Analyse II **Série 7**

MT, MX 31 mars 2025

En classe

1. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes:

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$ **b)** $g(x,y)=\arcsin(2x)+\sqrt{xy}$ **c)** $h(x,y)=\dfrac{xy}{\sqrt{y-x^2+1}}$

2. Représenter les courbes de niveau et esquisser le graphe de la fonction de deux variables

$$f(x,y)=|2x-y+1|\,.$$

3. Considérer la fonction $f(x,y)=\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$, avec $(x,y)\neq(0,0)$.

a) Utiliser les coordonnées polaires pour calculer la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

b) Déterminer le prolongement par continuité au point $(0,0)$ de la fonction f.

4. Le domaine de définition de la fonction $f(x,y)=\ln(4x^2+4y^2-1)+\dfrac{\sqrt{y-x^2+1}}{\sqrt{2-y}}$ est

- ☐ fermé et non borné
- ☐ compact
- ☐ borné et non fermé
- ☐ ouvert

5. Le domaine de définition de la fonction $g(x,y)=\dfrac{\ln(x)\ln(y-x)}{xy-1}$ est

- ☐ fermé et non borné
- ☐ compact
- ☐ borné et non fermé
- ☐ ouvert

6. La courbe de niveau $c>0$ de la fonction

$$f(x,y)=(x^2+y^2)^{-3/2}$$

est le cercle centré à l'origine de rayon

- ☐ $c^{-2/3}$
- ☐ $c^{2/3}$
- ☐ $c^{-1/3}$
- ☐ $c^{1/3}$

7. La limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{4x^2-9y^2}{x^2+y^2}$

- ☐ vaut 0
- ☐ vaut 2
- ☐ vaut -9
- ☐ n'existe pas

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Le graphe de n'importe quelle fonction de deux variables est un ensemble de niveau d'une fonction de trois variables.

b) L'ensemble de niveau c de n'importe quelle fonction de deux variables est le graphe d'une fonction d'une variable.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Soit f une fonction de deux variables. Si $\lim_{x\to 0} f(x,0) = L$ et $\lim_{y\to 0} f(0,y) = L$ alors
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L\,.$$

b) Soit f une fonction de deux variables et soit $g : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\lim_{r\to 0^+} g(r) = 0$. S'il existe un nombre $\theta_0 \in [0,2\pi[$ tel que
$$\left|f\big(r\cos(\theta_0)\,,\, r\sin(\theta_0)\big)\right| \leqslant g(r) \qquad \text{pour tout } r>0,$$
alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

c) Soit f une fonction de deux variables et $(a,b)\in D(f)$. Si la limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ existe et est finie alors la fonction f est continue au point $(a,b)\in D(f)$.

d) Si f et g sont des fonctions de deux variables telles que leur somme $f+g$ et leur produit fg sont des fonctions continues, alors f et g sont aussi continues.

A domicile

10. Déterminer et représenter graphiquement le domaine de définition des fonctions suivantes:

a) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{1+x}}{x^2-y^2}$ **b)** $g(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-|y|}}$ **c)** $h(x,y) = \dfrac{y}{\sqrt{y-x^2}}$

11. Considérer les fonctions de deux variables réelles
$$f(x,y) = x^2+y^2-2x-2 \qquad \text{et} \qquad g(x,y) = \frac{x^2}{y}\,.$$
Pour chacune de ces fonctions:

a) Déterminer son domaine de définition.

b) Représenter ses courbes de niveau -4, -2, -1, 0, 1, 2, 4.

12. Déterminer le domaine de définition et représenter les courbes de niveau de la fonction
$$f(x,y) = \frac{9}{x^2+y^2+1}\,.$$

13. Considérer les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0,0)\big\}$:

a) $f(x,y) = \dfrac{8x-9y}{3y-2x}$ **b)** $g(x,y) = \dfrac{4x^3-3y^3}{x^2+y^2}$ **c)** $h(x,y) = \dfrac{1-\cos\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)}{x^2+y^2}$

Déterminer (s'il existe) le prolongement par continuité au point $(0,0)$.

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`