# 4. Intégrales multiples

## 4.1. Intégrales doubles

**Rappel.** Nous avons vu que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction bornée, l'intégrale de Riemann

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

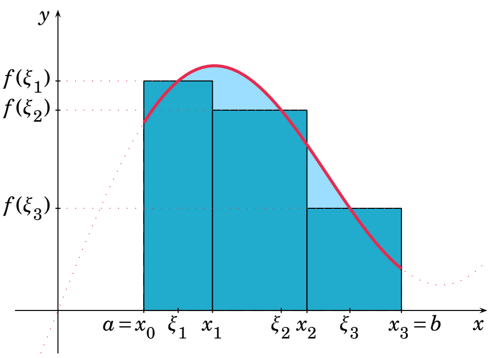
est la limite des sommes de Riemann

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}),$$

où $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ est une partition arbitraire de l'intervalle $[a,b]$ avec

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

et $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ pour tout $k = 1,2,\dots,n$.




### Propriétés

**1.** Si $f,g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur $[a,b]$, alors $f+g$ est intégrable et

$$\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

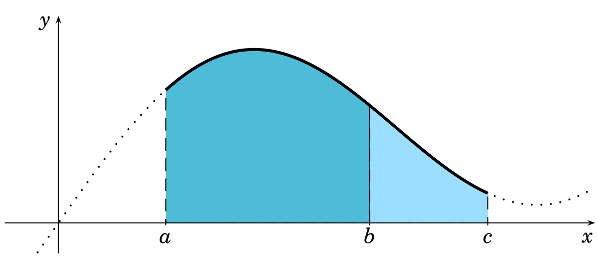
**2.** Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $[a,b]$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $cf$ est intégrable et

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

**3.** Soit $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur $[a,c]$ et soit $b \in \,]a,c[$. Alors

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

Cas $f(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in [a,c]$ :



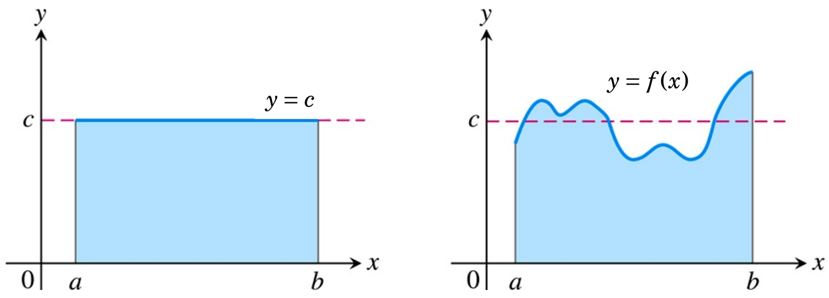
### Théorème de la moyenne

**Théorème.** Soit $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une fonction continue.
Alors il existe (au moins) un nombre $c\in[a,b]$ tel que

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \qquad \Longleftrightarrow \qquad \int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

### Interprétation géométrique

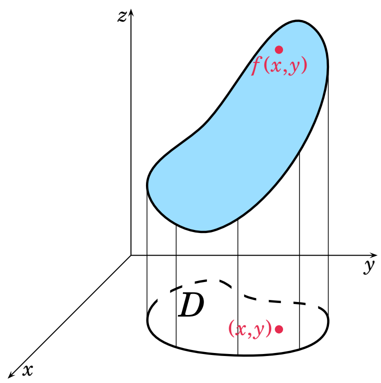
Si $f(x)\geqslant 0$ pour tout $x\in[a,b]$, le théorème de la moyenne nous dit qu'il existe (au moins) un nombre $c\in[a,b]$ tel que le rectangle de base $(b-a)$ et hauteur $f(c)$ possède la même aire que le domaine délimité par le graphe de la fonction continue $f$, l'axe $0x$ et les droites verticales $x=a$ et $x=b$.





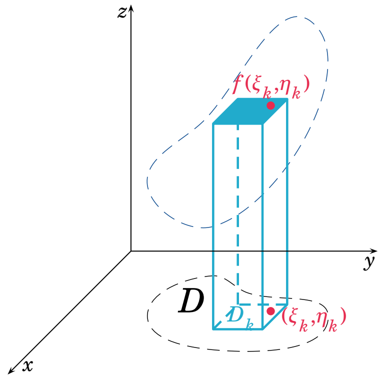

**But :** Définir l'intégrale d'une fonction de deux variables sur un domaine $D$ du plan $\mathbb{R}^2$.

Nous allons procéder ici de manière analogue :
Soit $f$ une fonction réelle de deux variables.
Soit $D\subset\mathbb{R}^2$ un domaine *borné* contenu dans $D(f)$.
Lorsque la fonction $f$ est continue et positive, nous pouvons nous représenter l'intégrale de $f$ sur le domaine $D$ comme le *volume* du corps délimité par le graphe de $f$, le plan $0xy$ et les droites verticales passant par le bord de $D$.




Partageons le domaine $D$ arbitrairement en $n$ morceaux $D_1,D_2,\dots,D_n$ (par exemple des rectangles) d'aires $\mathcal{A}(D_1)$, $\mathcal{A}(D_2),\dots,\mathcal{A}(D_n)$ et choisissons un point arbitraire $(\xi_k,\eta_k)$ dans chaque morceau $D_k$.
Nous pouvons approximer le volume du corps délimité par le graphe de $f$, le plan $0xy$ et les droites verticales passant par le bord de $D_k$ par le volume du parallélépipède de base $D_k\subset\mathbb{R}^2$ et de hauteur $f(\xi_k,\eta_k)$ :

$$f(\xi_k,\eta_k)\mathcal{A}(D_k).$$

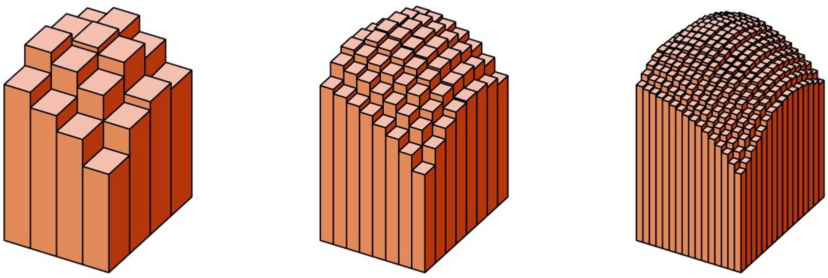


**Définition.** La fonction de deux variables $f$ est *intégrable* (au sens de Riemann) sur $D$ si pour toutes les partitions $\{D_1, \ldots, D_n\}$ du domaine $D$ telles que $\max\big(\mathcal{A}(D_k)\big) \longrightarrow 0$ et n'importe quel choix $(\xi_k, \eta_k) \in D_k$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k)\mathcal{A}(D_k)$$

tend vers une même limite. Cette limite est appelée *intégrale de Riemann* de $f$ sur $D$ et notée

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$





**Théorème.** (sans démonstration)

Si $f$ est continue sur $D$ alors $f$ est intégrable sur $D$.

## Propriétés

**1.** Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur $D$, alors $f+g$ est intégrable et

$$\iint_D \big(f(x,y)+g(x,y)\big)\,dxdy = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy + \iint_D g(x,y)\,dx\,dy.$$

**2.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $cf$ est intégrable et

$$\iint_D c\,f(x,y)\,dx\,dy = c\iint_D f(x,y)\,dx\,dy.$$

**3.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D = D_1 \sqcup D_2$ (réunion disjointe), alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D_1} f(x,y)\,dx\,dy + \iint_{D_2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

**4.** L'aire du domaine $D$ peut être calculée à l'aide de l'intégrale de la fonction constante $f(x,y)=1$ pour tout $(x,y) \in D$ :

$$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy.$$

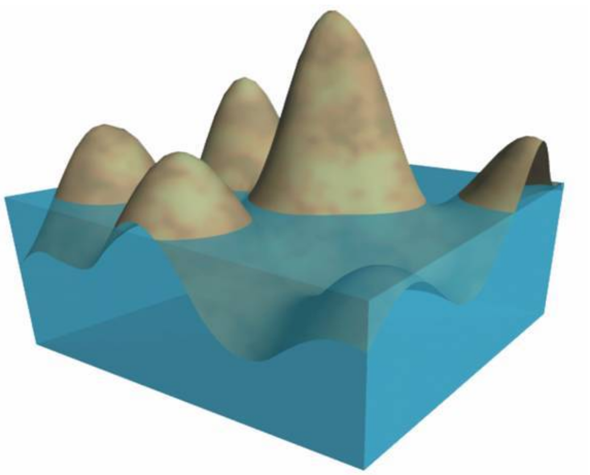
**5.** S'il existe une constante $M$ telle que $|f(x,y)| \leqslant M$ pour tout $(x,y) \in D$ alors

$$\left|\iint_D f(x,y)\,dx\,dy\right| \leqslant M\,\mathcal{A}(D).$$

**Théorème de la moyenne.** (sans démonstration)

Soit $D \subset \mathbb{R}^2$ un domaine connexe. Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe un point $(\xi, \eta) \in D$ tel que

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = f(\xi,\eta)\mathcal{A}(D).$$



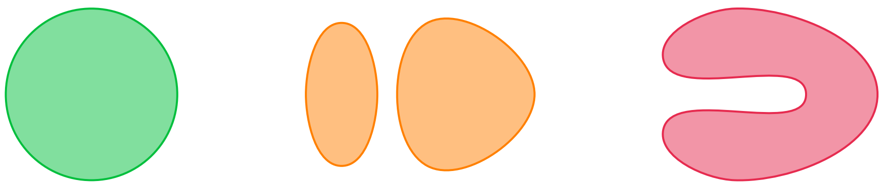


## Calcul d'intégrales doubles

Nous avons défini l'intégrale double $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$.

**Question.** Comment la calculer ?

**Problème.** Contrairement au cas des intégrales définies du type $\int_a^b f(x)\,dx$, où le domaine d'intégration est un intervalle fermé $[a,b]$, le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ peut être très général :

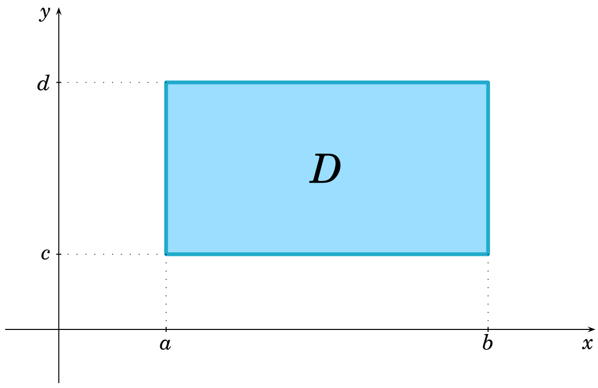



- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *connexe (par arcs)* si pour tout couple de points $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in D$ il existe une courbe paramétrée $\vec{\varphi} : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ qui relie $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ contenue dans $D$. Autrement dit, telle que $\vec{\varphi}(0) = \vec{p}_1$, $\vec{\varphi}(1) = \vec{p}_2$ et $\vec{\varphi}(t) \in D$ pour tout $t \in [0,1]$.
- Un domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ est *convexe* si pour tout couple de points $\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in D$ le segment qui relie $\vec{p}_1$ à $\vec{p}_2$ est contenu dans $D$.

### 4.2. Intégrales doubles sur des domaines rectangulaires

Commençons par considérer le cas simple d'un rectangle fermé

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b\,,\ c \leqslant y \leqslant d\} = [a, b] \times [c, d]\,.$$




Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur le rectangle $D$.

Soit $y \in [c, d]$ fixé. La fonction $x \mapsto f(x, y)$ est continue par rapport à la variable $x$. Elle est donc intégrable par rapport à $x$ sur l'intervalle $[a, b]$.

Soit $g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\,dx$ (aire de la section d'ordonnée $y$)

**Théorème.** (sans démonstration)

La fonction $y \mapsto g(y) = \displaystyle\int_a^b f(x, y)\,dx$ est continue par rapport à la variable $y$.

**Conséquence.** La fonction $g$ est intégrable par rapport à $y$ sur l'intervalle $[c, d]$. Autrement dit, l'intégrale itérée

$$\int_c^d g(y)\,dy = \int_c^d \left( \int_a^b f(x, y)\,dx \right) dy$$

existe si $f$ est continue sur $D$.

Soit maintenant $x \in [a,b]$ fixé. La fonction $y \mapsto f(x,y)$ est continue par rapport à la variable $y$. Elle est donc intégrable par rapport à $y$ sur l'intervalle $[c,d]$.

Soit $h(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ (aire de la section d'abscisse $x$)

**Théorème.** (sans démonstration)

La fonction $x \mapsto h(x) = \displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ est continue par rapport à la variable $x$.

**Conséquence.** La fonction $h$ est intégrable par rapport à $x$ sur l'intervalle $[a,b]$. Autrement dit, l'intégrale itérée

$$\int_a^b h(x)\,dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

existe si $f$ est continue sur $D$.

**Théorème de Fubini.** (sans démonstration)

Si $f$ est une fonction continue sur le rectangle $D = [a,b] \times [c,d]$, alors nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dx\,dy &= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy.\end{aligned}$$

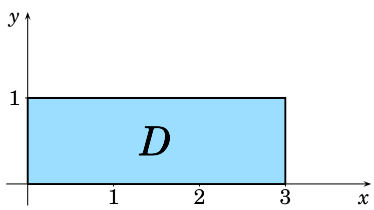
**Exemples**

1. Calculer l'intégrale double

$$\iint_D (16 - x^2 - 3y^2)\,dx\,dy$$

où $D$ est le rectangle

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 1\} = [0,3] \times [0,1]$.



**a)** en intégrant d'abord par rapport à $y$ et ensuite par rapport à $x$ :

$$\int_0^1 (16-x^2-3y^2)\,dy = \Big[(16-x^2)y - y^3\Big]_0^1 = (16-x^2)1 - 1 - 0 + 0 = 15 - x^2$$

d'où

$$\iint_D (16-x^2-3y^2)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^1 (16-x^2-3y^2)\,dy\right) dx = \int_0^3 (15-x^2)\,dx$$

$$= \left[15x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 45 - 9 - 0 + 0 = 36$$

**b)** en intégrant d'abord par rapport à $x$ et ensuite par rapport à $y$,

$$\iint_D (16-x^2-3y^2)\,dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^3 (16-x^2-3y^2)\,dx\right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\left[(16-3y^2)x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=0}^{x=3}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \big(3(16-3y^2) - 9 - 0 + 0\big)\,dy = \int_0^1 \big(39 - 9y^2\big)\,dy$$

$$= \Big[39y - 3y^3\Big]_0^1 = 39 - 3 - 0 + 0 = 36$$

**2.** Calculer l'intégrale double

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$$

où $f(x,y) = x^2y^3 - 2$ et $D$ est le rectangle $D = [0,3]\times[0,2]$,

**a)** en intégrant d'abord par rapport à $x$ et ensuite par rapport à $y$ :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left(\int_0^3 (x^2y^3-2)\,dx\right) dy = \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{3}x^3y^3 - 2x\right]_{x=0}^{x=3}\right) dy$$

$$= \int_0^2 (9y^3-6)\,dy = \left[\frac{9}{4}y^4 - 6y\right]_0^2 = 36 - 12 = 24.$$

**b)** en intégrant d'abord par rapport à $y$ et ensuite par rapport à $x$ :

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^3 \left(\int_0^2 (x^2y^3-2)\,dy\right) dx = \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{4}x^2y^4 - 2y\right]_{y=0}^{y=2}\right) dx$$

$$= \int_0^3 (4x^2-4)\,dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 4x\right]_0^3 = 36 - 12 = 24.$$

**3.** Calculer l'intégrale double

$$\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy$$

où $D$ est le rectangle $D=[0,\pi]\times[0,3]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leqslant x\leqslant\pi\,,\ 0\leqslant y\leqslant 3\}$.

Nous avons

$$\begin{aligned}\iint_D x\cos(xy)\,dx\,dy &= \int_0^{\pi}\left(\int_0^3 x\cos(xy)\,dy\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\Big[\sin(xy)\Big]_{y=0}^{y=3}\right)dx\\ &=\int_0^{\pi}\sin(3x)\,dx=\left[\frac{-\cos(3x)}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{3}-\frac{-1}{3}=\frac{2}{3}.\end{aligned}$$

**Remarque.** Si la fonction à intégrer peut s'écrire comme un produit de la forme

$$f(x,y)=g(x)h(y),$$

alors l'intégrale double de $f$ sur le rectangle $D=[a,b]\times[c,d]$ est égale au produit de deux intégrales simples :

$$\iint_D g(x)h(y)\,dx\,dy=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\left(\int_c^d h(y)\,dy\right).$$

En effet,

$$\begin{aligned}\iint_D g(x)h(y)\,dx\,dy &= \int_c^d\left(\int_a^b g(x)\underbrace{h(y)}_{\text{constante}}\,dx\right)dy\\ &=\int_c^d h(y)\underbrace{\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)}_{\text{constante}}dy\\ &=\left(\int_a^b g(x)\,dx\right)\int_c^d h(y)\,dy.\end{aligned}$$

**Attention :** Cette formule est valable seulement si $D$ est un rectangle.

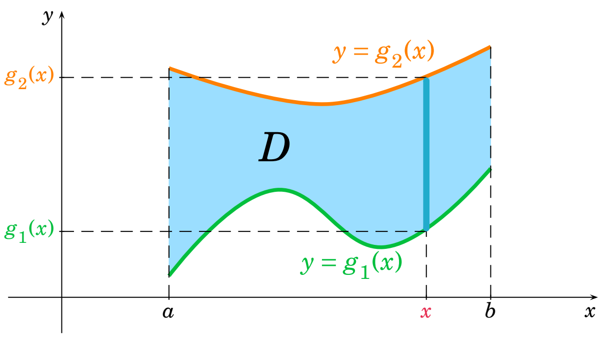
Nous pouvons faire le calcul suivant pour la fonction de l'exemple 2 :

$$\begin{aligned}
\iint_D (x^2y^3-2)\,dx\,dy &= \left(\int_0^3 x^2\,dx\right)\left(\int_0^2 y^3\,dy\right) - 2\iint_D dx\,dy \\
&= \left(\int_0^3 x^2\,dx\right)\left(\int_0^2 y^3\,dy\right) - 2\mathcal{A}(D) \\
&= \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^2 - 2\cdot(3-0)(2-0) \\
&= (9-0)(4-0) - 12 = 24\,.
\end{aligned}$$

### 4.3. Intégrales doubles sur des domaines non rectangulaires

Considérons maintenant le domaine délimité par les droites $x=a$, $x=b$ et les courbes

$$y = g_1(x) \quad \text{et} \quad y = g_2(x) \qquad \text{avec } g_1(x) \leqslant g_2(x) \text{ pour tout } x \in [a,b].$$




Pour chaque $x \in [a,b]$ fixé, $y$ varie entre $g_1(x)$ et $g_2(x)$. Nous pouvons écrire

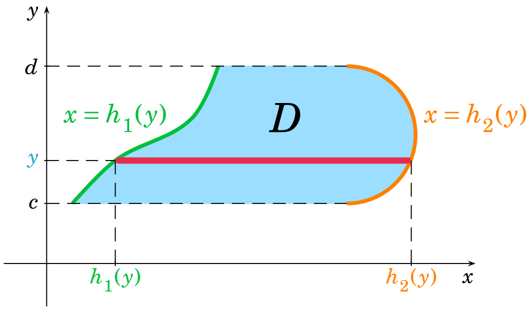
$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leqslant x \leqslant b\,,\; g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\right\}$$

et l'intégrale double se calcule à l'aide de l'intégrale itérée

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \underbrace{\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)}_{\text{ne dépend plus de } y} dx\,. \tag{i}$$

Considérons à présent le domaine délimité par les droites $y = c$, $y = d$ et les courbes

$$x = h_1(y) \quad \text{et} \quad x = h_2(y) \qquad \text{avec } h_1(y) \leqslant h_2(y) \text{ pour } y \in [c, d].$$



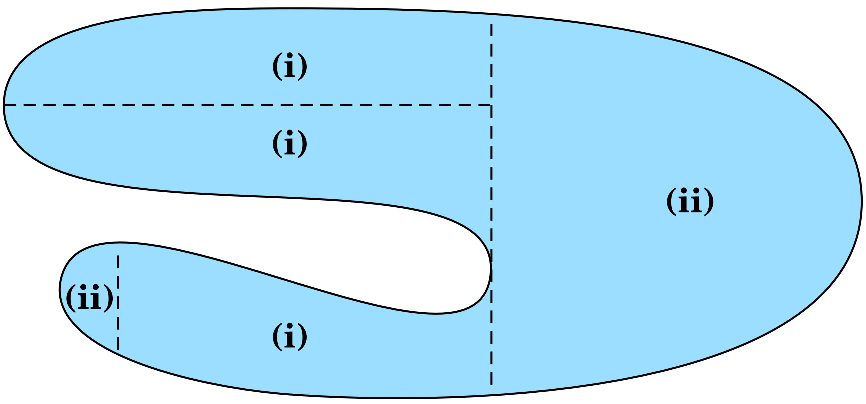

Pour chaque $y \in [c, d]$ fixé, $x$ varie entre $h_1(y)$ et $h_2(y)$. Nous pouvons écrire

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leqslant y \leqslant d,\ h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y)\}$$

et l'intégrale double se calcule à l'aide de l'intégrale itérée

$$\iint_D f(x, y)\,dx\,dy = \int_c^d \underbrace{\left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)\,dx \right)}_{\text{ne dépend plus de } x} dy. \qquad \textbf{(ii)}$$

**Remarque.** Dans le cas général, nous décomposons le domaine $D \subset \mathbb{R}^2$ en morceaux où nous pouvons appliquer soit la formule (i) soit la formule (ii). Le choix entre ces deux formules est indiqué par la forme du domaine ou par la fonction à intégrer.



### Méthode de calcul

Soit $f$ une fonction de deux variables et $D$ un domaine du plan.

Pour calculer l'intégrale double

$$I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy,$$

- fixer les bornes d'une des variables :

$$a \leqslant x \leqslant b \qquad \text{ou} \qquad c \leqslant y \leqslant d.$$

- Pour chaque valeur *fixée* de cette variable, déterminer les bornes d'intégration de la deuxième variable :

$$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x) \qquad \text{ou} \qquad h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y).$$

- Intégrer d'abord par rapport à la deuxième variable et ensuite par rapport à la première variable :

$$I = \int_a^b \left( \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \text{ou} \qquad I = \int_c^d \left( \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

**Remarque.** L'ordre d'intégration est arbitraire, déterminé en partie par la forme du domaine et/ou de la fonction à intégrer.

### Exemples

1. Soit $D$ le triangle dont les sommets sont $(0,0)$, $(2,0)$ et $(2,1)$.

   Ecrire $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ comme une intégrale itérée.

   La droite qui passe par $(0,0)$ et $(2,1)$ a comme équation $y = \frac{1}{2}x$ ou encore $x = 2y$.

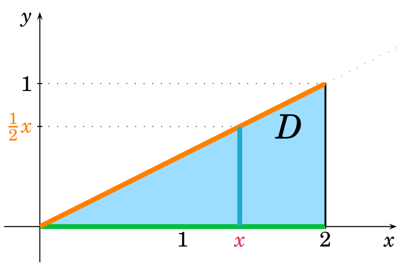
   Nous avons deux possibilités :

   - La variable $x$ varie entre $0$ et $2$.
     Pour chaque $x \in [0,2]$ fixé, $y$ varie entre

     $$g_1(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \tfrac{1}{2}x.$$

     Ainsi,

     $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^2 \left( \int_0^{x/2} f(x,y)\,dy \right) dx$$

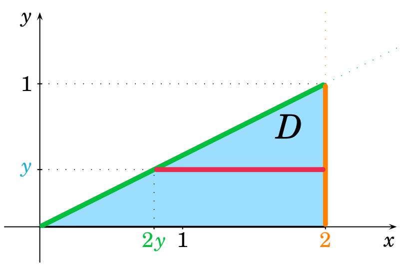



   - La variable $y$ varie entre $0$ et $1$.
     Pour chaque $y \in [0,1]$ fixé, $x$ varie entre

     $$h_1(y) = 2y \qquad \text{et} \qquad h_2(y) = 2.$$

     Ainsi,

     $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \left( \int_{2y}^2 f(x,y)\,dx \right) dy$$



**2.** Soit $D$ le domaine de l'exemple 1 et $f(x,y) = x + xy^2$.

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Nous pouvons utiliser les deux formules trouvées dans l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\iint_D (x+xy^2)\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} (x+xy^2)\,dy\right) dx = \int_0^2 \left(\left[xy + x\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{y=x/2}\right) dx\\ &= \int_0^2 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - 0 + 0\right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right]_0^2 = \frac{2^3}{6} + \frac{2^5}{120}\\ &= \frac{4}{3} + \frac{4}{15} = \frac{24}{15} = \frac{8}{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iint_D (x+xy^2)\,dx\,dy &= \int_0^1 \left(\int_{2y}^{2} x(1+y^2)\,dx\right) dy = \int_0^1 (1+y^2)\left(\int_{2y}^{2} x\,dx\right) dy\\ &= \int_0^1 (1+y^2)\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x=2y}^{x=2}\right) dy = \int_0^1 (1+y^2)\left(\frac{2^2}{2} - \frac{4y^2}{2}\right) dy\\ &= 2\int_0^1 (1+y^2)(1-y^2)\,dy = 2\int_0^1 (1-y^4)\,dy\\ &= 2\left[1 - \frac{y^5}{5}\right]_0^1 = 2\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{8}{5}\end{aligned}$$

**3.** Soit $D$ le domaine de l'exemple 1 et $f(x,y) = e^{2y/x}$.

Calculer $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Comme

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(e^{2y/x}\right) = \frac{2}{x}e^{2y/x},$$

nous avons

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{2}e^{2y/x}\right) = e^{2y/x},$$

d'où

$$\begin{aligned}\iint_D e^{2y/x}\,dx\,dy &= \int_0^2 \left(\int_0^{x/2} e^{2y/x}\,dy\right) dx = \int_0^2 \left(\left[\frac{x}{2}e^{2y/x}\right]_{y=0}^{y=x/2}\right) dx\\ &= \int_0^2 \left(\frac{x}{2}e^1 - \frac{x}{2}e^0\right) dx = \frac{e-1}{2}\int_0^2 x\,dx = \frac{e-1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2\\ &= e-1\end{aligned}$$

**Remarque.** Comme

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{2y/x}\right) = -\frac{2y}{x^2}e^{2y/x},$$

il *n'est pas* possible d'exprimer la fonction $f$ comme la dérivée partielle par rapport à $x$ d'une fonction exprimée à l'aide de fonctions élémentaires.

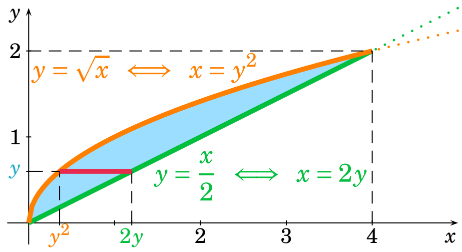
**4.** Inverser l'ordre d'intégration dans l'intégrale

$$I = \int_0^4 \left( \int_{x/2}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy \right) dx.$$

La variable $x$ varie entre $0$ et $4$. Pour $x \in [0,4]$ fixé, $y$ varie entre

$$g_1(x) = \frac{x}{2} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \sqrt{x}.$$

Le domaine d'intégration est donc :



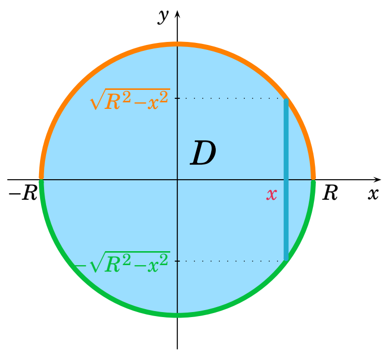

Par conséquent, la variable $y$ varie entre $0$ et $2$. Pour $y \in [0,2]$ fixé, $x$ varie entre

$$h_1(y) = y^2 \qquad \text{et} \qquad h_2(y) = 2y,$$

ce qui nous donne

$$I = \int_0^2 \left( \int_{y^2}^{2y} f(x,y)\,dx \right) dy.$$

**5.** Soit $D$ le disque de rayon $R$ centré à l'origine.




Ecrire $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ comme une intégrale itérée.

Nous avons deux possibilités :

- La variable $x$ varie entre $-R$ et $R$.
  Pour chaque $x \in [-R,R]$ fixé, $y$ varie entre

  $$g_1(x) = -\sqrt{R^2-x^2} \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \sqrt{R^2-x^2}.$$

  Ainsi,

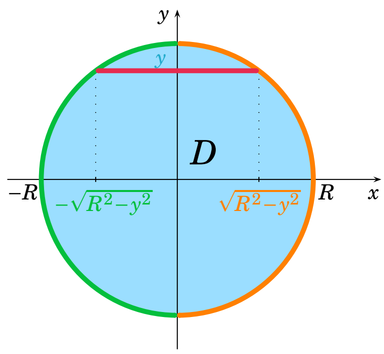
  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left( \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} f(x,y)\,dy \right) dx \qquad \textbf{(1)}$$

- La variable $y$ varie entre $-R$ et $R$.
  Pour chaque $x \in [-R,R]$ fixé, $x$ varie entre

  $$h_1(x) = -\sqrt{R^2-y^2} \qquad \text{et} \qquad h_2(x) = \sqrt{R^2-y^2}.$$

  Ainsi,

  $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} \left( \int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} f(x,y)\,dx \right) dy \qquad \textbf{(2)}$$



**6.** Soit $D$ le domaine de l'exemple 5 et $f(x,y) = \sqrt{R^2 - y^2}$.

Calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

Comme $f$ ne dépend pas de $x$, il convient d'intégrer d'abord par rapport à $x$ :

$$\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-y^2}\,dx = \sqrt{R^2-y^2}\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} 1\,dx = \sqrt{R^2-y^2}\Big[x\Big]_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} = 2(R^2-y^2)$$

D'où

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-R}^{R} 2(R^2-y^2)\,dy = 2\left[R^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \frac{4}{3}R^3 + \frac{4}{3}R^3 = \frac{8}{3}R^3.$$

**Remarque.** Si la fonction à intégrer est quelconque, l'intégration sur le domaine $D$ de l'exemple 5 peut s'avérer compliquée, d'où l'intérêt à considérer une autre méthode.

## 4.4. Changement de variables dans les intégrales doubles

**Rappel.** Nous avons vu qu'il est parfois utile de changer de variable pour calculer une intégrale. Pour ce faire, nous avons utilisé la formule de changement de variables

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\big(g(u)\big)g'(u)\,du.$$

où $g$ est une fonction bijective de classe $C^1$.

Si $g : [c,d] \to [a,b]$ est une fonction monotone croissante (avec $g'(u) \geqslant 0$), nous avons $g^{-1}(a) = c$ et $g^{-1}(b) = d$ et la formule ci-dessus devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du.$$

Si $g : [c,d] \to [a,b]$ est une fonction monotone décroissante (avec $g'(u) \leqslant 0$), nous avons $g^{-1}(a) = d$ et $g^{-1}(b) = c$ et la formule de changement de variables devient

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_d^c f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du = -\int_c^d f\big(g(u)\big)\,g'(u)\,du.$$

Nous pouvons résumer les deux formules précédentes sous la forme :
$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f\big(g(u)\big)\big|g'(u)\big|\,du\,,$$
où la valeur absolue tient compte du signe de l'intégrale de droite dans le cas décroissant.

Si nous notons $I = [a,b]$ et $\widetilde{I} = [c,d]$ et nous posons
$$\widetilde{f}(u) = f\big(g(u)\big)$$
alors la formule précédente s'écrit :
$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\widetilde{I}} \widetilde{f}(u)\big|g'(u)\big|\,du\,, \tag{$\star$}$$

**Question.** Quel est l'analogue de la formule ($\star$) dans le cas des intégrales doubles ?

Dans le cas des fonctions de deux variables, un *changement de variables* est une fonction bijective de classe $C^1$ :
$$\begin{aligned} G : D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

Nous lui associons la matrice
$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$
appelée *matrice jacobienne*.

Le déterminant de cette matrice, noté $\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ :
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\big(J_G(u,v)\big) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$
est appelé *jacobien* associé au changement de variables.

Nous pouvons à présent donner l'analogue de

$$\int_I f(x)\,dx = \int_{\widetilde{I}} \widetilde{f}(u)\left|g'(u)\right| du\,, \qquad (\star)$$

**Théorème.** Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue de deux variables,

$$\begin{aligned} G : D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v) &\longmapsto \big(x(u,v), y(u,v)\big) \end{aligned}$$

un changement de variables et $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^2$ tel que $G^{-1}(D) = \widetilde{D}$. Soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big).$$

Nous avons

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv\,.$$

où $\left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|$ est la valeur absolue du jacobien associé au changement de variables $G$.

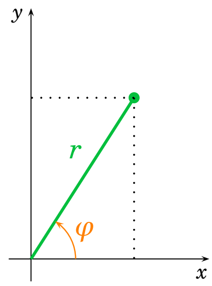
## Méthode de calcul

Soit $D$ un domaine du plan et $f : D \to \mathbb{R}^2$ une fonction de deux variables.

Pour calculer l'intégrale double $\quad I = \iint_D f(x,y)\,dx\,dy$

1. Trouver des variables $u$ et $v$ pour lesquelles le domaine d'intégration et/ou la fonction à intégrer deviennent plus simples.
2. Calculer le jacobien associé au changement de variables $G : (u,v) \mapsto (x,y)$.
3. Déterminer les bornes des variables $u$ et $v$ :
$$a \leqslant u \leqslant b \quad \text{et} \quad g_1(u) \leqslant v \leqslant g_2(u) \qquad \text{ou} \qquad c \leqslant v \leqslant d \quad \text{et} \quad h_1(v) \leqslant u \leqslant h_2(v).$$
4. Déterminer $\widetilde{f}(u,v) = f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$.
5. Calculer
$$I = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_a^b \left(\int_{g_1(u)}^{g_2(u)} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dv\right) du$$
ou
$$I = \iint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \int_c^d \left(\int_{h_1(v)}^{h_2(v)} \widetilde{f}(u,v)\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\right) dv\,.$$

### 4.5. Coordonnées polaires $(r, \varphi)$




$$\begin{cases} x = r\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\varphi), \end{cases} \qquad \text{avec } r \geqslant 0 \text{ et } 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \text{ (ou } -\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi).$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

et le jacobien,

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r\cos^2(\varphi) + r\sin^2(\varphi) \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = r.$$

Le théorème nous donne alors

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \tilde{f}(r,\varphi)\,r\,dr\,d\varphi$$

où $\tilde{f}(r,\varphi) = f\big(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)\big)$.

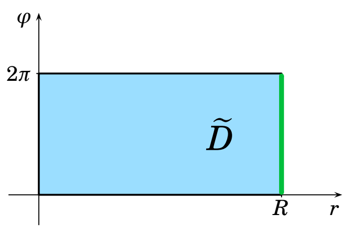
### Quelques domaines en coordonnées polaires

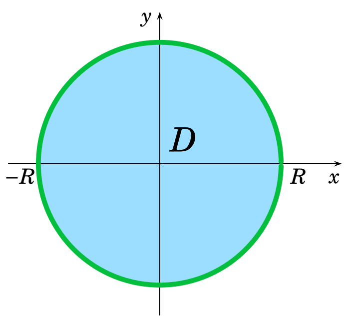
**1.** Disque de rayon $R$ centré à l'origine

$$D = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\big\}$$

Le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \big\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\big\}$$



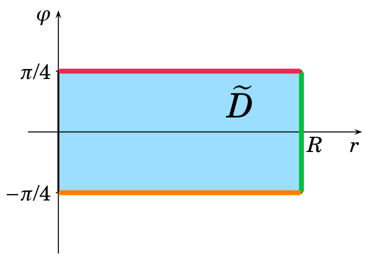



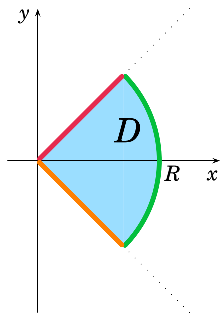
**2.** Secteur circulaire de rayon $R$

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2,\ |y| \leqslant x\}$$

Le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R\,,\ -\tfrac{\pi}{4} \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{\pi}{4}\}$$



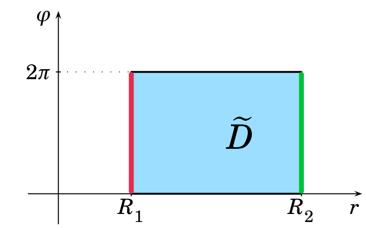



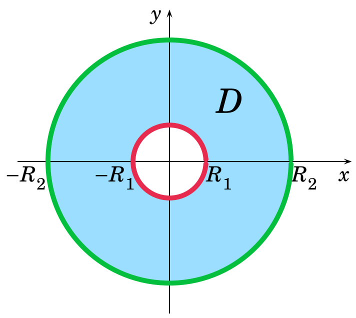

**3.** Couronne centrée à l'origine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2\}$$

Le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leqslant r \leqslant R_2\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$



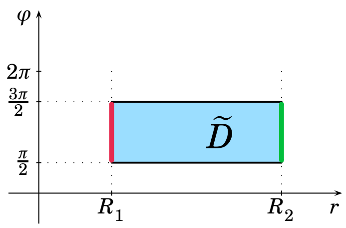



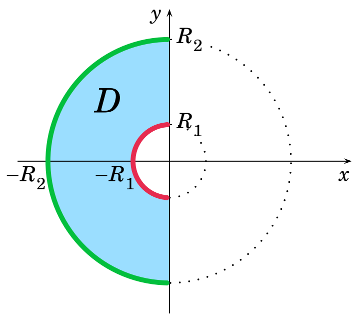
**4.** Demi-couronne centrée à l'origine

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : R_1^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_2^2,\ x \leqslant 0\}$$

Le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires est donc un rectangle :

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : R_1 \leqslant r \leqslant R_2,\ \tfrac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \tfrac{3\pi}{2}\}$$




**5.** Triangle $D$ de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$

Dans ce cas, l'angle $\varphi$ varie entre 0 et $\frac{\pi}{4}$.

Pour chaque, $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ fixé, $r$ varie entre

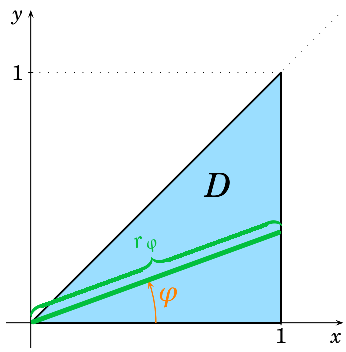
$$r = 0 \quad \text{et} \quad r = r_\varphi$$

où $r_\varphi$ est tel que

$$\cos(\varphi) = \frac{1}{r_\varphi}$$

Par conséquent, le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires s'écrit

$$\widetilde{D} = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos(\varphi)}\right\}$$



### Exemples

1. Calculer l'aire du disque $D$ de rayon $R$ centré à l'origine.

   Nous avons
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant R^2\} \quad \text{et} \quad \widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$
   d'où
   $$\mathcal{A}(D) = \iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} 1 \cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^R r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)$$
   $$= \left(\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right) = \left(\frac{R^2}{2} - 0\right)(2\pi - 0) = \pi R^2$$

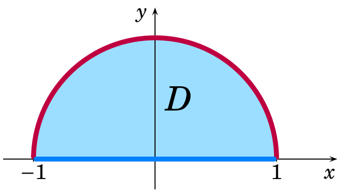
2. Calculer $I = \iint_D e^{3(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ où $D$ est le disque de rayon $R$ centré à l'origine.

   Comme $x^2 + y^2 = r^2$ nous avons
   $$I = \iint_D e^{3(x^2+y^2)}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} e^{3r^2} r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^R e^{3r^2} r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)$$
   $$= \left(\left[\frac{1}{6}e^{3r^2}\right]_0^R\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{6}\left(e^{3R^2} - e^0\right)(2\pi - 0) = \frac{\pi}{3}\left(e^{3R^2} - 1\right)$$

3. Calculer l'intégrale double
   $$I = \int_{-1}^{1}\left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{3/2}\,dy\right)dx$$
   à l'aide des coordonnées polaires.

   La variable $x$ varie entre $-1$ et $1$.

   Pour $x \in [-1,1]$ fixé, $y$ varie entre
   $$g_1(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad g_2(x) = \sqrt{1-x^2}$$
   Le domaine d'intégration est donc le demi-disque
   $$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0\}$$




   Le domaine $D$ exprimé en coordonnées polaires est le rectangle :
   $$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$$
   d'où
   $$I = \iint_D (x^2+y^2)^{3/2}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} r^3 \cdot r\,dr\,d\varphi = \left(\int_0^1 r^4 dr\right)\left(\int_0^\pi 1\,d\varphi\right)$$
   $$= \left(\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^1\right)\left(\left[\varphi\right]_0^\pi\right) = \left(\frac{1}{5} - 0\right)(\pi - 0) = \frac{\pi}{5}$$

**4.** Calculer le volume de la région limitée par le cylindre de rayon 1 et d'axe $0z$, le plan $0xy$ et le plan d'équation $z = x + y + 2$.

Le volume cherché est $\mathcal{V} = \iint_D (x+y+2)\,dx\,dy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iint_D x\,dx\,dy + \iint_D y\,dx\,dy + \iint_D 2\,dx\,dy \\ &= \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{\sqrt{1-y^2}} x\,dx\right)dy + \int_{-1}^{1}\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y\,dy\right)dx + 2\mathcal{A}(D) = 0 + 0 + 2\pi\cdot 1^2 = 2\pi\,,\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que l'intégrale d'une fonction impaire sur un domaine symétrique est nulle. Le calcul peut aussi être fait à l'aide des coordonnées polaires :

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant r \leqslant 1,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{V} &= \iint_D (x+y+2)\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \big(r\cos(\varphi) + r\sin(\varphi) + 2\big)r\,dr\,d\varphi \\ &= \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \cos(\varphi)\,d\varphi\right) + \left(\int_0^1 r^2 dr\right)\left(\int_0^{2\pi} \sin(\varphi)\,d\varphi\right) + \left(\int_0^1 2r\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} d\varphi\right) \\ &= \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left(\left[\sin(\varphi)\right]_0^{2\pi}\right) + \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1\right)\left(\left[-\cos(\varphi)\right]_0^{2\pi}\right) + \left(\left[r^2\right]_0^1\right)\left(\left[\varphi\right]_0^{2\pi}\right) = \frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot 0 + 1\cdot 2\pi \\ &= 2\pi\end{aligned}$$

**5.** Soit $D$ le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$.

Calculer $I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy$.

Nous avons

$$I = \iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dx\,dy = \iint_{\widetilde{D}} \frac{1}{r}\cdot r\,dr\,d\varphi = \iint_{\widetilde{D}} 1\,dr\,d\varphi$$

où

$$\widetilde{D} = \left\{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{4},\ 0 \leqslant r \leqslant \frac{1}{\cos(\varphi)}\right\}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}I &= \int_0^{\pi/4}\left(\int_0^{1/\cos(\varphi)} 1\,dr\right)d\varphi = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos(\varphi)}\,d\varphi = \left[\ln\left|\frac{1+\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)}\right|\right]_0^{\pi/4} \\ &= \ln\left|\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}\right| - \ln\left|\frac{1+0}{1}\right| = \ln\left(1+\sqrt{2}\right)\end{aligned}$$

### 4.6. Intégration sur des parallélogrammes et des triangles.

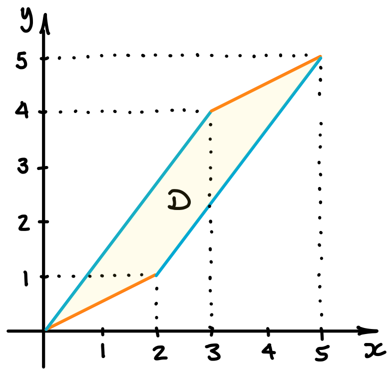
Si le domaine d'intégration est un parallélogramme ou un triangle il peut s'avérer utile de faire un changement de variables.

**Exemple 1.**

Soit $D$ le parallélogramme engendré par les vecteurs

$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Calculer $I = \iint_D (x+3y)\,dx\,dy$

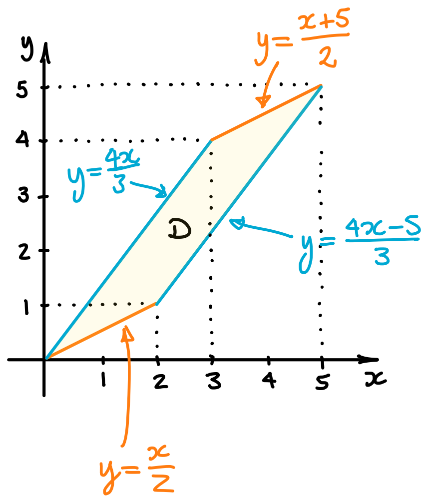



**Première possibilité :** calcul direct

$x$ varie entre 0 et 5.

Pour $x \in [0,2]$ fixé, $y$ varie entre

$$g_1(x) = \frac{1}{2}x \text{ et } g_2(x) = \frac{4}{3}x$$




Pour $x \in [2,3]$ fixé, $y$ varie entre

$$g_1(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \text{ et } g_2(x) = \frac{4}{3}x$$

Pour $x \in [3,5]$ fixé, $y$ varie entre

$$g_1(x) = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3} \text{ et } g_2(x) = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$$

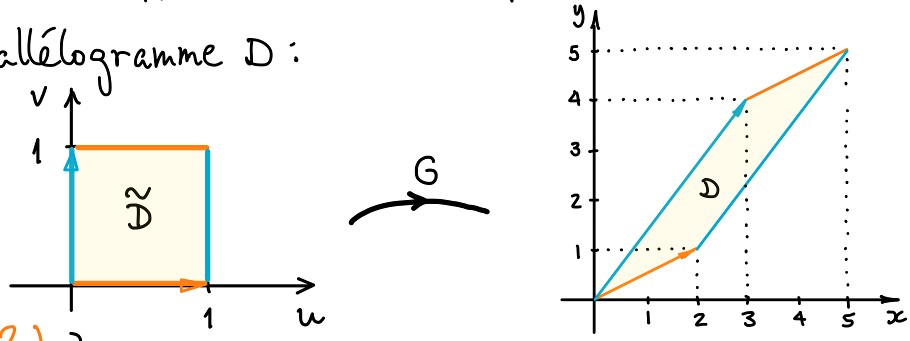
d'où :

$$I = \int_0^2 \left( \int_{x/2}^{4x/3} (x+3y)\,dy \right) dx + \int_2^3 \left( \int_{(4x-5)/3}^{4x/3} (x+3y)\,dy \right) dx$$

$$+ \int_3^5 \left( \int_{(4x-5)/3}^{(x+5)/2} (x+3y)\,dy \right) dx = \ldots$$

## Deuxième possibilité : changement de variables

Soit $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire qui envoie le carré $\tilde{D} = [0,1]\times[0,1]$ vers le parallélogramme $D$ :




$$\left.\begin{array}{l} G\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} \\ G\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\end{array}\right\} \Rightarrow A_G = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$ (matrice canoniquement associée à $G$)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = G\left(\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\right) = A_G\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2u+3v\\ u+4v\end{pmatrix}$$

Changement de variables : $\boxed{\begin{cases} x(u,v) = 2u+3v \\ y(u,v) = u+4v \end{cases}}$

Matrice jacobienne :

$$J_G(u,v) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix} = A_G$$

Jacobien : $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(J_G(u,v)\right) = 2\cdot 4 - 3\cdot 1 = 5$

$$\boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = 5}$$

$$\Rightarrow \iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = 5\iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v)\,du\,dv}$$

où $\tilde{D}$ est le carré $[0,1]\times[0,1]$.

Ici $f(x,y) = x + 3y$

d'où $\tilde{f}(u,v) = (2u+3v) + 3(u+4v) = 5u + 15v$

$$\Rightarrow \quad I = 5 \iint_{\tilde{D}} (5u+15v)\, du\, dv$$

$$= 25 \iint_{\tilde{D}} u\, du\, dv \; + 75 \iint_{\tilde{D}} v\, du\, dv$$

$$= 25 \underbrace{\left(\int_0^1 u\, du\right)}_{= \frac{1}{2}u^2\big|_0^1 = \frac{1}{2}} \underbrace{\left(\int_0^1 dv\right)}_{= v\big|_0^1 = 1} + 75 \underbrace{\left(\int_0^1 du\right)}_{=1} \underbrace{\left(\int_0^1 v\, dv\right)}_{=\frac{1}{2}}$$

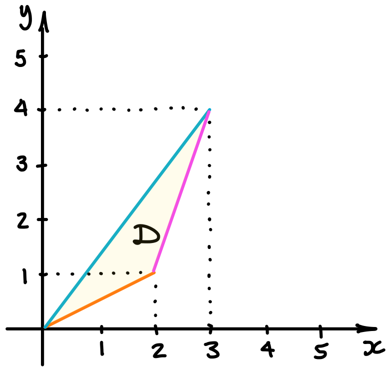
$$\Rightarrow \quad \boxed{\iint_D (x+3y)\, dx\, dy = 50}$$

Exemple 2.

Soit D le triangle de sommets

$(0,0)$, $(2,1)$ et $(3,4)$

Calculer $\iint_D (x+3y)\, dx\, dy$




Première possibilité : calcul direct

$x$ varie entre 0 et 3

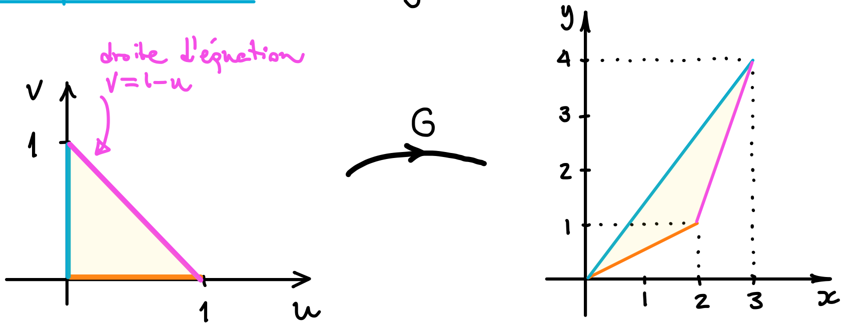
Pour $x \in [0,2]$ fixé, $y$ varie entre $g_1(x) = \frac{1}{2}x$ et $g_2(x) = \frac{4}{3}x$

Pour $x \in [2,3]$ fixé, $y$ varie entre $g_1(x) = 3x - 5$ et $g_2(x) = \frac{4}{3}x$

d'où : $\iint_D (x+3y)\, dx\, dy = \int_0^2 \left( \int_{x/2}^{4x/3} (x+3y)\, dy \right) dx + \int_2^3 \left( \int_{3x-5}^{4x/3} (x+3y)\, dy \right) dx$

$= \ldots$

Deuxième possibilité : le changement de variables de l'exemple 1 :



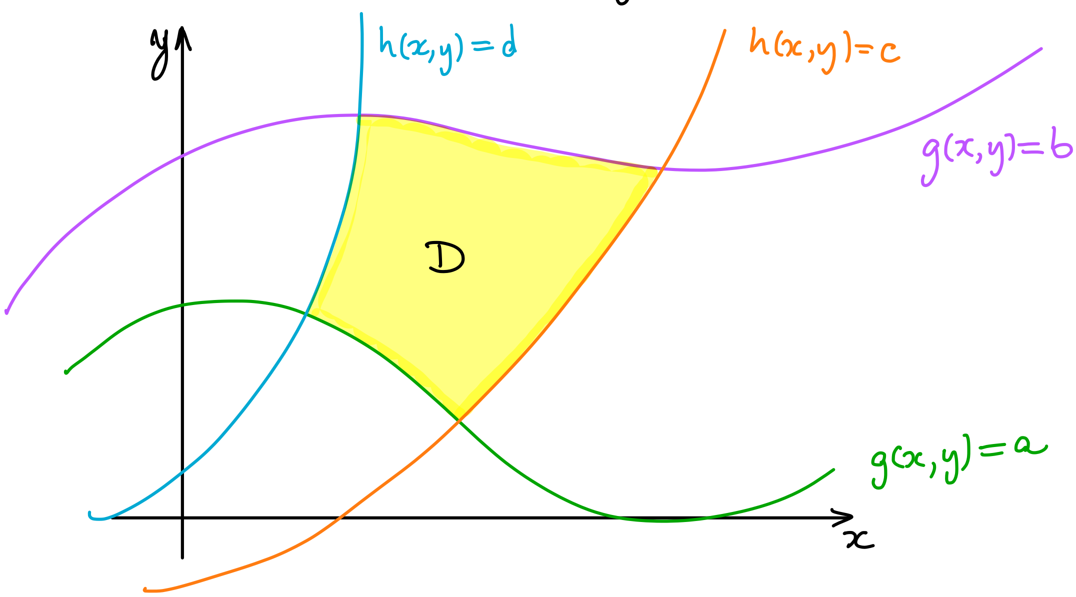

Ici u varie entre 0 et 1.

Pour $u \in [0,1]$ fixé, v varie entre $g_1(u) = 0$ et $g_2(u) = 1-u$

$$\iint_D (x+3y)\,dx\,dy = 5 \iint_{\tilde{D}} (5u+15v)\,du\,dv$$
$$= 25 \int_0^1 \left( \int_0^{1-u} (u+3v)\,dv \right) du$$
$$= 25 \int_0^1 \left[ uv + \frac{3}{2}v^2 \right]_{v=0}^{v=1-u} du$$
$$= 25 \int_0^1 \left( u(1-u) + \frac{3}{2}(1-u)^2 \right) du = \ldots = \frac{50}{3}$$

## 4.7. Coordonnées curvilignes.

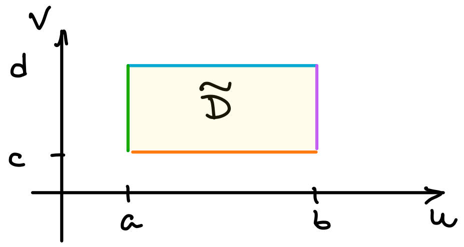
Considérons maintenant un domaine du plan limité par les courbes de niveau de deux fonctions g et h :



Si l'on veut calculer $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ il peut s'avérer utile d'utiliser le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = g(x,y) \\ v = h(x,y) \end{cases}$$

Comme $u$ varie entre $a$ et $b$ et $v$ varie entre $c$ et $d$, le domaine d'intégration est le rectangle $\tilde{D} = [a,b] \times [c,d]$ :




On a donc $$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} \tilde{f}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

où $G : \tilde{D} \longrightarrow D$
$\qquad (u,v) \longmapsto (x(u,v), y(u,v))$

Le changement de variables inverse est donné par :

$$G^{-1} : D \longrightarrow \tilde{D}$$
$$(x,y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y)) = (g(x,y), h(x,y))$$

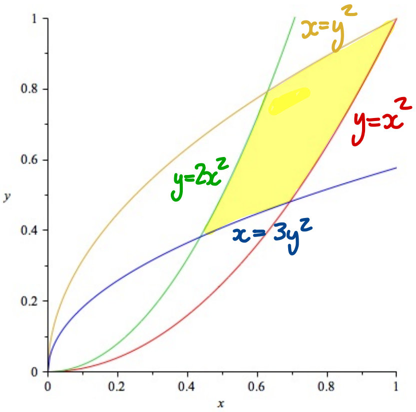
Rappel. Si $A$ et $B$ sont des matrices carrées de même taille, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

En particulier, si $B = A^{-1}$, on a $AB = I$ et $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$

Conséquence : $\boxed{\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \dfrac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}}$ et $\boxed{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{1}{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}}}$

## Exemples.

1. Calculer l'aire du domaine $D$ limité par les courbes




$$y=x^2 \iff \frac{x^2}{y}=1$$
$$y=2x^2 \iff \frac{x^2}{y}=\frac{1}{2}$$
$$x=y^2 \iff \frac{y^2}{x}=1$$
$$x=3y^2 \iff \frac{y^2}{x}=\frac{1}{3}$$

le changement de variables: $\begin{cases} u=\dfrac{x^2}{y} \\ v=\dfrac{y^2}{x} \end{cases}$ avec $x,y>0$

est tel que $\tilde{D}$ est un rectangle: $\tilde{D}=[\frac{1}{2},1]\times[\frac{1}{3},1]$

car $u$ varie entre $\frac{1}{2}$ et $1$ et $v$ varie entre $\frac{1}{3}$ et $1$

matrice jacobienne: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2x}{y} & -\frac{x^2}{y^2} \\ -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \end{pmatrix}$

jacobien: $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \dfrac{2x}{y}\cdot\dfrac{2y}{x} - \dfrac{x^2}{y^2}\cdot\dfrac{y^2}{x^2} = 4-1=3$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{3}}$$

L'aire du domaine $D$ vaut donc:

$$\mathcal{A}(D)=\iint_D 1\,dx\,dy = \iint_{\tilde{D}} 1 \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| du\,dv = \iint_{\tilde{D}} 1\,\frac{1}{3}\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{3}\iint_{\tilde{D}} 1\,du\,dv = \frac{1}{3}\mathcal{A}(\tilde{D}) = \frac{1}{3}\underbrace{\left(1-\frac{1}{2}\right)}_{\text{base}}\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{\text{hauteur}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{A}(D)=\frac{1}{9}}$$

## Remarque.

Il est aussi possible de calculer le jacobien $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ directement, mais il faut commencer par exprimer $x$ et $y$ comme des fonctions de $u$ et $v$:

$$\begin{cases} u = \frac{x^2}{y} \\ v = \frac{y^2}{x} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 v = \frac{x^4}{y^2} \cdot \frac{y^2}{x} = x^3 \\ u v^2 = \frac{x^2}{y} \cdot \frac{y^4}{x^2} = y^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = u^{2/3} v^{1/3} \\ y = u^{1/3} v^{2/3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} u^{-1/3} v^{1/3} & \frac{1}{3} u^{2/3} v^{-2/3} \\ \frac{1}{3} u^{-2/3} v^{1/3} & \frac{2}{3} u^{1/3} v^{-1/3} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

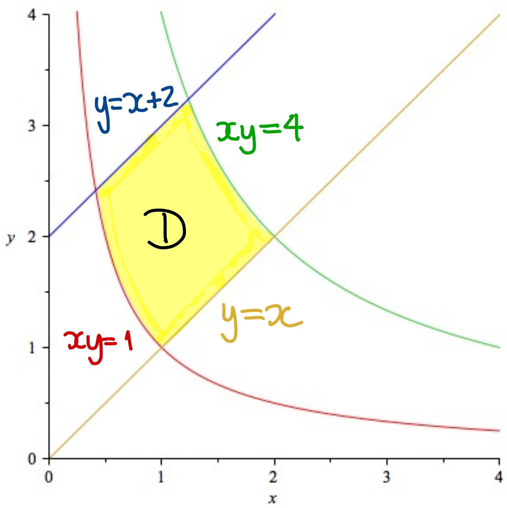
On obtient le même résultat mais avec plus d'effort.

2. Calculer l'intégrale

$$I = \iint_D (x^2 - y^2) e^{xy} \, dx \, dy$$

où $D$ est le domaine limité par les courbes:

$$xy = 1 \qquad y = x$$
$$xy = 4 \qquad y = x + 2$$




le changement de variables: $\begin{cases} u = xy \\ v = y - x \end{cases}$

est tel que $\tilde{D}$ est un rectangle: $\tilde{D} = [1,4] \times [0,2]$

car $u$ varie entre 1 et 4 et $v$ varie entre 0 et 2 matrice jacobienne: $\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

jacobien: $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = x+y > 0$ sur $\mathcal{D}$.

Ainsi: $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}} \Rightarrow \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{x(u,v)+y(u,v)}$

Comme $f(x,y) = (x^2-y^2)e^{xy} = (x+y)(x-y)e^{xy}$

la fonction à intégrer dans les nouvelles variables $u = xy$

et $v = y-x$ est:

$$\tilde{f}(u,v) = (x(u,v)+y(u,v))(-v)e^{uv}$$

Nous avons donc:

$$I = \iint_{\mathcal{D}} (x^2-y^2)e^{xy}\,dx\,dy = \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} \tilde{f}(u,v) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du\,dv$$

$$= \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} (x(u,v)+y(u,v))(-v)e^{uv} \frac{1}{x(u,v)+y(u,v)}\,du\,dv$$

$$= \iint_{\tilde{\mathcal{D}}} -ve^{u}\,du\,dv = \left(\int_1^4 e^u\,du\right)\left(\int_0^2 -v\,dv\right)$$

$$= [e^u]_1^4 \left[-\frac{v^2}{2}\right]_0^2 = (e^4-e)(-2+0)$$

$$\Rightarrow \boxed{I = 2e(1-e^3)}$$

### 4.8. Intégrales triples

**But :** Définir l'intégrale d'une fonction de trois variables sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^3$.

Nous procédons comme avant : Nous partageons le domaine $D$ de manière arbitraire en $n$ morceaux $D_1, \ldots, D_n$ de volume $\mathcal{V}(D_1), \ldots, \mathcal{V}(D_n)$ et choisissons un point $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$ dans chaque morceau $D_k$.

**Définition.** La fonction de trois variables $f : D \to \mathbb{R}$ est *intégrable* (au sens de Riemann) sur $D$ si pour toutes les partitions $\{D_1, \ldots, D_n\}$ du domaine $D$ telles que $\max\big(\mathcal{V}(D_k)\big) \to 0$ et n'importe quel choix $(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)$, la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k)\mathcal{V}(D_k)$$

tend vers une même limite. Cette limite est appelée *intégrale triple* de $f$ sur $D$ et notée

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

**Théorème.** (sans démonstration)

Si $f$ est continue sur $D$ alors $f$ est intégrable sur $D$.

**Propriétés**

**1.** Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur $D$, alors $f + g$ est intégrable et

$$\iiint_D \big(f(x,y,z) + g(x,y,z)\big)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

**2.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D$ et $c \in \mathbb{R}$, alors $c\,f$ est intégrable et

$$\iiint_D c\,f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = c\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

**3.** Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D = D_1 \sqcup D_2$ (réunion disjointe), alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

**4.** Le volume du domaine $D$ est l'intégrale de la fonction constante $f(x,y,z) = 1$ :

$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz\,.$$

**5.** S'il existe une constante $M$ telle que $|f(x,y,z)| \leqslant M$ pour tout $(x,y,z) \in D$ alors

$$\left|\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant M\,\mathcal{V}(D).$$

**6.** Si $f(x,y,z)$ décrit la densité du corps $D$, alors $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ est la masse du corps $D$.

### Calcul d'intégrales triples

Nous procédons de manière analogue au cas des intégrales doubles :

- Fixer les bornes d'une des variables :

$$a \leqslant x \leqslant b\,.$$

- Pour chaque $x \in [a,b]$ fixé, déterminer les bornes d'intégration de la deuxième variable :

$$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\,.$$

- Pour chaque $(x,y)$ *fixé*, déterminer les bornes d'intégration de la troisième variable :

$$h_1(x,y) \leqslant z \leqslant h_2(x,y)\,.$$

- Calculer l'intégrale itérée :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \underbrace{\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \underbrace{\left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)}_{\text{ne dépend plus de } z} dy\right]}_{\text{dépend seulement de } x} dx\,.$$

L'ordre d'intégration est arbitraire, déterminé en partie par la forme du domaine et/ou de la fonction à intégrer.

**Remarque.** Si le domaine d'intégration est de la forme

$$D = [a_1,a_2] \times [b_1,b_2] \times [c_1,c_2]$$

et si la fonction à intégrer peut s'écrire comme un produit de la forme

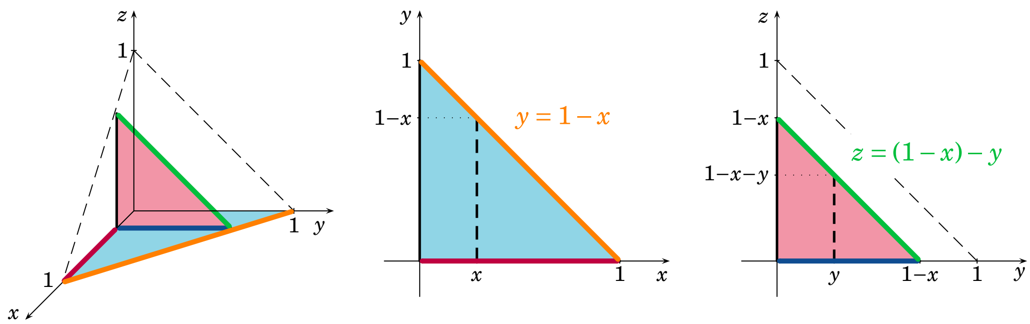
$$f(x,y,z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z)\,,$$

alors l'intégrale triple de $f$ sur $D$ est égale au produit de trois intégrales simples :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \left(\int_{a_1}^{a_2} f_1(x)\,dx\right)\left(\int_{b_1}^{b_2} f_2(y)\,dy\right)\left(\int_{c_1}^{c_2} f_3(z)\,dz\right).$$

**Exemple**

Soit $D$ le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.




La variable $x$ varie entre $x = 0$ et $x = 1$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, $y$ varie entre $g_1(x) = 0$ et $g_2(x) = 1 - x$.

Pour $(x, y)$ fixé, $z$ varie entre $h_1(x, y) = 0$ et $h_2(x, y) = 1 - x - y$.

Ainsi, pour calculer l'intégrale triple d'une fonction $f$, nous pouvons utiliser la formule

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left\{\int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz\right\} dy\right) dx.$$

Soit par exemple

$$f(x,y,z) = x.$$

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left\{\int_0^{1-x-y} x\,dz\right\} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \left\{\int_0^{1-x-y} dz\right\} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \Big[z\Big]_0^{1-x-y} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \{(1-x) - y\} dy\right) dx \\
&= \int_0^1 x \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x - 2x^2 + x^3)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4\right]_0^1 = \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

### Changement de variables dans les intégrales triples

Dans ce cas, un *changement de variables* est une fonction bijective de classe $C^1$ :

$$\begin{aligned} G: \ D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v,w) &\longmapsto \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \end{aligned}$$

Comme avant, nous lui associons la *matrice jacobienne*

$$J_G(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

et le *jacobien*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\big(J_G(u,v,w)\big) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

**Théorème.** Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue de trois variables,

$$\begin{aligned} G: \ D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v,w) &\longmapsto \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \end{aligned}$$

un changement de variables et $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^3$ tel que $G^{-1}(D) = \widetilde{D}$. Soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ définie par

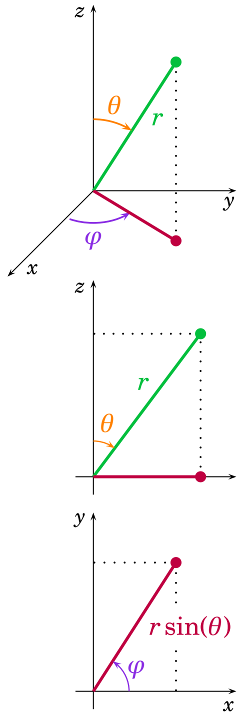
$$\widetilde{f}(u,v,w) = f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big).$$

Nous avons

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw.$$

où $\left| \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$ est la valeur absolue du jacobien associé au changement de variables $G$.

## A. Coordonnées sphériques $(r, \varphi, \theta)$




$$\begin{cases} x = r\sin(\theta)\cos(\varphi), \\ y = r\sin(\theta)\sin(\varphi), \qquad \text{avec } r \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \text{ et } 0 \leqslant \theta \leqslant \pi. \\ z = r\cos(\theta) \end{cases}$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

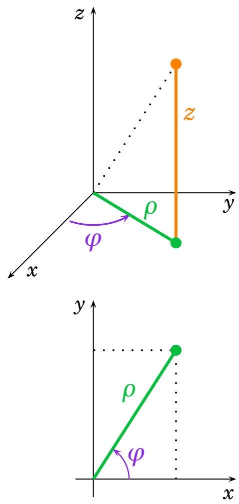
et le jacobien,
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,\theta)} = -r^2\sin(\theta).$$

Le théorème nous donne alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{D}} \tilde{f}(r,\varphi,\theta)\,r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

où $\tilde{f}(r,\varphi,\theta) = f\big(r\sin(\theta)\cos(\varphi), r\sin(\theta)\sin(\varphi), r\cos(\theta)\big)$.

## B. Coordonnées cylindriques $(\rho, \varphi, z)$




$$\begin{cases} x = \rho\cos(\varphi), \\ y = \rho\sin(\varphi), \qquad \text{avec } \rho \geqslant 0,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi \text{ et } z \in \mathbb{R}. \\ z = z \end{cases}$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le jacobien,
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \rho$$

Le théorème nous donne alors

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{D}} \tilde{f}(\rho,\varphi,z)\,\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$$

où $\tilde{f}(\rho,\varphi,z) = f\big(\rho\cos(\varphi), \rho\sin(\varphi), z\big)$.

**Exemples**

1. Calculer le volume de la boule $D$ de rayon $R$ centré à l'origine :

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\}.$$

**a)** En utilisant les coordonnées cartésiennes :

La variable $x$ varie entre $-R$ et $R$

Pour $x \in [-R,R]$ fixé, la variable $y$ varie entre

$$g_1(x) = -\sqrt{R^2-x^2} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \sqrt{R^2-x^2}$$

Pour $(x,y)$ fixé, la variable $z$ varie entre

$$h_1(x,y) = -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \text{et} \quad h_2(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz &= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1\,dz\right)dy\right)dx \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\Big[z\Big]_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}\right)dy\right)dx \\
&= \int_{-R}^{R}\left(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} 2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dy\right)dx = \ldots
\end{aligned}$$

**b)** En utilisant les coordonnées sphériques :

Nous avons

$$\widetilde{D} = \{(r,\varphi,\theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leqslant r \leqslant R\,,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\,,\ 0 \leqslant \theta \leqslant \pi\}$$

d'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz &= \iiint_{\widetilde{D}} 1\cdot r^2\sin(\theta)\,dr\,d\varphi\,d\theta \\
&= \left(\int_0^R r^2\,dr\right)\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi}\sin(\theta)\,d\varphi\right) \\
&= \left(\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R\right)\left(\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\right)\left(\Big[-\cos(\theta)\Big]_0^{\pi}\right) \\
&= \left(\frac{R^3}{3}-0\right)(2\pi-0)(1+1) \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

**c)** En utilisant les coordonnées cylindriques :

La variable $\varphi$ varie entre 0 et $2\pi$

La variable $\rho$ varie entre 0 et $R$

Pour $\rho \in [0,R]$ fixé, la variable $z$ varie entre

$$g_1(\rho) = -\sqrt{R^2-\rho^2} \quad \text{et} \quad g_2(\rho) = \sqrt{R^2-\rho^2}$$

Nous avons donc

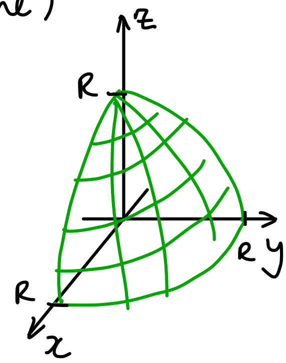
$$\begin{aligned}
\mathcal{V}(D) &= \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\tilde{D}} 1\cdot\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz \\
&= \int_0^R \rho\left(\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\left(\int_0^{2\pi} 1\,d\varphi\right)dz\right)d\rho = \int_0^R \rho\left(\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\Big[\varphi\Big]_0^{2\pi}\,dz\right)d\rho \\
&= 2\pi\int_0^R \rho\left(\int_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}} 1\,dz\right)d\rho = 2\pi\int_0^R \rho\,\Big[z\Big]_{-\sqrt{R^2-\rho^2}}^{\sqrt{R^2-\rho^2}}\,d\rho \\
&= 2\pi\int_0^R 2\rho\sqrt{R^2-\rho^2}\,d\rho = 2\pi\left[-\frac{2}{3}(R^2-\rho^2)^{3/2}\right]_0^R \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3
\end{aligned}$$

2. Considérer le domaine

$$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \leq R^2,\ x\geq 0,\ y\geq 0,\ z\geq 0\}$$

(huitième de boule de rayon R centrée à l'origine)

Calculer $I = \iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$




a) coordonnées cartésiennes : $x$ varie entre 0 et R

Pour $x \in [0,R]$ fixé, $y$ varie entre

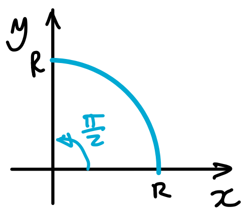
$$g_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(x) = \sqrt{R^2-x^2}$$

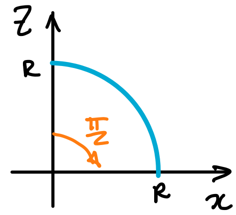
Pour $(x,y)$ fixé, $z$ varie entre

$$h_1(x,y) = 0 \quad \text{et} \quad h_2(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^R \left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} xyz\,dz\right)dy\right]dx = \ldots = \frac{R^6}{48}$$

b) Coordonnées sphériques :




$r$ varie entre $0$ et $R$

$\varphi$ varie entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$

$\theta$ varie entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \; I = \iiint_D xyz \, dx\, dy\, dz$$

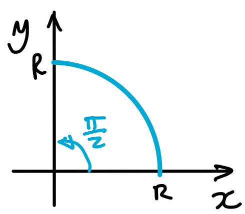
$$= \iiint_{\tilde{D}} (r\sin(\theta)\cos(\varphi))(r\sin(\theta)\sin(\varphi))(r\cos(\theta))\, r^2\sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

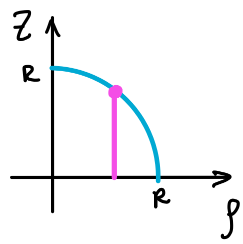
$$= \left(\int_0^R r^5\, dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\cos(\theta)\, d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^R \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^4(\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{R^6}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{R^6}{48}$$

c) coordonnées cylindriques




$\rho$ varie entre $0$ et $R$

$\varphi$ varie entre $0$ et $\frac{\pi}{2}$

pour $\rho \in [0,R]$ fixé, $z$ varie entre

$$g_1(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos(\varphi))(\rho\sin(\varphi))\, z = \rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, z$$

$$\Rightarrow \; I = \iiint_D xyz\, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \left(\int_0^{\pi/2} \rho^2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\, z\, \rho\, d\varphi\right) dz\right) d\rho$$

$$= \ldots = \frac{R^6}{48}$$