Analyse II — *MT, MX*

Série 11 — 5 mai 2025

En classe

1. Déterminer les points stationnaires de la fonction de trois variables réelles

$$f(x,y,z) = x^3 - 3x + y^2 + 3z^2$$

et étudier leur nature (point selle, etc.).

2. Montrer que l'équation $2x^3 - x^2y^4 + 2y^3 + 3x - 2 = 0$ définit implicitement une fonction $y = g(x)$ dans un voisinage de $(0,1)$.

Calculer la dérivée $g'(0)$ et donner l'équation de la droite tangente à la courbe $y = g(x)$ en $x = 0$.

3. Montrer que l'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ définit implicitement une fonction $z = g(x,y)$ dans un voisinage de $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ telle que $g\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Donner l'équation du plan tangent à la surface $z = g(x,y)$ en $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = e^{x^2+y-1}$ autour du point $(1,0)$ est

- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 6(x-1)^2 + 4(x-1)y + y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2x + y + 3x^2 + 2xy + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = -1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$
- ☐ $p_2(x,y) = 1 + 2(x-1) + y + 3(x-1)^2 + 2(x-1)y + \frac{1}{2}y^2$

5. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = (x-z)^2 + y^2$ et soit $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Alors, sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$,

- ☐ la fonction f atteint son minimum global en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum global en un seul point
- ☐ la fonction f atteint son maximum global en $\left(\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}\right)$
- ☐ la fonction f n'est pas bornée

6. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - z^2 + 2x + 2y$. Alors $\vec{p} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

- ☐ est un point selle de f
- ☐ est un point de maximum local de f
- ☐ est un point de minimum local de f
- ☐ n'est pas un point stationnaire de f

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 2e^y + \sin(xy) - 3$ et soit $\vec{p} = (1,0)$.
Puisque $f(\vec{p}) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\vec{p}) \neq 0$, l'équation $f(x,y) = 0$ définit dans un voisinage de $x = 1$ une fonction $y = g(x)$ qui satisfait $g(1) = 0$ et $f\big(x, g(x)\big) = 0$ ainsi que :

- ☐ $g'(1) = -\frac{3}{2}$
- ☐ $g'(1) = -\frac{2}{3}$
- ☐ $g'(1) = \frac{2}{3}$
- ☐ $g'(1) = \frac{3}{2}$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Série 11
Suite

---

8. Soit $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y,z)=2x^4y^3z^2+2y^2z^3-3xy^2-1$ et soit $\vec{p}=(1,1,1)$. Puisque $f(\vec{p})=0$, et $\frac{\partial f}{\partial z}(\vec{p})\neq 0$, l'équation $f\big(x,y,z\big)=0$ définit dans un voisinage de $(x,y)=(1,1)$ une fonction $z=g(x,y)$ qui satisfait $g(1,1)=1$ et $f\big(x,y,g(x,y)\big)=0$ ainsi que

☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=-2$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=-\frac{4}{5}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=-\frac{1}{2}$ ☐ $\frac{\partial g}{\partial x}(1,1)=\frac{1}{2}$

9. Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si f est une fonction de deux variables, alors la matrice hessienne de f est symétrique.

b) Soit f une fonction de deux variables. Si le graphe de f est un plan, alors les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont des fonctions constantes.

c) Une fonction de deux variables est dite *symétrique* si $f(x,y)=f(y,x)$ pour tout $(x,y)\in D(f)$. Si f est une fonction différentiable symétrique, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\qquad \text{pour tout } (x,y)\in D(f).$$

d) Soit $f:D(f)\to\mathbb{R}$ une fonction différentiable de n variables et soit $\vec{a}=(a_1,\ldots,a_n)\in D(f)$. Si $\overrightarrow{\nabla}f(\vec{a})=\vec{0}$, alors f possède un point d'extremum local en $\vec{a}$.

A domicile

10. Considérer la fonction

$$f(x,y,z)=\tfrac{1}{2}x^2y-\tfrac{3}{2}x^2+xyz-xz+2x-y^2+\tfrac{3}{2}y-z^2.$$

a) Vérifier que $(1,1,0)$ est un point stationnaire de f et déterminer sa nature.

b) Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour du point $(1,1,0)$.

11. Déterminer les dimensions du parallélépipède rectangle ouvert en haut ayant un volume égal à 4, de manière à ce que l'aire totale de ses cinq faces soit la plus petite possible.

12. Montrer que l'équation $xe^y+ye^x-3=0$ définit implicitement une fonction $y=g(x)$ dans un voisinage de $(0,3)$.
Calculer la dérivée $g'(0)$ et donner l'équation de la droite tangente à la courbe $y=g(x)$ en $x=0$.

13. Montrer que l'équation $\ln(x)+e^{y/x}=1$ définit implicitement une fonction $y=g(x)$ dans un voisinage de $(1,0)$.
Calculer la dérivée $g'(1)$ et donner l'équation de la droite tangente à la courbe $y=g(x)$ en $x=1$.

14. Montrer que l'équation $\cos(x^2+y)+\sin(x+y)+e^{x^3y}=2$ définit implicitement une fonction $y=g(x)$ dans un voisinage de $\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$.
Calculer la dérivée $g'(0)$ et donner l'équation de la droite tangente à la courbe $y=g(x)$ en $x=0$.

15. Montrer que l'équation $x^5+xyz+y^3+3xz^4=2$ définit implicitement une fonction $z=g(x,y)$ dans un voisinage de $(1,-1,1)$ telle que $g(1,-1)=1$.
Donner l'équation du plan tangent à la surface $z=g(x,y)$ en $(1,-1)$.