4.8. Intégrales triples

But : Définir l'intégrale d'une fonction de trois variables sur un domaine borné $D \subset \mathbb{R}^3$.

Nous procédons comme avant : Nous partageons le domaine D de manière arbitraire en n morceaux $D_1,\ldots,D_n$ de volume $\mathcal{V}(D_1),\ldots,\mathcal{V}(D_n)$ et choisissons un point (ξ_k,η_k,ζ_k) dans chaque morceau D_k.

Définition. La fonction de trois variables $f : D \to \mathbb{R}$ est *intégrable* (au sens de Riemann) sur D si pour toutes les partitions $\{D_1,\ldots,D_n\}$ du domaine D telles que $\max\big(\mathcal{V}(D_k)\big) \to 0$ et n'importe quel choix (ξ_k,η_k,ζ_k), la somme de Riemann

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\mathcal{V}(D_k)$$

tend vers une même limite. Cette limite est appelée *intégrale triple* de f sur D et notée

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$

Théorème. (sans démonstration)

Si f est continue sur D alors f est intégrable sur D.

Propriétés

1. Si $f, g : D \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions intégrables sur D, alors $f+g$ est intégrable et
$$\iiint_D \big(f(x,y,z)+g(x,y,z)\big)\,dx\,dy\,dz = \iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_D g(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$
2. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur D et $c \in \mathbb{R}$, alors $c\,f$ est intégrable et
$$\iiint_D c\,f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = c\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$
3. Si $f : D \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable sur $D = D_1 \sqcup D_2$ (réunion disjointe), alors
$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{D_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz + \iiint_{D_2} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\,.$$
4. Le volume du domaine D est l'intégrale de la fonction constante $f(x,y,z)=1$:
$$\mathcal{V}(D) = \iiint_D 1\,dx\,dy\,dz\,.$$
5. S'il existe une constante M telle que $\left|f(x,y,z)\right| \leqslant M$ pour tout $(x,y,z)\in D$ alors
$$\left|\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz\right| \leqslant M\,\mathcal{V}(D).$$
6. Si $f(x,y,z)$ décrit la densité du corps D, alors $\displaystyle\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$ est la masse du corps D.

Calcul d'intégrales triples

Nous procédons de manière analogue au cas des intégrales doubles :

- Fixer les bornes d'une des variables :

$$a \leqslant x \leqslant b\,.$$

- Pour chaque $x \in [a, b]$ fixé, déterminer les bornes d'intégration de la deuxième variable :

$$g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x)\,.$$

- Pour chaque (x, y) *fixé*, déterminer les bornes d'intégration de la troisième variable :

$$h_1(x, y) \leqslant z \leqslant h_2(x, y)\,.$$

- Calculer l'intégrale itérée :

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \underbrace{\left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} \underbrace{\left(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)}_{\text{ne dépend plus de } z} dy\right]}_{\text{dépend seulement de } x} dx\,.$$

L'ordre d'intégration est arbitraire, déterminé en partie par la forme du domaine et/ou de la fonction à intégrer.

Remarque. Si le domaine d'intégration est de la forme

$$D = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$$

et si la fonction à intégrer peut s'écrire comme un produit de la forme

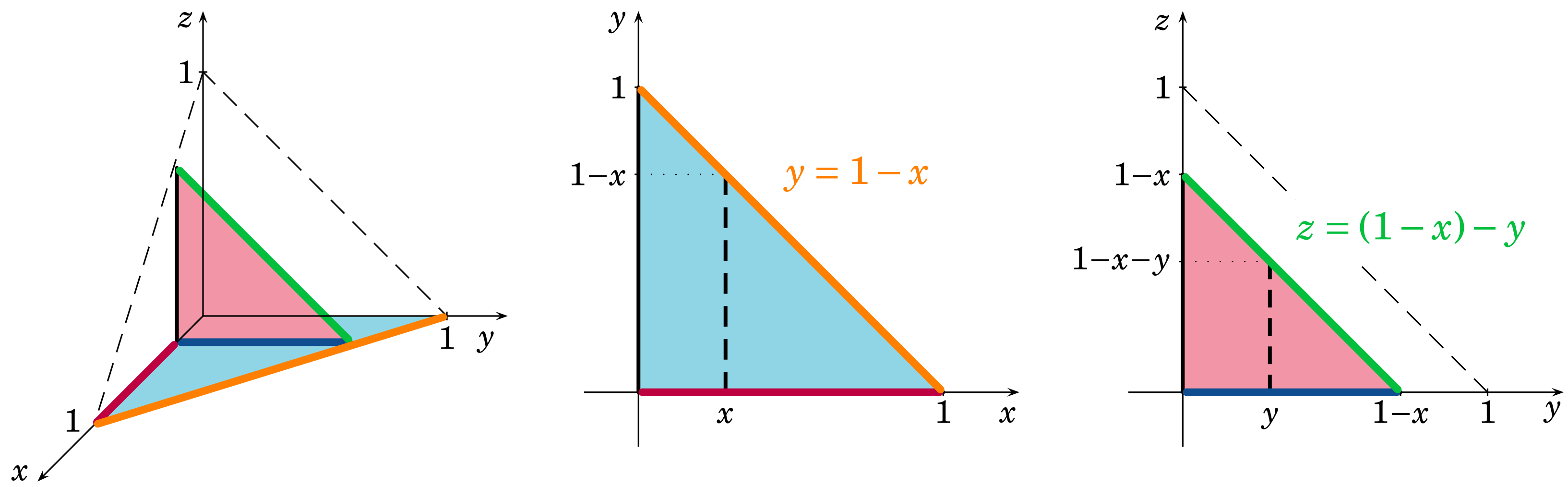
$$f(x, y, z) = f_1(x) f_2(y) f_3(z),$$

alors l'intégrale triple de f sur D est égale au produit de trois intégrales simples :

$$\iiint_D f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \left(\int_{a_1}^{a_2} f_1(x)\, dx\right)\left(\int_{b_1}^{b_2} f_2(y)\, dy\right)\left(\int_{c_1}^{c_2} f_3(z)\, dz\right).$$

Exemple

Soit D le tétraèdre de sommets $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ et $(0,0,1)$.



La variable x varie entre $x = 0$ et $x = 1$

Pour $x \in [0,1]$ fixé, y varie entre $g_1(x) = 0$ et $g_2(x) = 1 - x$.

Pour (x,y) fixé, z varie entre $h_1(x,y) = 0$ et $h_2(x,y) = 1 - x - y$.

Ainsi, pour calculer l'intégrale triple d'une fonction f, nous pouvons utiliser la formule

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} f(x,y,z)\,dz \right\} dy \right) dx.$$

Soit par exemple

$$f(x,y,z) = x\,.$$

Le calcul nous donne

$$\begin{aligned}
\iiint_D x\,dx\,dy\,dz &= \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} x\,dz \right\} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \left\{ \int_0^{1-x-y} dz \right\} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \Big[z \Big]_0^{1-x-y} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left(\int_0^{1-x} \{(1-x)-y\} dy \right) dx \\
&= \int_0^1 x \left[(1-x)y - \frac{1}{2}y^2 \right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x \left((1-x)^2 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 x(1-x)^2\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (x-2x^2+x^3)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{24}\,.
\end{aligned}$$

Changement de variables dans les intégrales triples

Dans ce cas, un *changement de variables* est une fonction bijective de classe C^1 :

$$\begin{aligned} G: \quad D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v,w) &\longmapsto \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \end{aligned}$$

Comme avant, nous lui associons la *matrice jacobienne*

$$J_G(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial x}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial y}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial y}{\partial w}(u,v,w) \\ \dfrac{\partial z}{\partial u}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial v}(u,v,w) & \dfrac{\partial z}{\partial w}(u,v,w) \end{pmatrix}$$

et le *jacobien*

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\big(J_G(u,v,w)\big) = \det\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial x}{\partial w} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial w} \\ \dfrac{\partial z}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial w} \end{pmatrix}.$$

Théorème. Soient $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction continue de trois variables,

$$\begin{aligned} G: \quad D(G) &\longrightarrow \mathrm{Im}(G) \\ (u,v,w) &\longmapsto \big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big) \end{aligned}$$

un changement de variables et $\widetilde{D} \subset \mathbb{R}^3$ tel que $G^{-1}(D) = \widetilde{D}$. Soit $\widetilde{f} : \widetilde{D} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\widetilde{f}(u,v,w) = f\big(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w)\big).$$

Nous avons

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\widetilde{D}} \widetilde{f}(u,v,w) \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right| du\,dv\,dw\,.$$

où $\left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} \right|$ est la valeur absolue du jacobien associé au changement de variables G.