

A. Coordonnées sphériques (r, φ, θ)

$$\begin{cases} x = r \sin(\theta) \cos(\varphi), \\ y = r \sin(\theta) \sin(\varphi), \\ z = r \cos(\theta) \end{cases} \quad \text{avec } r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ et } 0 \leq \theta \leq \pi.$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \cos(\varphi) & -r \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \cos(\theta) \cos(\varphi) \\ \sin(\theta) \sin(\varphi) & r \sin(\theta) \cos(\varphi) & r \cos(\theta) \sin(\varphi) \\ \cos(\theta) & 0 & -r \sin(\theta) \end{pmatrix}$$

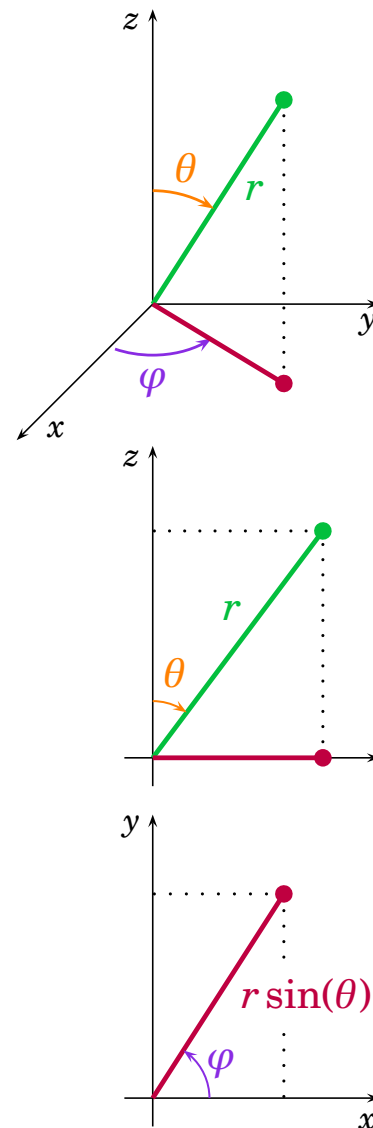
et le jacobien,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = -r^2 \sin(\theta).$$

Le théorème nous donne alors

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{D}} \tilde{f}(r, \varphi, \theta) r^2 \sin(\theta) dr d\varphi d\theta$$

où $\tilde{f}(r, \varphi, \theta) = f(r \sin(\theta) \cos(\varphi), r \sin(\theta) \sin(\varphi), r \cos(\theta))$.



B. Coordonnées cylindriques (ρ, φ, z)

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\varphi), \\ y = \rho \sin(\varphi), \\ z = z \end{cases} \quad \text{avec } \rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi \text{ et } z \in \mathbb{R}.$$

La matrice jacobienne associée à ce changement de variables est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\rho \sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \rho \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

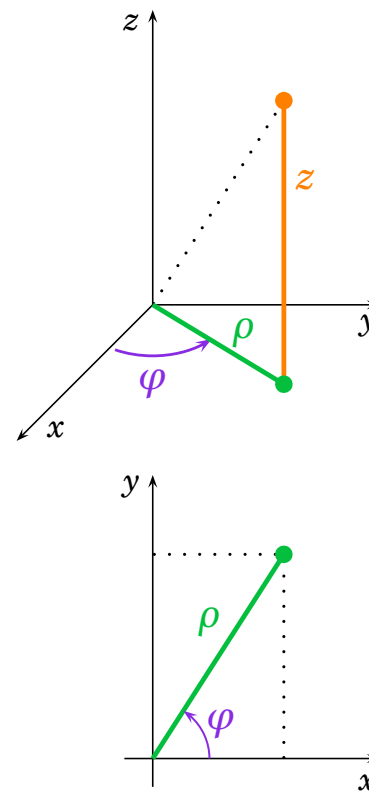
et le jacobien,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, z)} = \rho$$

Le théorème nous donne alors

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{D}} \tilde{f}(\rho, \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz$$

où $\tilde{f}(\rho, \varphi, z) = f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi), z)$.



Exemples

1. Calculer le volume de la boule D de rayon R centré à l'origine :

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

- a) En utilisant les coordonnées cartésiennes :

La variable x varie entre $-R$ et R

Pour $x \in [-R, R]$ fixé, la variable y varie entre

$$g_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{et} \quad g_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$$

Pour (x, y) fixé, la variable z varie entre

$$h_1(x, y) = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{et} \quad h_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} 1 \, dz \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} \left(\left[z \right]_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \right) dy \right) dx \\ &= \int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - x^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2}} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, dy \right) dx = \dots \end{aligned}$$

b) En utilisant les coordonnées sphériques :

Nous avons

$$\tilde{D} = \{(r, \varphi, \theta) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq r \leq R, 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tilde{D}} 1 \cdot r^2 \sin(\theta) \, dr \, d\varphi \, d\theta \\ &= \left(\int_0^R r^2 \, dr \right) \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) \left(\int_0^\pi \sin(\theta) \, d\theta \right) \\ &= \left(\left[\frac{r^3}{3} \right]_0^R \right) \left(\left[\varphi \right]_0^{2\pi} \right) \left(\left[-\cos(\theta) \right]_0^\pi \right) \\ &= \left(\frac{R^3}{3} - 0 \right) (2\pi - 0) (1 + 1) \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$

c) En utilisant les coordonnées cylindriques :

La variable φ varie entre 0 et 2π

La variable ρ varie entre 0 et R

Pour $\rho \in [0, R]$ fixé, la variable z varie entre

$$g_1(\rho) = -\sqrt{R^2 - \rho^2} \quad \text{et} \quad g_2(\rho) = \sqrt{R^2 - \rho^2}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} \mathcal{V}(D) &= \iiint_D 1 \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\tilde{D}} 1 \cdot \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz \\ &= \int_0^R \rho \left(\int_{-\sqrt{R^2 - \rho^2}}^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\varphi \right) dz \right) d\rho = \int_0^R \rho \left(\int_{-\sqrt{R^2 - \rho^2}}^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} \left[\varphi \right]_0^{2\pi} dz \right) d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R \rho \left(\int_{-\sqrt{R^2 - \rho^2}}^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} 1 \, dz \right) d\rho = 2\pi \int_0^R \rho \left[z \right]_{-\sqrt{R^2 - \rho^2}}^{\sqrt{R^2 - \rho^2}} d\rho \\ &= 2\pi \int_0^R 2\rho \sqrt{R^2 - \rho^2} \, d\rho = 2\pi \left[-\frac{2}{3} (R^2 - \rho^2)^{3/2} \right]_0^R \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3 \end{aligned}$$