Analyse II — Série 12

MT, MX — 12 mai 2025

En classe

1. Calculer la dérivée des fonctions $F :]1,\infty[\to \mathbb{R}$ suivantes

a) $F(t) = \displaystyle\int_2^3 \frac{x^t + \sin(x)}{\ln(x)}\,dx$ **b)** $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \ln(x^2+t^2)\,dx$

2. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D (x^2y - 2xy^3)\,dx\,dy$ sur le rectangle

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 \leqslant x \leqslant 2,\ -2 \leqslant y \leqslant 0\} = [0,2] \times [-2,0],$$

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

3. Esquisser le domaine d'intégration et calculer l'intégrale double en inversant l'ordre d'intégration

$$\int_0^4 \left(\int_{\sqrt{y}}^2 \sqrt{1+x^3}\,dx \right) dy.$$

4. Calculer l'intégrale double $\displaystyle\iint_D x^2 e^y\,dx\,dy$ où $D \subset \mathbb{R}^2$ est le domaine délimité par les courbes $y=1$, $x = e^y$ et $x = 1$,

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

5. Soit la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_t^{t^2} \cos(xt)\,dx$. Alors nous avons:

- ☐ $F'(0) = -3$
- ☐ $F'(0) = -1$
- ☐ $F'(0) = 0$
- ☐ $F'(0) = 1$

6. Soit la fonction $F :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $F(t) = \displaystyle\int_{1/t}^{t^3} \frac{\cos(\pi x t)}{x}\,dx$. Alors nous avons:

- ☐ $F'(2) = 2$
- ☐ $F'(2) = 0$
- ☐ $F'(2) = 3$
- ☐ $F'(2) = 1$

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{x^2}^1 f(x,y)\,dy \right) dx$ est égale à :

- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_{-y^2}^{y^2} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_{-1}^1 \left(\int_0^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy$
- ☐ $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\,dx \right) dy$

8. Le calcul de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\int_{x^2}^1 \frac{12x^3}{1+y^3}\,dy \right) dx$ à l'aide d'une inversion de l'ordre d'intégration donne

- ☐ $I = \ln(2)$
- ☐ $I = \frac{1}{3}\ln(2)$
- ☐ $I = \frac{1}{2}\ln(2)$
- ☐ $I = 2\ln(2)$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $f(x,y)=k$ pour tout $(x,y)\in D$, alors $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = k\mathcal{A}(D)$.

b) Si $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 0$, alors $f(x,y)=0$ pour tout $(x,y)\in D$.

c) Soit f est une fonction continue définie sur $D\subset\mathbb{R}^2$. Si $\widetilde{D}\subset D$, alors

$$\iint_{\widetilde{D}} f(x,y)\,dx\,dy \leqslant \iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

d) Si f et g sont deux fonctions continues sur le domaine D alors

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,dx\,dy = \left(\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right)\left(\iint_D g(x,y)\,dx\,dy\right).$$

e) Soit f une fonction continue définie sur le rectangle $D=[a,b]\times[c,d]$, alors

$$\int_b^a\left(\int_d^c f(x,y)\,dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy.$$

f) Soit g une fonction continue définie sur l'intervalle fermé $[a,b]$, alors

$$\int_a^b\left(\int_a^b g(x)g(y)\,dx\right)dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx\right)^2.$$

A domicile

10. Calculer la dérivée de la fonction $F:]0,1[\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=\displaystyle\int_{\sqrt{t}}^{1/t}\frac{\sin(\cos(tx))}{x}\,dx$.

11. Soit la fonction $F:]0,\infty[\to\mathbb{R}$ définie par $F(t)=\displaystyle\int_1^{\sqrt[3]{t}}\frac{e^{tx^3}}{x}\,dx$. Calculer $F'(1)$.

12. Calculer l'intégrale double $\iint_D (x+y)^4\,dx\,dy$ sur le rectangle $D=[-1,1]\times[-1,1]$.

13. Calculer l'intégrale double $\iint_D y^x\ln(y)\,dx\,dy$ sur le rectangle $D=[0,2]\times[0,3]$.

14. Calculer $\iint_D (\sqrt{x}-y^2)\,dx\,dy$ où $D\subset\mathbb{R}^2$ est le domaine délimité par les courbes $y=x^2$ et $x=y^4$,

a) en intégrant d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y,

b) en intégrant d'abord par rapport à y et ensuite par rapport à x.

15. Inverser l'ordre d'intégration dans les intégrales doubles suivantes:

a) $\displaystyle\int_0^1\left(\int_1^{e^y} f(x,y)dx\right)dy$ **b)** $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2}}\left(\int_{x^2/2}^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$

16. Esquisser le domaine d'intégration et calculer l'intégrale double en inversant l'ordre d'intégration

$$\int_0^1\left(\int_{3x^2-3}^{\sqrt{1-x^2}} xy^2\,dy\right)dx.$$