Analyse II **Série 8**

MT, MX 7 avril 2025

En classe

1. Calculer les dérivées partielles de premier et de deuxième ordre des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = x^3y + 3x^2 + y^3$ **b)** $g(x,y) = 2x\arcsin(y)$ **c)** $h(x,y) = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

2. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

b) Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

3. Donner l'équation du plan tangent au graphe de $f(x,y) = 1 + x^2 + y^2 - 2xy$ au point $(0,1,2)$.

4. **a)** Donner l'équation du plan tangent au graphe de $f(x,y) = \sqrt[5]{2x^3 + y^2}$ au point $(2,4,2)$.

b) Déterminer l'approximation linéaire de la fonction $f(x,y) = \sqrt[5]{2x^3 + y^2}$ autour du point $(2,4)$.

c) Trouver une valeur approchée de $f(1.9, 4.2)$ à l'aide de cette approximation. Comparer avec la valeur numérique (1.99191).

5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = e^{2y-x}$ et soit $\vec{p} = (2,1)$. Alors le plan tangent au graphe de f en $\big(\vec{p}, f(\vec{p})\big)$ est donné par l'équation

☐ $x - y + z - 2 = 0$ ☐ $x - 2y + z - 1 = 0$ ☐ $x + 2y - z + 3 = 0$ ☐ $x + y - z + 2 = 0$

6. Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x + y + xy\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Alors

☐ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ n'existe pas ☐ f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$

☐ f n'est pas continue en $(0,0)$ ☐ f est différentiable en $(0,0)$

7. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Soit f une fonction de deux variables. Si la fonction f est différentiable en (a,b) alors elle est continue en (a,b).

b) Soit f une fonction de deux variables. Si la fonction f est continue en (a,b) alors elle est différentiable en (a,b).

c) Soit f une fonction de n variables. Si les n dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_n}$ de la fonction f existent dans un voisinage de $\vec{a} \in D(f)$ alors la fonction f est différentiable en $\vec{a}$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

d) Soit f une fonction de deux variables. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions continues alors f l'est aussi.

e) Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$, alors f est de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$.

A domicile

8. Calculer les dérivées partielles de premier et de deuxième ordre des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = 4x^2 \sin(x+y)$ **b)** $g(x,y) = \arctan(xy)$ **c)** $h(x,y) = 4(xy+y^2)^2$

d) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ **e)** $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ **f)** $h(x,y) = (x+y)\tan(xy)$

9. Considérer un gaz qui obéit à l'équation de Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT\,,$$

où p est la pression du gaz, V son volume, T sa température, et a, b et R sont des constantes. Calculer les dérivées partielles de premier et de deuxième ordre de p par rapport à V et T.

10. Calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes:

a) $f(x,y,z) = x^3y^2z - y^2z^3$ **b)** $g(x,y,z) = \sin(xy) - z^2$ **c)** $h(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

11. Donner l'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y) = \dfrac{9}{x^2+y^2+1}$ au point $(2,2,1)$.

12. Considérer la fonction de deux variables réelles

$$f(x,y) = \frac{2}{xy}\,, \qquad \text{avec } D(f) = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x > 0,\ y > 0\big\}\,.$$

Donner l'équation du plan tangent au graphe de f au point $\big(x_0, y_0, f(x_0,y_0)\big)$ et vérifier qu'il forme avec les plans de coordonnées $0xy$, $0xz$ et $0yz$ un tétraèdre de volume égal à 9.

13. Trouver une valeur approchée de $\sqrt[5]{27(2.1)^2 + 5(3.1)^3}$ à l'aide d'une approximation linéaire d'une fonction de deux variables appropriée. Comparer avec la valeur numérique (3.059391537).

14. Considérer la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont définies sur $\mathbb{R}^2$.

c) Montrer que f est différentiable en tout $(x,y) \neq (0,0)$.

d) Montrer que f n'est pas différentiable en $(x,y) = (0,0)$.

e) Déterminer si les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$.