

Chapitre 5: Fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$.

Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un domaine ouvert.

Soient $f_1: D \rightarrow \mathbb{R}, f_2: D \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_m: D \rightarrow \mathbb{R}$ m fonctions de n variables définies sur $D \subset \mathbb{R}^n$

On définit la fonction $\vec{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m$ comme suit:

$$\begin{aligned} \vec{f}: D &\rightarrow \mathbb{R}^m \\ \vec{x} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $f_1, \dots, f_m$ sont des fonctions continues sur D , alors $\vec{f}$ est continue sur D .

Supposons que les dérivées partielles $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\vec{x})$ existent pour $j \in \{1, \dots, n\}$. On peut définir la matrice jacobienne de $\vec{f}$, notée $J_{\vec{f}}$ comme suit :

$$J_{\vec{f}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\vec{x}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\vec{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\vec{x}) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\vec{x}) \end{pmatrix}$$

Il s'agit d'une matrice de taille $m \times n$ dont le coefficient k_j est la dérivée partielle $\frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\vec{x})$. De plus, les éléments de la ligne j sont les composantes du gradient de f_j .

Cas particuliers.

1. $m=1$: $J_f(\vec{x}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\vec{x}) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{x}) \right)$

$\Rightarrow J_f(\vec{x}) = (\vec{\nabla} f(\vec{x}))^T$ (transposé du gradient de f).

2. $n=1$:

$$J_{\vec{f}}(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x}(x) \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow J_{\vec{f}}(x) = \vec{f}'(x)$ (vecteur tangent de $\vec{f}$)

Rappel. (cas $m=1$, $n=1$ - c-à-d Analyse I)

Une fonction $f : D(f) \rightarrow \mathbb{R}$ est différentiable en $x_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}$ si

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Définition.

Soit $\vec{f} : D(f) \rightarrow \mathbb{R}^m$ avec $D(f) \subset \mathbb{R}^n$.

On dit que $\vec{f}$ est différentiable en $\vec{x}_0 \in D(f) \subset \mathbb{R}^n$ si

$$\lim_{\vec{x} \rightarrow \vec{x}_0} \frac{\vec{f}(\vec{x}) - \vec{f}(\vec{x}_0) - J_{\vec{f}}(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0)}{\|\vec{x} - \vec{x}_0\|} = \vec{0} \in \mathbb{R}^m$$

On a l'équivalence :

$\vec{f}$ différentiable en $\vec{x}_0 \iff f_j$ différentiable en $\vec{x}_0$
pour tout $j \in 1, \dots, m$

Composition de fonctions.

Soient $\vec{f}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $\vec{g}: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux fonctions telles que $\text{Im}(\vec{f}) \subset \mathcal{D}(\vec{g})$. On définit la composition de $\vec{f}$ et $\vec{g}$ par

$$(\vec{g} \circ \vec{f})(\vec{x}) = \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \quad \text{pour tout } \vec{x} \in \mathcal{D}(\vec{f})$$

On a le schéma suivant:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\vec{f}} & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\vec{g}} & \mathbb{R}^p \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{f}(\vec{x}) & \longmapsto & \vec{g}(\vec{f}(\vec{x})) \\ & \underbrace{\hspace{10em}}_{\vec{g} \circ \vec{f}} & & & \end{array}$$

La matrice jacobienne $J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{x})$ est le produit matriciel des matrices jacobienes $J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{x}))$ et $J_{\vec{f}}(\vec{x})$:

$$J_{\vec{g} \circ \vec{f}}(\vec{x}) = J_{\vec{g}}(\vec{f}(\vec{x})) J_{\vec{f}}(\vec{x})$$

matrice
 $p \times n$

matrice
 $p \times m$

matrice
 $m \times n$

Exemples.

1. Soit $\vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\vec{f}(x, y) = (-y, x)$ et soit $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$J_g(u, v) = (3u^2 + v^2 \quad 2uv + e^v)$$

Soit $h = g \circ \vec{f}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = g(\vec{f}(x, y))$.

Calculer $J_h(0, 1)$.

$$\begin{aligned} \text{Comme } J_h(x, y) &= J_g(\vec{f}(x, y)) J_{\vec{f}}(x, y) = J_g(-y, x) J_{\vec{f}}(x, y) \\ &= (3y^2 + x^2 \quad -2xy + e^x) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-2xy + e^x \quad -3y^2 - x^2) \end{aligned}$$

Nous avons $J_h(0, 1) = (1 \quad -3)$

2. Soit $\vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction définie par $\vec{f}(x, y) = (x^2, ye^{-x}, e^{-2y})$

et soit $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 .
 $(u, v, w) \longmapsto g(u, v, w)$

Soit $h = g \circ \vec{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = g(\vec{f}(x, y))$

Calculer $\vec{\nabla} h(1, 0)$

Nous avons : $J_h(x, y) = J_g(\vec{f}(x, y)) J_{\vec{f}}(x, y)$

où

$$J_g(\vec{f}(x, y)) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x, y)) \quad \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x, y)) \quad \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x, y)) \right)$$

et

$$J_{\vec{f}}(x, y) = \begin{pmatrix} 2x & 0 \\ -ye^{-x} & e^{-x} \\ 0 & -2e^{-2y} \end{pmatrix}$$

d'où : $J_n(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) \end{pmatrix}$

avec
$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial x}(x, y) = 2x \frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x, y)) - y e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x, y)) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x, y)) - 2e^{-2y} \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x, y)) \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\vec{\nabla} h(x, y) = (J_n(x, y))^T = \begin{pmatrix} 2x \frac{\partial g}{\partial u}(\vec{f}(x, y)) - y e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x, y)) \\ e^{-x} \frac{\partial g}{\partial v}(\vec{f}(x, y)) - 2e^{-2y} \frac{\partial g}{\partial w}(\vec{f}(x, y)) \end{pmatrix}$$

Comme

$$\vec{f}(1, 0) = (1^2, 0 \cdot e^{-1}, e^{-0}) = (1, 0, 1)$$

nous obtenons :

$$\vec{\nabla} h(1, 0) = \begin{pmatrix} 2 \frac{\partial g}{\partial u}(1, 0, 1) \\ e^{-1} \frac{\partial g}{\partial v}(1, 0, 1) - 2 \frac{\partial g}{\partial w}(1, 0, 1) \end{pmatrix}$$