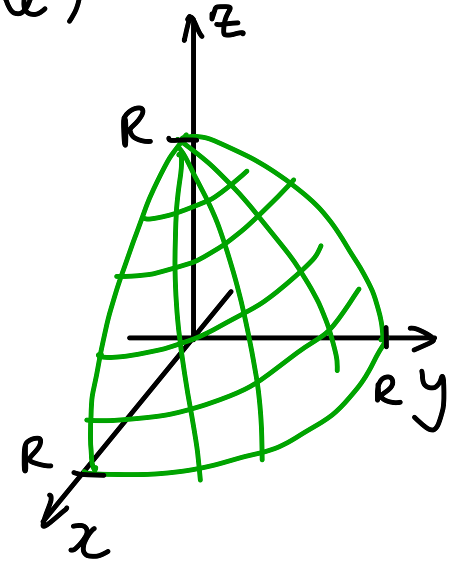
2. Considérer le domaine

$$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leqslant R^2,\ x\geqslant 0,\ y\geqslant 0,\ z\geqslant 0\}$$

(huitième de boule de rayon R centrée à l'origine)



Calculer $I=\iiint_D xyz\,dx\,dy\,dz$

a) coordonnées cartésiennes : x varie entre 0 et R

Pour $x\in[0,R]$ fixé, y varie entre

$$g_1(x)=0 \text{ et } g_2(x)=\sqrt{R^2-x^2}$$

Pour (x,y) fixé, z varie entre

$$h_1(x,y)=0 \text{ et } h_2(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

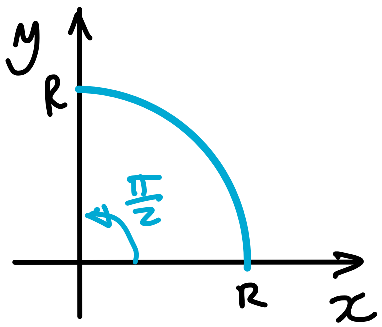
$$\Rightarrow I=\int_0^R\left[\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\left(\int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} xyz\,dz\right)dy\right]dx=\dots=\frac{R^6}{48}$$

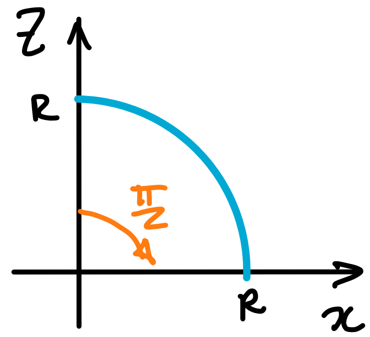
b) Coordonnées sphériques :

r varie entre 0 et R

φ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

θ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$





$$\Rightarrow \quad I = \iiint_D xyz \, dx \, dy \, dz$$

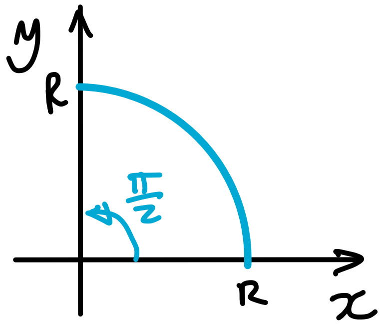
$$= \iiint_D (r\sin(\theta)\cos(\varphi))(r\sin(\theta)\sin(\varphi))(r\cos(\theta))\, r^2\sin(\theta)\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

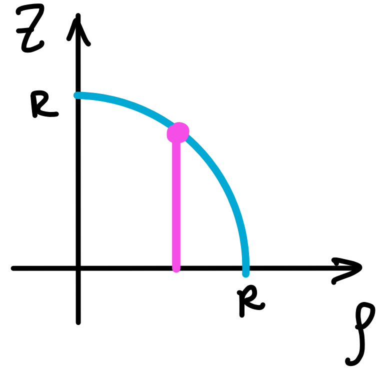
$$= \left(\int_0^R r^5 \, dr\right)\left(\int_0^{\pi/2} \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, d\varphi\right)\left(\int_0^{\pi/2} \sin^3(\theta)\cos(\theta)\, d\theta\right)$$

$$= \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^R \left[\frac{\sin^2(\varphi)}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\sin^4(\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{R^6}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad I = \frac{R^6}{48}$$

c) coordonnées cylindriques





ρ varie entre 0 et R

φ varie entre 0 et $\frac{\pi}{2}$

pour $\rho \in [0, R]$ fixé, z varie entre

$$g_1(\rho) = 0 \quad \text{et} \quad g_2(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

$$\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = (\rho\cos(\varphi))(\rho\sin(\varphi))\, z = \rho^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, z$$

$$\Rightarrow \quad I = \iiint_D xyz \, dx\, dy\, dz$$

$$= \int_0^R \left(\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}} \left(\int_0^{\pi/2} \rho^2 \cos(\varphi)\sin(\varphi)\, z\, \rho \, d\varphi \right) dz \right) d\rho$$

$$= \dots = \frac{R^6}{48}$$