Analyse II **Série 4**
MT, MX 10 mars 2025

En classe

1. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires homogènes suivantes:

a) $y''' - 6y'' + 25y' = 0$ **b)** $y''' - y'' - 8y' + 12y = 0$

2. Résoudre l'équation linéaire inhomogène

$$y'''(x) - 3y'(x) + 2y(x) = f(x)$$

dans les cas suivants:

a) $f(x) = 8e^{-3x}$ **b)** $f(x) = 3e^{-2x}$ **c)** $f(x) = e^{x}$ **d)** $f(x) = 8e^{-3x} + 3e^{-2x} + e^{x}$

3. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle inhomogène

$$y''(x) - 2y'(x) + 10y(x) = xe^{2x}\,.$$

4. Déterminer la solution de l'équation différentielle inhomogène

$$y''(x) - 4y(x) = 4\sin(2x)$$

qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 4$ et $y'(0) = 3$.

5. Tout ce que nous savons au sujet d'une mystérieuse équation différentielle de deuxième ordre à coefficients constants $y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$ est que

$y_1(x) = x^2 - x + e^x\cos(3x)$, $y_2(x) = x^2 - x + e^x\sin(3x)$ et $y_3(x) = x^2 - x + e^x\cos(3x) + e^x\sin(3x)$

sont trois solutions de l'équation différentielle.

a) Déterminer deux solutions linéairement indépendantes de $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

b) Déterminer b, c et $f(x)$.

6. La solution de l'équation différentielle linéaire homogène $y''(x) - 8y'(x) + 41y(x) = 0$ qui satisfait les conditions initiales $y(0) = 7$ et $y'(0) = -2$ est

- ☐ $y(x) = 37e^{4x} - 30e^{5x}$
- ☐ $y(x) = 7e^{4x}\cos(5x) - 6e^{4x}\sin(5x)$
- ☐ $y(x) = 7e^{5x} - 37xe^{5x}$
- ☐ $y(x) = 7e^{5x}\cos(4x) - \frac{37}{4}e^{5x}\sin(4x)$

7. La solution $u(t)$ de l'équation différentielle $u''(t) - u'(t) - 2u(t) = 4t - 2$ pour $t \in \mathbb{R}$ avec les conditions initiales $u(0) = 0$ et $u'(0) = 3$ satisfait aussi :

- ☐ $u(1) = e^2 - 3e^{-1}$
- ☐ $u(1) = e - e^{-2}$
- ☐ $u(1) = e^2 - e^{-1}$
- ☐ $u(1) = -2e^{-2} - 2e + 2$

8. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si la fonction $y(x) = e^{\lambda x}$ est une solution de l'équation différentielle linéaire inhomogène à coefficients constants $y''(x) + by'(x) + cy(x) = f(x)$, alors λ n'est pas une racine du polynôme caractéristique $P_c(\lambda) = \lambda^2 + b\lambda + c$.

b) Il est possible de trouver des nombres b et c tels que la fonction $y(x) = x^2e^x$ soit une solution de l'équation différentielle linéaire homogène à coefficients constants $y''(x) + by'(x) + cy(x) = 0$.

c) Si $y_1(x)$ et $y_2(x)$ sont deux solutions d'une équation différentielle linéaire de deuxième ordre à coefficients constants, alors $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ est aussi une solution.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

A domicile

9. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires homogènes suivantes:

a) $y''' + 2y'' + 5y' = 0$ **b)** $y''' + 7y'' + 8y' - 16y = 0$

10. Résoudre l'équation linéaire inhomogène

$$y'''(x) + 4y''(x) - 3y'(x) - 18y(x) = f(x)$$

dans les cas suivants:

a) $f(x) = 9xe^{-x}$ **b)** $f(x) = 5e^{2x}$ **c)** $f(x) = e^{-3x}$ **d)** $f(x) = 9xe^{-x} + 5e^{2x} + e^{-3x}$

11. *Modèle de réaction chimique $A \to B \to C$:*

Supposons qu'une substance A réagit, sous de bonnes conditions, pour produire une substance B qui elle-même produit une substance C. Un modèle linéaire simple de ce processus est le suivant:

$$\begin{aligned} a'(t) &= -\alpha a(t)\,, \\ b'(t) &= \alpha a(t) - \beta b(t)\,, \\ c'(t) &= \phantom{-\alpha a(t) -{}} \beta b(t)\,, \end{aligned}$$

où a, b et c désignent les concentrations des substances A, B et C au temps t et α et β sont des constantes positives. Nous supposons de plus que $a(0) = 1$ et $b(0) = 0$.

a) Est-ce que ce modèle vous semble raisonnable? Justifier votre réponse.

b) Eliminer $a(t)$ des deux premières équations pour obtenir l'équation décrivant l'évolution de la concentration b en fonction du temps

$$b''(t) + (\alpha + \beta)b'(t) + \alpha\beta b(t) = 0 \qquad (\star)$$

c) Trouver la solution générale de cette équation différentielle.

d) Prendre $\alpha = 2$ et $\beta = 3$. Déterminer la solution $b(t)$ de l'équation différentielle $(\star)$ qui satisfait les conditions initiales du problème et étudier son comportement.

12. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y^{(4)}(x) + 8y''(x) + 16y(x) = 0\,.$$

13. Trouver les valeurs de A et B pour que la fonction $y(x) = A\sin(2x)e^{-x} + Bxe^{3x}$ soit solution de

$$y'''(x) - 7y'(x) - 6y(x) = 4\cos(2x)e^{-x} - 3\sin(2x)e^{-x} + 2e^{3x}\,.$$

14. Donner la solution générale de l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y'''(x) - 2y''(x) + 4y'(x) - 8y(x) = 3e^{2x} + \sin(4x)\,.$$

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`