Chapitre 5 : Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert.

Soient $f_1 : D \to \mathbb{R}$, $f_2 : D \to \mathbb{R}$, ..., $f_m : D \to \mathbb{R}$ m fonctions de n variables définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$.

On définit la fonction $\vec{f} : D \to \mathbb{R}^m$ comme suit :

$$\begin{aligned} \vec{f} : D &\to \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $f_1, \dots, f_m$ sont des fonctions continues sur D, alors $\vec{f}$ est continue sur D.

Supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\vec{x})$ existent pour $j \in \{1, \dots, n\}$. On peut définir la matrice jacobienne de $\vec{f}$, notée $J_{\vec{f}}$ comme suit :

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de taille $m \times n$ dont le coefficient kj est la dérivée partielle $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\vec{x})$. De plus, les éléments de la ligne j sont les composantes du gradient de f_j

Cas particuliers.

1. $m=1$: $J_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x})\right)$

$\Rightarrow J_f(\vec{x}) = \left(\vec{\nabla} f(\vec{x})\right)^T$ (transposé du gradient de f).

2. $n=1$:

$$J_{\vec{f}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J_{\vec{f}}(x) = \vec{f}\,'(x)$ (vecteur tangent de $\vec{f}$)

Rappel. (cas $m=1$, $n=1$ - c-à-d Analyse I)

Une fonction $f : D(f) \to \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Définition.

Soit $\vec{f} : D(f) \to \mathbb{R}^m$ avec $D(f) \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{f}$ est différentiable en $\vec{x}_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

On a l'équivalence :

$\vec{f}$ différentiable en $\vec{x}_0$ $\iff$ f_j différentiable en $\vec{x}_0$

pour tout $j \in 1, \ldots, n$

Composition de fonctions.

Soient $\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $\vec{g} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$ deux fonctions telles que $\mathrm{Im}(\vec{f}) \subset D(\vec{g})$. On définit la composition de $\vec{f}$ et $\vec{g}$ par

$$(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \qquad \text{pour tout } \vec{x} \in D(\vec{f})$$

On a le schéma suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\vec{f}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\vec{g}} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{f}(\vec{x}) & \longmapsto & \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \end{array}$$

$$\underbrace{\longmapsto}_{\vec{g} \circ \vec{f}}$$

La matrice jacobienne $J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{x})$ est le produit matriciel des matrices jacobiennes $J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{x}))$ et $J_{\vec{f}}(\vec{x})$:

$$\boxed{\underbrace{J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{x})}_{\substack{\text{matrice} \\ p \times n}} = \underbrace{J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{x}))}_{\substack{\text{matrice} \\ p \times m}} \underbrace{J_{\vec{f}}(\vec{x})}_{\substack{\text{matrice} \\ m \times n}}}$$

Exemples.

1. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\vec{f}(x,y) = (-y, x)$ et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$J_g(u,v) = \begin{pmatrix} 3u^2 + v^2 & 2uv + e^v \end{pmatrix}$$

Soit $h = g \circ \vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = g(\vec{f}(x,y))$.

Calculer $J_h(0,1)$.

Comme $J_h(x,y) = J_g(\vec{f}(x,y))\, J_{\vec{f}}(x,y) = J_g(-y,x)\, J_{\vec{f}}(x,y)$

$$= \begin{pmatrix} 3y^2 + x^2 & -2xy + e^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -2xy + e^x & -3y^2 - x^2 \end{pmatrix}$$

Nous avons $J_h(0,1) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \end{pmatrix}$

2. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $\vec{f}(x,y) = (x^2, ye^{-x}, e^{-2y})$

et soit $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (u,v,w) & \longmapsto & g(u,v,w) \end{array}$ une fonction de classe C^1.

Soit $h = g \circ \vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = g(\vec{f}(x,y))$

Calculer $\vec{\nabla} h(1,0)$

Nous avons : $J_h(x,y) = J_g(\vec{f}(x,y))\, J_{\vec{f}}(x,y)$

où

$$J_g(\vec{f}(x,y)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x,y)) \quad \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x,y)) \right)$$

et

$$J_{\vec{f}}(x,y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -ye^{-x} & e^{-x} \\ 0 & -2e^{-2y} \end{pmatrix}$$

d'où : $J_h(x,y) = \left(\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) \quad \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) \right)$

avec

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 2x \frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x,y)) - ye^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x,y)) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x,y)) - 2e^{-2y} \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x,y)) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\vec{\nabla} h(x,y) = (J_h(x,y))^T = \begin{pmatrix} 2x \frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x,y)) - ye^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x,y)) \\ e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x,y)) - 2e^{-2y} \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x,y)) \end{pmatrix}$$

Comme

$$\vec{f}(1,0) = (1^2, 0 \cdot e^{-1}, e^{-0}) = (1,0,1)$$

nous obtenons :

$$\vec{\nabla} h(1,0) = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial g}{\partial u}(1,0,1) \\ e^{-1} \frac{\partial g}{\partial v}(1,0,1) - 2 \frac{\partial g}{\partial w}(1,0,1) \end{pmatrix}$$