Analyse II Série 14

MT, MX — 26 mai 2025

En classe

1. Soit D le tétraèdre dont les sommets sont les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Calculer

$$\iiint_D (x^2+z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Indication: Utiliser la formule d'intégration sur le tétraèdre vue au cours.

2. Soit D le quart de boule de rayon 2 centrée à l'origine avec $y \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D yz\,dx\,dy\,dz\,.$$

3. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\vec{f}(x,y) = \left(e^{\tan(y+2x)}, e^{\sin(4y-2x)}\right)$.
Alors la matrice jacobienne $J_{\vec{f}}(x,y)$ de $\vec{f}$ évaluée au point $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ est:

☐ $\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

4. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\vec{f}(x,y,z) = \big(\cos(xz), \sin(y-z)\big)$.
Alors la matrice jacobienne $J_{\vec{f}}(x,y,z)$ de $\vec{f}$ évaluée au point $\vec{p} = \left(1, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ est égale à:

☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\begin{pmatrix} -\frac{\pi}{2} & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

5. Soient $D = \left\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : \ u+v \neq 0\right\}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(u,v) = \ln\big(u^2+2uv+v^2\big)\,.$$

Soit $\vec{g} : \mathbb{R}^2 \to D$ une fonction différentiable telle que $\vec{g}(0,3) = (0,-3)$ et

$$J_{\vec{g}}(0,3) = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix},$$

où $J_{\vec{g}}$ est la matrice jacobienne de $\vec{g}$. Si $h = f \circ \vec{g}$, alors

☐ $\vec{\nabla} h(0,3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{\nabla} h(0,3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

☐ $\vec{\nabla} h(0,3) = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \end{pmatrix}$ ☐ $\vec{\nabla} h(0,3) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

6. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est la boule de rayon $R > 0$ centrée à l'origine, alors $\displaystyle\iiint_D x\,dx\,dy\,dz = 0$.

b) Si $D \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine tel que $\mathcal{V}(D) > 0$, alors $\displaystyle\iiint_D \sqrt{1+x^2+y^2+z^2}\,dx\,dy\,dz > 0$.

c) Si $G, H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sont deux changement de variables de classe C^1, alors

$$J_{H\circ G}(\vec{s}) = J_H(\vec{s})\,J_G(\vec{s})\,.$$

d) Si $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est un changement de variables de classe C^1, alors $J_{G^{-1}}\big(G(\vec{s})\big) = \big(J_G(\vec{s})\big)^{-1}$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 14
Suite

A domicile

7. Soit D le tétraèdre dont les sommets sont les points $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$. Calculer

$$\iiint_D \frac{1}{(x+y+z+1)^3}\,dx\,dy\,dz\,.$$

Indication: Utiliser la formule d'intégration sur le tétraèdre vue au cours.

8. Calculer le volume du domaine D borné par le cône $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 3(x^2+y^2) = z^2\,,\ z \geqslant 0\}$ et par la sphère $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2+y^2+z^2 = 4\}$,

a) en utilisant les coordonnées sphériques,

b) en utilisant les coordonnées cylindriques.

9. Soit D le quart de boule de rayon 3 centrée à l'origine avec $x \leqslant 0$ et $z \geqslant 0$. Calculer l'intégrale

$$\iiint_D (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz\,.$$

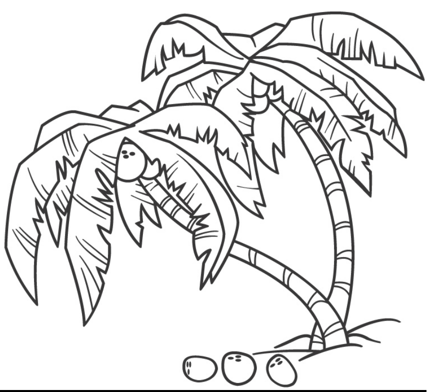
10. **a)** Calculer le volume $\mathcal{V}(D)$ du domaine $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 1 \leqslant x^2+y^2+z^2 \leqslant 4\,,\ z \geqslant 0\}$.

b) Calculer le barycentre $(b_x, b_y, b_z) \in \mathbb{R}^3$ de ce domaine défini par

$$b_x = \frac{1}{\mathcal{V}(D)}\iiint_D x\,dx\,dy\,dz\,, \qquad b_y = \frac{1}{\mathcal{V}(D)}\iiint_D y\,dx\,dy\,dz\,, \qquad b_z = \frac{1}{\mathcal{V}(D)}\iiint_D z\,dx\,dy\,dz\,.$$

11. Utiliser les coordonnées cylindriques pour calculer l'intégrale triple

$$I = \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \left(\int_0^{a^2-x^2-y^2} x^2\,dz\right) dy\right] dx\,, \qquad \text{avec } a > 0.$$



Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`