Analyse II
MT, MX

Série 13
19 mai 2025

En classe

1. Esquisser le domaine

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2+y^2 \leqslant 1\,,\ x+y \leqslant 0\right\}$$

et calculer l'intégrale double

$$\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dx\,dy\,.$$

2. Calculer l'aire du parallélogramme D engendré par les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{a}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

3. Considérer le changement de variables

$$\begin{cases} u = xy \\ v = xy^2 \end{cases} \qquad \text{avec } x,y>0.$$

Calculer le jacobien $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

4. Soit D le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes

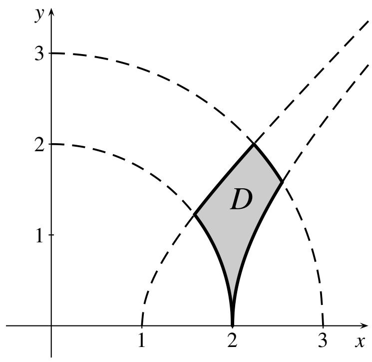
$$x^2+y^2=4\,, \qquad x^2-y^2=1\,,$$
$$x^2+y^2=9\,, \qquad x^2-y^2=4\,.$$

Calculer l'intégrale double

$$\iint_D xy\,dx\,dy\,.$$

Indication: Utiliser le changement de variables

$$\begin{cases} u = x^2+y^2 \\ v = x^2-y^2 \end{cases}$$



5. Soit $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon 4 \leqslant x^2+y^2 \leqslant 16,\ y \geqslant 0,\ x \leqslant 0\right\}$. Alors l'intégrale double

$$\iint_D xy\,dx\,dy$$

vaut

☐ -30 ☐ 0 ☐ 3π ☐ 30

6. Soit D est le domaine du premier quadrant limité par les courbes

$$xy=1\,, \qquad xy=2\,, \qquad y^2-x^2=1 \qquad \text{et} \qquad y^2-x^2=2\,.$$

L'intégrale double $\displaystyle\iint_D 2(x^2+y^2)\,dx\,dy$ est égale à

☐ -1 ☐ 1 ☐ 4 ☐ $\frac{1}{2}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

---

7. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1\}$. Alors $0 \leqslant \iint_D \sin(x^4 + y^4)\,dx\,dy \leqslant \pi$.

b) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0\}$. Alors $\displaystyle\iint_D \frac{\tan(y)}{x^2+y^2+1}\,dx\,dy > 1$.

c) Si $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ est un changement de variables tel que $D = G(\widetilde{D})$, alors $\mathcal{A}(D) = \mathcal{A}(\widetilde{D})$.

d) Si le changement de variables $G(u,v) = \big(x(u,v), y(u,v)\big)$ est une application linéaire, alors le jacobien est constant.

A domicile

8. **a)** Esquisser le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 16,\ x \leqslant y\}$$

et calculer son aire $\mathcal{A}(D)$.

b) Calculer les coordonnées du barycentre $(b_x, b_y) \in \mathbb{R}^2$ du domaine D définies par

$$b_x = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D x\,dx\,dy, \qquad b_y = \frac{1}{\mathcal{A}(D)} \iint_D y\,dx\,dy.$$

9. Esquisser le domaine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant y \leqslant x,\ x^2 + y^2 \leqslant 4\}$$

Utiliser les coordonnées polaires pour calculer les intégrales doubles suivantes

$$\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \text{et} \qquad \iint_D xy\,dx\,dy.$$

10. Calculer l'aire du domaine délimité par la cardioïde

$$r(\varphi) = a\big(1+\cos(\varphi)\big), \qquad \text{où } \varphi \in [0, 2\pi] \text{ et } a > 0.$$

11. Considérer le changement de variables

$$\begin{cases} u = e^x \\ v = y e^{-2x} \end{cases}$$

Calculer le jacobien $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$.

12. Soit D le domaine dans le premier quadrant limité par les courbes

$$xy = 1, \qquad xy = 3, \qquad x^2 - y^2 = 3 \qquad \text{et} \qquad x^2 - y^2 = 4.$$

Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (x^4 - y^4) e^{xy}\,dx\,dy.$$

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`