Analyse II **Série 3**

MT, MX 3 mars 2025

En classe

1. Un village isolé de montagne compte 1000 habitants. L'un d'eux rentre au village portant le virus de la grippe. On suppose que la vitesse de propagation $y'(t)$ du virus est proportionnelle non seulement au nombre $y(t)$ de personnes infectées mais aussi au nombre de personnes pas infectées. En sachant qu'après 4 jours le nombre de malades dans le village est $y(4) = 25$, déterminer le nombre de malades après 7 jours et après 12 jours.

2. Trouver la solution générale de l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) - 4x\ln(x) = 0, \qquad \text{avec } x > 0$$

et déterminer ensuite la solution qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$.

3. Vérifier que les équations différentielles suivantes:

a) $y'(x) = \dfrac{x + y(x)}{x}$ avec $x > 0$ **b)** $y'(x) = \dfrac{3y^2(x) + 4x^2}{2xy(x)}$ avec $x > 0$

sont homogènes et les résoudre en posant $y(x) = xu(x)$.

4. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli

$$xy'(x) = y(x) + \big(y(x)\big)^2, \qquad \text{avec } x > 0.$$

5. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires homogènes suivantes:

a) $y'' - 6y' - 16y = 0$ **b)** $y'' - 6y' + 9y = 0$ **c)** $y'' - 6y' + 25y = 0$

6. Déterminer la solution de l'équation différentielle homogène

$$y''(x) + 3y'(x) = 0$$

qui satisfait les conditions initiales $y(1) = 5$ et $y'(1) = -6$.

7. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$xy'(x) - 4y(x) = x^5 e^x, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(2) = 16e^2$
- ☐ $y(2) = 16e$
- ☐ $y(2) = 16(e^2 - e)$
- ☐ $y(2) = 16(e^2 + e)$

8. La solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x)\sin(x) + y(x)\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0, \qquad \text{avec } x \in \,]0, \pi[.$$

est

- ☐ $y(x) = \dfrac{\sin^2(x) + C}{\cos(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = e^{-\ln(\sin(x))}\cos(2x) + \dfrac{C}{\sin(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{\cos^2(x) + C}{\sin(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$
- ☐ $y(x) = \dfrac{\sin^2(x) + C}{\sin(x)}$, avec $C \in \mathbb{R}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 3
Suite

---

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si y est solution d'une équation différentielle de premier ordre sur un intervalle ouvert $I \subset \mathbb{R}$, alors y est dérivable sur I.

b) Si y_1 et y_2 sont deux solutions d'une équation différentielle séparable, alors $y = y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation.

c) Si y_1 et y_2 sont deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène de premier ordre, alors $y = y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation.

d) Si y_1 et y_2 sont deux solutions d'une équation différentielle linéaire inhomogène de premier ordre, alors $y = y_1 + y_2$ est aussi une solution de cette équation.

A domicile

10. **a)** Donner la solution générale de l'équation différentielle

$$xy'(x) + y(x) - e^x = 0, \qquad \text{avec } x > 0.$$

b) Déterminer la solution de cette équation qui satisfait la condition initiale $y(a) = b$.

11. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$xy'(x) + 3\big(y(x) + x^2\big) = \frac{\sin(x)}{x}, \qquad \text{pour } x > 0.$$

12. Considérer l'équation différentielle linéaire inhomogène $y'(x) = 2y(x) + f(x)$.

a) Soit $f(x) = x$. Chercher une solution particulière de la forme

$$y_{\mathrm{p}}(x) = ax + b, \qquad \text{où } a, b \in \mathbb{R} \text{ sont à déterminer.}$$

b) Soit $f(x) = 5\cos(x)$. Chercher une solution particulière de la forme

$$y_{\mathrm{p}}(x) = A\cos(x) + B\sin(x), \qquad \text{où } A, B \in \mathbb{R} \text{ sont à déterminer.}$$

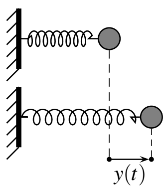
13. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle de Bernoulli

$$y'(x) = -2xy(x) + 2x^3\big(y(x)\big)^3.$$

14. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires homogènes suivantes:

a) $y'' + 8y' - 20y = 0$ **b)** $y'' + 8y' + 16y = 0$ **c)** $y'' + 8y' + 41y = 0$

15. Un corps de masse m est accroché à l'extrémité droite d'un ressort horizontal dont l'extrémité gauche est fixe. Le corps peut se déplacer le long d'un axe horizontal. Soit $y(t)$ la position du corps au temps t (la position de repos étant $y = 0$, voir dessin ci-contre). Le mouvement du corps est décrit par l'équation différentielle



$$my''(t) = -\kappa y(t) - \mu y'(t),$$

où κ est la constante du ressort et μ est le coefficient de frottement qui tient compte de la résistance du milieu ambiant. Sachant que la position initiale est $y(0) = 0$ et la vitesse initiale $y'(0) = 1\,\mathrm{m/s}$, résoudre l'équation différentielle dans les cas suivants:

a) $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\kappa = 85\,\mathrm{N/m}$, $\mu = 4\,\mathrm{kg/s}$ **b)** $m = 1\,\mathrm{kg}$, $\kappa = 85\,\mathrm{N/m}$, $\mu = 22\,\mathrm{kg/s}$