Analyse II **Série 5**

MT, MX 17 mars 2025

En classe

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = \frac{e^x}{x}\,, \qquad \text{avec } x > 0.$$

2. **a)** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle de Cauchy-Euler

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = 0\,, \qquad \text{avec } x > 0.$$

b) Utiliser la méthode de la variation des constantes pour déterminer la solution générale de

$$x^2y''(x) - 3xy'(x) + 3y(x) = x^2 + 2x\,, \qquad \text{avec } x > 0.$$

3. *Réduction de l'ordre:*

Considérer l'équation différentielle linéaire homogène

$$y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = 0\,, \qquad (\star)$$

où g et h sont deux fonctions continues définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Si une solution y_1 de l'équation différentielle $(\star)$ sur I est connue, alors il est possible de trouver une deuxième solution de $(\star)$ sur I, linéairement indépendante de y_1, de la forme

$$y_2(x) = v(x)y_1(x)\,, \qquad \text{où } v \text{ est une fonction inconnue à déterminer.}$$

Pour trouver v, il suffit de résoudre l'équation différentielle obtenue en remplaçant y_2 dans $(\star)$.

Cette méthode est appelée *réduction de l'ordre* car l'équation différentielle d'ordre 2 pour v est en fait une équation différentielle d'ordre 1 pour v'.

Soit $k \in \mathbb{R}$ un nombre fixé. Appliquer la méthode de réduction de l'ordre à l'équation différentielle

$$y''(x) - 2ky'(x) + k^2y(x) = 0$$

sachant que $y_1(x) = e^{kx}$ est une solution de cette équation différentielle.

4. Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 < x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4\}$

Déterminer s'ils sont ouverts ou fermés et donner l'intérieur, le bord et l'adhérence.

5. La solution $u(t)$ de l'équation différentielle

$$u''(t) - 4u'(t) + 5u(t) = 8\sin(t)\,, \qquad \text{pour } t \in \mathbb{R}$$

avec les conditions initiales $u(0) = 2$ et $u'(0) = 5$ est :

- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) - \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = -\sin(t)\big(2e^{2t} + 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$
- ☐ $u(t) = \sin(t)\big(4e^{2t} - 1\big) + \cos(t)\big(e^{2t} + 1\big)$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

6. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) - \cos(x)\, y(x) + \cos(x)\, \big(y(x)\big)^2 = 0\,, \qquad \text{pour } x \in \mathbb{R},$$

avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{2}$ est :

☐ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\sin(x)}}$ ☐ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\sin(x)}}$

☐ $y(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-\sin(x)/2}}$ ☐ $y(x) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\sin(x)}$

7. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle de Cauchy-Euler

$$x^2 y''(x) + 6x\, y'(x) + 4y(x) = 0\,, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 0$ et $y'(1) = 6$ satisfait aussi :

☐ $y(2) = \frac{1}{8}$ ☐ $y(2) = \frac{3}{16}$ ☐ $y(2) = \frac{7}{16}$ ☐ $y(2) = \frac{7}{8}$

8. L'ensemble $E = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 9 - (y-x)^2 > 0\big\}$

☐ est fermé et borné ☐ est borné, mais pas fermé

☐ est fermé, mais pas borné ☐ n'est ni fermé, ni borné

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathring{E} \subset E$.

b) Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\partial E \subset E$.

c) Si E est un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^n$, alors $\mathring{E} \cap \partial E = \varnothing$.

A domicile

10. Montrer que

$$\int \frac{1}{\cos(x)}\, dx = \ln\left|\frac{1 + \sin(x)}{\cos(x)}\right| + c\,, \qquad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

Indication: Utiliser l'un des changement de variables $u = \tan\left(\dfrac{x}{2}\right)$ ou $t = \sin(x)$.

11. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y''(x) + y(x) = f(x)\,, \qquad \text{avec } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[,$$

dans les cas suivants:

a) $f(x) = \tan(x)$ **b)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$ **c)** $f(x) = \dfrac{1}{\cos^3(x)}$ **d)** $f(x) = \dfrac{\cos(x) + 1}{\cos^3(x)}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

12. Considérer l'équation différentielle linéaire homogène

$$y''(x) + g(x)y'(x) + h(x)y(x) = 0\,, \qquad (\star)$$

où g et h sont deux fonctions continues définies sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$.

Soient y_1 et y_2 deux solutions de $(\star)$ sur l'intervalle I et soit $W(x)$ le wronskien de y_1 et y_2.

a) Calculer la dérivée du wronskien et montrer que $W'(x) = -g(x)W(x)$.

b) Trouver la solution générale de l'équation différentielle $W'(x) = -g(x)W(x)$ et montrer que le wronskien est soit identiquement nul sur I, soit ne s'annule pas sur I.

c) Montrer que si $W(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$ et a et b sont deux zéros successifs de y_1 sur I, alors y_2 possède forcément un zéro dans l'intervalle $]a,b[$.

13. Déterminer la solution générale des équations différentielles de Cauchy-Euler suivantes

a) $x^2y''(x) + 4xy'(x) - 10y(x) = 0\,, \qquad$ avec $x > 0$

b) $x^2y''(x) + xy'(x) = 0\,, \qquad$ avec $x > 0$

14. Vérifier que $y_1(x) = x$ est une solution de l'équation différentielle

$$x^2y''(x) - xy'(x) + y(x) = 0\,, \qquad \text{avec } x > 0.$$

Utiliser la méthode de réduction de l'ordre décrite dans l'exercice 3 pour trouver une deuxième solution y_2 de cette équation différentielle, linéairement indépendante de y_1.

15. Représenter graphiquement les sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$:

a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 9\}$

b) $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\,,\ x \neq 0\}$

c) $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < x\}$

d) $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 > x^2\}$

Déterminer s'ils sont ouverts ou fermés et donner l'intérieur, le bord et l'adhérence.

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`