Analyse II

MT, MX

Série 10

28 avril 2025

En classe

1. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - 6y + 3$$
sur le disque $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 16\big\}$.

2. Déterminer les points d'extremum de la fonction
$$f(x,y) = 2x - y$$
sous la contrainte $x^2 + y^2 = 5$.

3. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y) = x^2 y$$
définie sur le disque $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 9\big\}$.

4. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = xy - 3y^2 + 2x^2y - 7x + 1$

a) autour du point $(0,0)$ **b)** autour du point $(1,2)$

5. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y) = e^{2x}\cos(3y)$

a) autour du point $(0,0)$ **b)** autour du point $\big(0,\frac{\pi}{2}\big)$

6. Soit $D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \text{ et } x \geqslant 0\big\}$ et soit la fonction $f\colon D \to \mathbb{R}$, définie par
$$f(x,y) = y + 2x\,.$$
Alors le maximum global $M = \max\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D et le minimum global $m = \min\limits_{(x,y)\in D} f(x,y)$ de f sur D satisfont :

- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -1$
- ☐ $M = 1$ et $m = -1$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = -\sqrt{5}$
- ☐ $M = \sqrt{5}$ et $m = 0$

7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = xy$.
La valeur maximale de f sous la contrainte $2x^2 + y^2 - 4 = 0$ est

- ☐ $-\sqrt{2}$
- ☐ 0
- ☐ 1
- ☐ $\sqrt{2}$

8. Soient f et g deux fonctions de deux variables de classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ et soient m et M les valeurs minimale et maximale de f sous la contrainte $g(x,y) = 0$.

Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Si $\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \lambda\,\vec{\nabla} g(x_0,y_0)$, alors $f(x_0,y_0) = m$ ou $f(x_0,y_0) = M$.

b) Si $f(x_0,y_0) = m$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$.

c) Si $f(x_0,y_0) = M$ et $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$, alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = 0$.

➥ **Tourner la page s. v. p.**

Test intermédiaire (chapitres 1–3, séries 1–9):
Date: lundi 28 avril de 17h45 à 18h45

---

9. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^4-3x^2y+5xy+7x+9$.
Déterminer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses et justifier votre réponse:

a) Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(0,0)$ est $p_2(x,y)=5xy+7x+9$.

b) Le polynôme de Taylor d'ordre 2 de f autour de $(1,0)$ est $p_2(x,y)=5xy+7x+9$.

A domicile

10. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y)=x^2+y^2-2y$$
définie sur le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 1,\ y\geqslant 0\}$.

11. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y)=\sin(x)+\sin(x+y)$$
définie sur le domaine $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$.

12. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y)=x^3-9y^2-21x$$
définie sur le disque $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\leqslant 50\}$.

13. Déterminer les points d'extremum de la fonction
$$f(x,y)=xy$$
définie sur le domaine borné et fermé du plan $\mathbb{R}^2$ délimité par l'ellipse d'équation $x^2+4y^2=8$.

14. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y)=x^2+y^2$$
sous la contrainte $x^4+y^4=32$.

15. Déterminer les points d'extremum global de la fonction
$$f(x,y)=2x^2+2xy+y^2$$
sur le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 2x^2+y^2\leqslant 4\}$.

16. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y)=\cos(x)\cos(y)$

a) autour du point $(0,0)$ **b)** autour du point $\left(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

17. Déterminer le polynôme de Taylor d'ordre 2 de la fonction $f(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2+1}$

a) autour du point $(0,0)$ **b)** autour du point $(1,0)$ **c)** autour du point $(1,-1)$

Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`