 1.9
- ☐ 2.2
- ☐ 2.1

Question 9 : Soit $\vec{f} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la courbe définie par

$$\vec{f}(t) = \left(2t^2, t^3\right).$$

La longueur de la courbe est

- ☐ $\dfrac{61}{27}$
- ☐ $\dfrac{33}{35}$
- ☐ $\dfrac{107}{15}$
- ☐ $\dfrac{11}{12}$

Question 10 : Soit $\vec{f} : [0, \frac{\pi}{4}] \to \mathbb{R}^2$ la courbe paramétrée par

$$\vec{f}(t) = \left(4\sin^3(t), 4\cos^3(t)\right).$$

La longueur de la courbe $\vec{f}$ est égale à

- ☐ π
- ☐ 3
- ☐ $\dfrac{8}{3}$
- ☐ $\dfrac{9\pi}{2}$

Question 11 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction de deux variables définie par

$$f(x,y) = \frac{x^2+y^2-8y}{x^2+y^2+44}.$$

La courbe de niveau $\frac{1}{5}$ de f est

- ☐ la droite horizontale $y = -11/2$
- ☐ la droite horizontale $y = -55/2$
- ☐ le cercle de centre $(0,1)$ et rayon $\sqrt{12}$
- ☐ le cercle de centre $(0,5)$ et rayon 6

Question 12 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \frac{y}{x} + \left(1-\cos(y)\right)\sin^2(x)$$

et soit $\vec{p} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$. Le plan tangent au graphe de f en $\left(\vec{p}, f(\vec{p})\right)$ est donné par l'équation

- ☐ $z = -\dfrac{4}{\pi}\,x + \dfrac{2}{\pi}\,y$
- ☐ $z = -\dfrac{4}{\pi}\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \dfrac{2}{\pi}\,(y-\pi)$
- ☐ $z = \dfrac{2}{\pi}\,y - \dfrac{4}{\pi}\,x + 4$
- ☐ $z = \dfrac{2}{\pi}\,y + \dfrac{4}{\pi}\,x + 4$

Question 13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \ln\bigl(x^2+y\bigr)\cos\left(\frac{\pi}{x^2}\right)$$

pour $x > 0$ et $y > 0$. Alors la dérivée directionnelle de f au point $(1,1)$ dans la direction $\vec{e} = (0,1)$ est égale à

- ☐ $-\frac{1}{2}$
- ☐ $\frac{1}{2}$
- ☐ 2
- ☐ π

Question 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = x + x^2\, e^{\sin(y)}.$$

Alors la matrice hessienne de f est

- ☐ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & x^2\bigl(\cos(y)^2 - \sin(y)\bigr)e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} x^2\bigl(\cos(y)^2 - \sin(y)\bigr)e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & 2e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & -x^2\sin(y)\, e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$
- ☐ $\begin{pmatrix} 2e^{\sin(y)} & 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} \\ 2x\cos(y)\, e^{\sin(y)} & x^2\cos(y)^2\, e^{\sin(y)} \end{pmatrix}$

Question 15 : Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y,z) = 2z^3 - 3yx^3 - 6yz$$

et la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie implicitement par l'équation

$$f\bigl(x,y,g(x,y)\bigr) = 11\,.$$

Sachant que $g(1,3) = -2$, on a

- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 11$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{12}{5}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = \frac{9}{2}$
- ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,3) = 0$

Question 16 : Soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y,z) & \longmapsto & g(x,y,z) \end{array}$ une fonction quelconque de classe C^1.

Soit $\vec{h} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par

$$\vec{h}(u,v) = \big(ve^{-2u}\,,\, u^2e^{-v}\,,\, u\big)$$

et soit $f = g \circ \vec{h}$. Alors

- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial x}(0,1,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(0,1,1)$
- ☐ $\dfrac{\partial f}{\partial u}(1,0) = 2\,\dfrac{\partial g}{\partial y}(1,0,1) + \dfrac{\partial g}{\partial z}(1,0,1)$

Question 17 : Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\,,\ y \geq 1\,,\ x+y \leq 3\big\}$. Alors

- ☐ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{2-y} f(x,y)\,dx\right) dy$
- ☐ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^3 \left(\int_1^{3-x} f(x,y)\,dy\right) dx$
- ☐ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^2 \left(\int_1^{3-x} f(x,y)\,dy\right) dx$
- ☐ $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{3-x} \left(\int_1^{2} f(x,y)\,dx\right) dy$

Question 18 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine du premier quadrant limité par les courbes

$$\frac{y^2}{x} = 1\,, \qquad \frac{y^2}{x} = 2\,, \qquad \frac{y}{x^2} = 1\,, \qquad \frac{y}{x^2} = 2\,.$$

Alors l'intégrale

$$\iint_D \frac{3y^2}{x^4}\,dx\,dy$$

vaut

- ☐ -5
- ☐ -3
- ☐ 3
- ☐ 1

Question 19 : Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ le domaine du premier quadrant limité par les courbes

$$xy = 1\,, \qquad xy = 5\,, \qquad y = x \qquad \text{et} \qquad y = 7x\,.$$

L'intégrale double $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x^2}\,dx\,dy$ est égale à

- ☐ $3\ln(5)$
- ☐ $2\ln(7)$
- ☐ $24\ln(5)$
- ☐ $12\ln(7)$

Question 20 : Soit D le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ donné par

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq xy \leq 3,\ 0 < x \leq y \leq 3x\right\}$$

Alors l'aire de D est

- ☐ 4
- ☐ $\ln(3)$
- ☐ $1 - 2\ln(3)$
- ☐ $2\ln(3) - 1$

Deuxième partie, questions de type Vrai ou Faux

Pour chaque question, marquer la case VRAI si l'affirmation est **toujours vraie** ou la case FAUX si elle **n'est pas toujours vraie** (c'est-à-dire si elle est parfois fausse).

Question 21 : Soient h et k deux fonctions continues définies sur $\mathbb{R}$ avec $h(0) \neq 0$. S'il existe un nombre réel α tel que $k(x) = \alpha\, h(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors l'équation différentielle $y' + h(x)\, y = k(x)$ est séparable.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 22 : Si $y(x)$ est la solution générale d'une équation différentielle linéaire du premier ordre, alors pour toute constante $C \in \mathbb{R}$ la fonction $y_1(x) = y(x) + C$ est aussi solution de l'équation.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 23 : Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions d'une équation différentielle linéaire du deuxième ordre à coefficients constants, alors $y(x) = 2\big(y_1(x) - y_2(x)\big)$ est solution de l'équation linéaire homogène associée.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 24 : Soient $(\vec{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\vec{v}_k)_{k\geq 1}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$. Soit $(w_k)_{k\geq 1}$ la suite définie par

$$w_k = \vec{u}_k \cdot \vec{v}_k \qquad \text{pour tout } k \geq 1.$$

Si $(w_k)_{k\geq 1}$ est une suite convergente, alors les suites $(\vec{u}_k)_{k\geq 1}$ et $(\vec{v}_k)_{k\geq 1}$ convergent aussi.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 25 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(0,0) = 0$. Si pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ on a

$$\lim_{t\to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0,$$

alors f est continue en $(0,0)$.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 26 : Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, alors pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0).$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 27 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction et soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si f est différentiable en (x,y), alors

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,h - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\,k}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 28 : Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et soit $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en $\vec{p}$, alors $\vec{p}$ est un point stationnaire de f.

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 29 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. Alors pour tout $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h^2,y_0) - f(x_0,y_0)}{h^2}\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 30 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un ensemble borné et fermé $D \subset \mathbb{R}^2$ et soit $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ un ensemble borné et fermé. Si $G : \widetilde{D} \to D$ est une fonction bijective de classe C^1 alors on a

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} f\big(G(u,v)\big)\,\big|\det\big(J_G(u,v)\big)\big|\,du\,dv$$

☐ VRAI ☐ FAUX

Question 31 : Soient $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et $\vec{g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fonctions de classe C^1. Soit $\vec{h} = \vec{f} \circ \vec{g}$ et $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$. Alors

$$J_{\vec{h}}(\vec{p}\,) = J_{\vec{g}}\big(\vec{f}(\vec{p}\,)\big)\,J_{\vec{f}}(\vec{p}\,)\,.$$

☐ VRAI ☐ FAUX