Analyse II — Série 2

MT, MX — 24 février 2025

En classe

1. Déterminer la solution générale de l'équation différentielle

$$y'(x)\cos^2(x) + y(x) = 0, \qquad \text{avec } x \in \left]-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right[.$$

2. **a)** Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'(x) + 2xy(x) = 0.$$

b) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle linéaire inhomogène

$$y'(x) + 2xy(x) = x.$$

3. Déterminer la solution de l'équation différentielle

$$y'(x) = \frac{y(x)}{2x} + x^2, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = -1$.

4. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$xy'(x) - y(x) = x, \qquad \text{avec } x > 0,$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

☐ $y(2) = \ln(2)$ ☐ $y(2) = 2\ln(2)$ ☐ $y(2) = -2\ln(2)$ ☐ $y(2) = 2\ln(2) + 2$

5. La solution de l'équation différentielle

$$y'(x)\tan(x) = y(x) + 1, \quad \text{avec } x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[,$$

qui satisfait la condition initiale $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ est

☐ $y(x) = \sin(x)$ ☐ $y(x) = 3\sin(x) - 1$ ☐ $y(x) = 1 - \sin(x)$ ☐ $y(x) = 2 - 3\sin(x)$

6. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + y(x) = e^{-x}$$

qui satisfait la condition initiale $y(0) = 3$ vérifie aussi

☐ $y(-3) = 0$ ☐ $y(-3) = 6e^3$ ☐ $y(-3) = 6e^{-3}$ ☐ $y(-3) = 6$

7. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Soit $y(x)$ une solution d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre définie sur un intervalle ouvert I. Alors pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, la fonction $y_1(x) = y(x) + c$ est aussi solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

b) Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre définie sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est aussi solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

c) Soient $y_1(x)$ et $y_2(x)$ deux solutions d'une équation différentielle linéaire du premier ordre définie sur un intervalle ouvert I. Alors la différence $y(x) = y_1(x) - y_2(x)$ est aussi solution de cette même équation différentielle sur l'intervalle I.

d) Si l'équation différentielle $y'(x) + g(x)y(x) = f(x)$ possède une solution constante, alors le terme inhomogène $f(x)$ est un multiple de la fonction $g(x)$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 2
Suite

A domicile

8. Déterminer la solution de l'équation différentielle
$$(1+x^2)y'(x) = 2x\big(y(x)\big)^2$$
qui satisfait la condition initiale $y(0) = 4$.

9. Déterminer la solution de l'équation différentielle
$$y'(x) = \big(x+y(x)\big)^2$$
qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ à l'aide du changement de variables $u(x) = y(x)+x$.

10. La croissance logistique d'une population est décrite par l'équation différentielle
$$y'(x) = ay(x)\big(b-y(x)\big) \qquad \text{avec } a,b \in \mathbb{R} \text{ des constantes.}$$
Résoudre cette équation pour $a = 4$ et $b = 1$.

Indication: Utiliser la décomposition en éléments simples.

Déterminer ensuite la solution particulière qui vérifie $y(0) = 0.05$. Esquisser cette solution.

11. A la sortie du four, la température d'un cake est de 180℃. Dix minutes plus tard elle est de 100℃. Si la température ambiante est de 20℃, après combien de temps la température du cake sera de 28℃?

12. Déterminer la solution générale des équations différentielles suivantes

a) $y'(x)+y(x)\cos(x) = 0$. **b)** $y'(x)+y(x)\cos(x) = \sin(2x)+\cos(x)$.

13. Déterminer la solution générale des équations différentielles linéaires inhomogènes suivantes:

a) $xy'(x) = y(x)+x$, avec $x > 0$. **b)** $xy'(x) = y(x)+x$, avec $x < 0$.

14. Déterminer la solution de l'équation différentielle
$$x^2y'(x) - y(x) = 1, \qquad \text{avec } x > 0,$$
qui satisfait la condition initiale $y(1) = 2$.

15. Déterminer la solution de l'équation différentielle
$$y'(x)\cos(x)+y(x)\sin(x) = 1, \qquad \text{avec } -\tfrac{\pi}{2} < x < \tfrac{\pi}{2},$$
qui satisfait la condition initiale $y(0) = 2$.

16. Le taux d'alcoolémie $A(t)$ (quantité d'alcool par litre de sang) d'une personne ayant absorbé, à jeun, une certaine quantité d'alcool vérifie l'équation différentielle
$$A'(t) = ae^{-t} - A(t),$$
où t est le temps écoulé après une ingestion (exprimé en heures) et a est une constante qui dépend de la quantité d'alcool absorbée et du poids à jeun de la personne.

Résoudre cette équation et trouver la solution qui satisfait $A(0) = 0$.

Esquisser cette solution pour $a = 5$ et déterminer le taux d'alcoolémie maximal et le temps au bout duquel il est atteint.