Analyse II
MT, MX

Série 6
24 mars 2025

En classe

1. Montrer que $\|\vec{x}\|_\infty = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

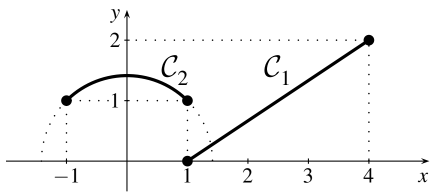
2. Montrer que la norme $\|\cdot\|_\infty$ est equivalente à la norme euclidienne:

$$\|\vec{x}\|_\infty \leqslant \|\vec{x}\| \leqslant \sqrt{n}\,\|\vec{x}\|_\infty\,, \qquad \text{pour tout } \vec{x}\in\mathbb{R}^n.$$

3. Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

a) $A = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\| \leqslant 1\}$ **b)** $B = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_\infty \leqslant 1\}$ **c)** $C = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^2 :\ \|\vec{x}\|_1 \leqslant 1\}$

4. Soit $\mathcal{C}_1$ le segment reliant les points $(1,0)$ et $(4,2)$ et soit $\mathcal{C}_2$ l'arc de cercle représenté ci-contre. Donner deux paramétrisations pour chacune des courbes et calculer les vecteurs tangents respectifs.



5. Calculer la longueur de l'arc d'astroïde

$$\vec{f}(t) = \big(R\cos^3(t)\,, R\sin^3(t)\big)\,, \qquad \text{avec } 0\leqslant t\leqslant \tfrac{\pi}{2}.$$

6. Soient les sous-ensembles

$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y\leqslant x\} \qquad \text{et} \qquad B = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2=4\}\,.$$

Alors l'ensemble non vide $A\cap B\subset\mathbb{R}^2$ est

- ☐ ouvert et borné
- ☐ ouvert et non borné
- ☐ fermé et borné
- ☐ fermé et non borné

7. La longueur de la courbe paramétrée par $\vec{f}(t) = \left(\frac{4}{3}t^{3/2}\,,\ t-\frac{1}{2}t^2\right)$, avec $t\in[0,2]$, est égale à

- ☐ $\frac{26}{3}$
- ☐ 7
- ☐ 4
- ☐ $\frac{20}{3}$

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\overset{\circ}{\overline{E}} = E$.

b) Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{\overset{\circ}{E}} = E$.

c) Si E et F sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$, alors $\overline{(E\cap F)} = \overline{E}\cap\overline{F}$.

9. Soient $(\vec{u}_k)_{k\geqslant 1}$ et $(\vec{v}_k)_{k\geqslant 1}$ deux suites d'éléments de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $(\vec{u}_k)_{k\geqslant 1}$ est telle que $\|\vec{u}_k\| = 1$ pour tout $k\geqslant 1$, alors il existe $\vec{u}\in\mathbb{R}^n$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$ et $\lim\limits_{k\to+\infty}\vec{u}_k = \vec{u}$.

b) Si $(\vec{v}_k)_{k\geqslant 1}$ converge vers $\vec{v}\in\mathbb{R}^n$, alors la suite $\big(\|\vec{v}_k\|\big)_{k\geqslant 1}$ converge vers $\|\vec{v}\|\in\mathbb{R}$.

c) Si $(\vec{u}_k+\vec{v}_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite convergente, alors les suites $(\vec{u}_k)_{k\geqslant 1}$ et $(\vec{v}_k)_{k\geqslant 1}$ convergent aussi.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 6
Suite

A domicile

10. Soit E un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$ et soit $E^c = \mathbb{R}^n \setminus E$. Montrer que $\partial E = \partial(E^c)$.

11. Considérer l'espace $\mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne $\|\vec{x}\| = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}$.
Soit $|||\cdot|||$ une autre norme sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que

$$|||\vec{x}||| \leqslant C\|\vec{x}\|, \qquad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n,$$

où $C = \left(\sum_{k=1}^{n} |||\vec{e}_k|||^2\right)^{1/2}$ et $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Indication: Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

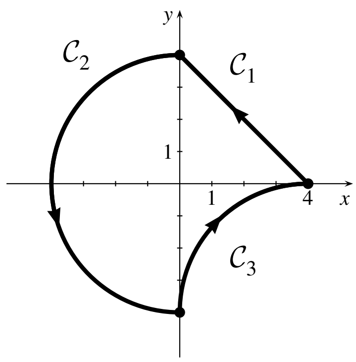
12. Montrer que $\|\vec{x}\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

13. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ est equivalente à la norme euclidienne:

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\,\|\vec{x}\|_1 \leqslant \|\vec{x}\| \leqslant \|\vec{x}\|_1, \qquad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathbb{R}^n.$$

Indication: Utiliser l'exercice 11.

14. Soit $\mathcal{C}_1$ le segment reliant les points $(4,0)$ et $(0,4)$, et soient $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les arcs de cercle représentés ci-contre.
Donner une paramétrisation pour chacune des courbes et calculer les vecteurs tangents respectifs.



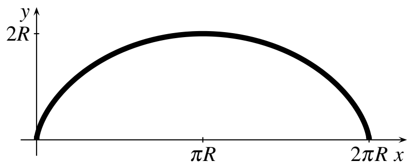
15. Calculer la longueur de l'arc de la courbe d'équation

$$y = \frac{x^2}{8} - \ln(x)$$

entre les points d'abscisse $x = 1$ et $x = 2$.

16. Calculer la longueur de l'arc de cycloïde

$$\vec{f}(t) = \Big(R\big(t - \sin(t)\big), R\big(1 - \cos(t)\big)\Big), \qquad \text{avec } 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$$



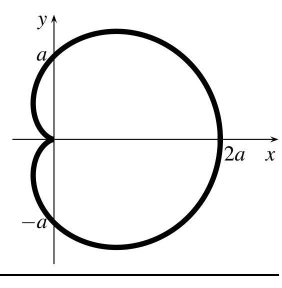
17. Considérer une courbe définie en coordonnées polaires par $r = r(\theta)$ avec $\theta \in [\alpha, \beta]$.
Montrer que la longueur de l'arc de cette courbe est donnée par

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(r(\theta)\big)^2 + \big(r'(\theta)\big)^2}\, d\theta.$$

18. Calculer la longueur de la cardioïde

$$r(\theta) = a\big(1 + \cos(\theta)\big), \qquad \text{où } a > 0 \text{ et } \theta \in [0, 2\pi].$$

Indication: Utiliser la formule de l'exercice 17.



Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`