Analyse II — Hors-série

MT, MX — Printemps 2025

---

1. **_Rappel - Analyse I_** Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{|x|}$. Alors

- ☐ f admet un prolongement par continuité en 0, noté $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $g(0) = 1$
- ☐ f n'admet pas de prolongement par continuité en 0
- ☐ f admet un prolongement par continuité en 0, noté $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $g(0) = 0$
- ☐ f admet un prolongement par continuité en 0, noté $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, et $g(0) = -1$

2. **_Rappel - Analyse I_** Soit $f : \left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} -\ln(3) + \ln\left(\sqrt{2x+1} + 2\right) & \text{si } -\frac{1}{3} < x < 0, \\ \alpha x & \text{si } 0 \leqslant x < \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Alors f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right[$ pour :

- ☐ $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
- ☐ $\alpha = \dfrac{1}{2}$
- ☐ $\alpha = \dfrac{1}{3}$
- ☐ aucun $\alpha \in \mathbb{R}$

3. **_Rappel - Analyse I_** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0, \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Alors

- ☐ $\lim_{x \to 0} f'(x) = 0$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 0$
- ☐ $\lim_{x \to 0} f'(x) = f'(0)$
- ☐ f est dérivable en $x = 0$ et $f'(0) = 1$

4. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle

$$y'(x) + 2x\,y(x) = 4x\,e^{-x^2}$$

qui satisfait la condition initiale $y(1) = 0$ vérifie aussi

- ☐ $y(0) = 1 - e^2$
- ☐ $y(0) = e^{-2} - 1$
- ☐ $y(0) = -2$
- ☐ $y(0) = 2$

5. La solution $y(x)$ de l'équation différentielle linéaire homogène

$$y'' + 6y' + 25y = 0$$

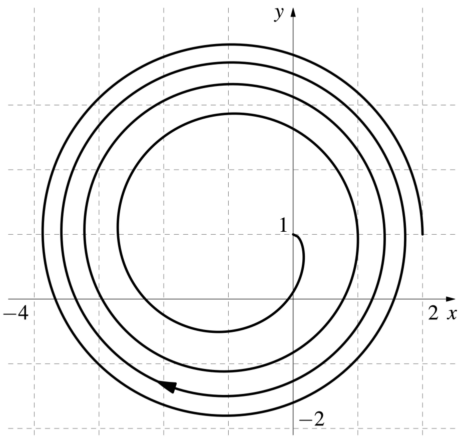
qui satisfait les conditions initiales $y(0) = -3$ et $y'(0) = 4$ est

- ☐ $y(x) = \dfrac{13}{4} e^{3x} \sin(4x) - 3e^{3x} \cos(4x)$
- ☐ $y(x) = -\dfrac{8}{3} e^{-4x} \sin(3x) - 3e^{-4x} \cos(3x)$
- ☐ $y(x) = \dfrac{16}{3} e^{4x} \sin(3x) - 3e^{4x} \cos(3x)$
- ☐ $y(x) = -\dfrac{5}{4} e^{-3x} \sin(4x) - 3e^{-3x} \cos(4x)$

➥ **Tourner la page s. v. p.**

6. Déterminer laquelle, parmi les fonctions suivantes, est une paramétrisation de la courbe représentée ci-contre.

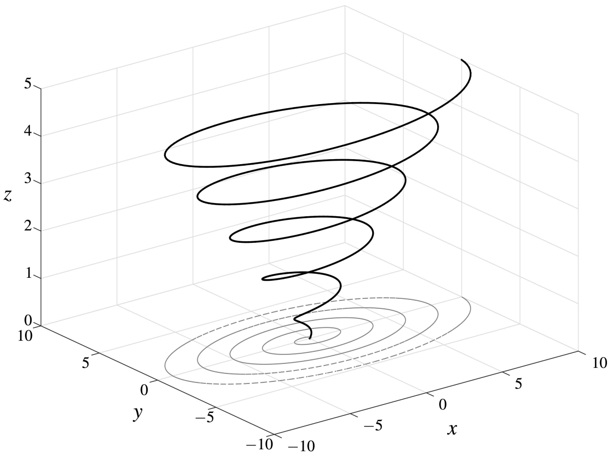
- [ ] $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -1-(1+\frac{1}{2}t)\cos(\pi t) \\ 1+(1+\frac{1}{2}t)\sin(\pi t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,4]$
- [ ] $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -1+(1+\sqrt{t})\cos(2\pi t) \\ 1-(1+\sqrt{t})\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,4]$
- [ ] $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -1+(1+t)\cos(\pi t) \\ 1-(1+t)\sin(\pi t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$
- [ ] $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} -1+(1+\sqrt{t})\cos(2\pi t) \\ 1+(1+\sqrt{t})\sin(2\pi t) \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$



7. Soient une courbe ainsi que sa projection sur le plan x-y illustrées dans la figure ci-dessous.

Laquelle parmi les suivantes pourrait être une paramétrisation de cette courbe ?

- [ ] $(x,y,z) = \big(2\cos(2\pi t),\ \sin(2\pi t),\ t\big)$, avec $t \in [0,5]$
- [ ] $(x,y,z) = \big(t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\big)$, avec $t \in [0,5]$
- [ ] $(x,y,z) = \big(t\cos(2\pi t),\ 2t\sin(2\pi t),\ t\big)$, avec $t \in [0,5]$
- [ ] $(x,y,z) = \big(2t\cos(2\pi t),\ t\sin(2\pi t),\ t\big)$, avec $t \in [0,5]$



Réponses:

Voir site Moodle: `https://moodle.epfl.ch/course/view.php?id=14837`