# Analyse II **Série 9**

*MT, MX* 14 avril 2025

---

## En classe

**1.** Soit $f$ une fonction de deux variables réelles de classe $C^1$ et soit $g$ une fonction de trois variables réelles de classe $C^1$. Calculer les dérivées partielles de la fonction $h$ définie par

$$h(x,y) = g\big(x,y,f(x,y)\big)\,.$$

**2.** Calculer la dérivée directionnelle de $f(x,y) = 3x^2 + y^3$ au point $(3,2)$ suivant le vecteur $\left(\frac{12}{13}, -\frac{5}{13}\right)$.

**3.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \big||x| - |y|\big| - |x| - |y|$.

**a)** Déterminer les directions $\hat{e} = (e_1, e_2)$ pour lesquelles la dérivée directionnelle $D_{\hat{e}}f(0,0)$ existe.

**b)** Est-ce que la fonction $f$ est différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

**c)** Soit $(x_0, y_0)$ tel que $0 < y_0 < x_0$. Déterminer les directions $\hat{e}$ pour lesquelles $D_{\hat{e}}f(x_0,y_0)$ existe.

**d)** Soit $(x_0, y_0)$ tel que $0 < x_0 < y_0$. Déterminer les directions $\hat{e}$ pour lesquelles $D_{\hat{e}}f(x_0,y_0)$ existe.

**4.** **a)** Calculer le gradient de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ au point $(3,1)$.

**b)** Calculer la dérivée directionnelle de $f$ au point $(3,1)$ suivant le vecteur $\hat{e} = \frac{1}{\sqrt{10}}(1,3)$.

**c)** Au point $(3,1)$, dans quelle direction la dérivée de $f$ est-elle maximale (quelle est la valeur de cette dérivée maximale)? minimale (quelle est la valeur de cette dérivée minimale)?

**5.** Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leur nature (point selle, etc.):

**a)** $f(x,y) = 6y - x^2 - y^2$ **b)** $g(x,y) = x^2 - y^2 - 2x - 4y$ **c)** $h(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$

**6.** Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 1 \text{ et } y > -1\big\}$ et soit $f : D \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \ln\big(x^2 + y\big)$. Alors un vecteur $\vec{v}$ dans la direction orthogonale à la courbe de niveau de $f$ qui passe par le point $(2,0)$ est

☐ $\vec{v} = (4,1)$ ☐ $\vec{v} = (1,-4)$ ☐ $\vec{v} = (-4,1)$ ☐ $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, -1\right)$

**7.** Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x,y) = e^{-x-y}$. Alors la dérivée directionnelle de $g$ au point $(1,-1)$ suivant le vecteur $\hat{e} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ est égale à

☐ $-\sqrt{2}$ ☐ $0$ ☐ $\sqrt{2}$ ☐ $e^2$

**8.** Le nombre de points stationnaires de la fonction de deux variables

$$f(x,y) = (x+4)(2-y)(x-y+3)$$

est

☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4

**9.** Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

**a)** Si $\vec{\nabla}f(x_0,y_0) = (0,0)$ alors $(x_0,y_0)$ est un point stationnaire de la fonction $f$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

---

**Test intermédiaire (chapitres 1–3, séries 1–9):**
*Date:* lundi 28 avril de 17h45 à 18h45

---

**b)** Soit $f$ une fonction de deux variables. Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0)\right)^2 < 0$ alors $(x_0,y_0)$ est un point selle de la fonction $f$.

**c)** Soit $(x_0,y_0)$ un point stationnaire de la fonction de deux variables $f$ de classe $C^2$.
Si $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) < 0$ alors $(x_0,y_0)$ est un point selle de la fonction $f$.

## A domicile

**10.** Représenter les courbes de niveau $-2$, $0$ et $2$ de la fonction de deux variables $f(x,y) = x^2 - 2y$. Représenter ensuite sur le même graphique les gradients de $f$ aux points $(2,1)$, $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ et $(-2,3)$.

**11.** Soit $f$ une fonction de deux variables réelles de classe $C^1$ et soit $g$ définie par

$$g(r,\theta) = f\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big).$$

Vérifier l'égalité

$$\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2.$$

**12.** Trouver la dérivée directionnelle de la fonction $f(x,y) = 3x^4 - xy + y^3$ au point $(1,2)$ suivant le vecteur $\hat{e} = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

**13.** Considérer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

**a)** Déterminer les directions $\hat{e} = (e_1,e_2)$ pour lesquelles la dérivée directionnelle $D_{\hat{e}}f(0,0)$ existe.

**b)** Est-ce que la fonction $f$ est différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

**c)** Déterminer les directions $\hat{e} = (e_1,e_2)$ pour lesquelles la dérivée directionnelle $D_{\hat{e}}g(0,0)$ existe.

**d)** Est-ce que la fonction $g$ est différentiable en $(0,0)$? Justifier votre réponse.

**14.** Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \sin(x) + \sin(x+y)$.

**a)** Calculer la dérivée de $f$ dans la direction du vecteur $\frac{\sqrt{2}}{2}(1,-1)$ en tout point $(x,y)$ du plan.

**b)** Donner l'équation du plan tangent au graphe au point $(0,\pi,0)$.

**c)** Existe-t-il un point du graphe tel que le plan tangent au graphe en ce point soit horizontal? Si oui, lequel?

**15.** **a)** Calculer le gradient de la fonction $f(x,y) = \cos(x-y) + 5x + 3y^4$ au point $(1,1)$.

**b)** Calculer la dérivée directionnelle de $f$ au point $(1,1)$ suivant le vecteur $\hat{e} = \left(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

**c)** Au point $(1,1)$, dans quelle direction la dérivée de $f$ est-elle maximale (quelle est la valeur de cette dérivée maximale)? minimale (quelle est la valeur de cette dérivée minimale)? nulle?

**16.** Déterminer les points stationnaires des fonctions suivantes et étudier leur nature (point selle, etc.):

**a)** $f(x,y) = x^3 - 3x + y^3 - 3y$

**b)** $g(x,y) = y^2 + y\cos(x) - \sin(x) - 2$

**c)** $f(x,y) = (x^2+y^2)^2 - 8(x^2-y^2)$

**d)** $g(x,y) = 2x^2y - xy^2 - 6xy$